ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 35, Number 2, 2010, pp. 319–328

STABILITÉ ET INSTABILITÉ D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FONCTIONNELLE SEMI-LINÉAIRE À RETARD FINI DANS DES ESPACES DE BANACH

SGHIR ABDELHAQ

ABSTRACT. In this paper, we discuss methods for determining stability and instability of the solution $x = 0$ of the functional differential equation $u'(t) = Lu_t + F(t, u_t)$ without use of Lyapunov functionals.

1. INTRODUCTION

Considérons l'équation différentielle fonctionnelle

$$u'(t) = Lu_t + F(t, u_t), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

où $L : \mathcal{C} := C([-r, 0]; E) \to E$ est un opérateur linéaire continu, $r > 0$, $(E, |.|_E)$ un espace de Banach, $\mathcal{C}$ muni de la norme sup notée $\|.\|$ et $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to E$ est une fonction complètement continue avec $F(t, 0) = 0$, si bien que l'équation (1.1) admet la solution nulle.

Posons nous le problème de savoir dans quelles conditions nous avons la stabilité de la solution nulle. Cette question est évidemment importante en pratique. Nous étudions également la question relative à l'instabilité.

Nous n'allons pas faire appel à des fonctions de Lyapunov (voir par exemple [2-6]) et leurs références, mais nous cherchons directement des bornes pour les solutions de l'équation (1.1) tout en utilisant la formule de variation de la constante prouvée par Arino-Sanchez [1] dans un espace de Banach et une idée décrite dans le livre de Zeidler [8].

2. PRÉLIMINAIRES

Rappelons les notations et résultats utiles pour la compréhension de ce papier.

Pour $u \in C([-r, +\infty[; E)$ et $t \geq 0$, désignons par u_t l'élément de $\mathcal{C}$ défini par $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $\theta \in J := [-r, 0]$.

Received April 17, 2008; in revised form May 4, 2010.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 34K30, 34K20.
Key words and phrases. Equation différentielle fonctionnelle semi-linéaire à retard fini; formule de variation de la constante, stabilité et instabilité.

2.1. **Stabilité au sens de Lyapunov.** [5]

Considérons l'équation différentielle fonctionnelle à retard

$$u'(t) = g(t, u_t), \qquad R(g)$$

où $g : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to E$ est une fonction continue. À $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$, nous associons le problème de Cauchy

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = g(t, u_t),\ t \geq \sigma \\ u_\sigma = \varphi. \end{array} \right.$$

Désignons par $u(\sigma, \varphi)$ une solution (si elle existe) de (C) et par $u_t(\sigma, \varphi)$ sa section.

Définition. Supposons que $g(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(i) La solution triviale $u = 0$ de $R(g)$ est dite stable, si pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta := \delta(\sigma, \varepsilon) > 0$ tel que pour tout $\varphi \in B(0, \delta)$, on ait $u_t(\sigma, \varphi) \in B(0, \varepsilon)$ pour tout $t \geq \sigma$, où $B(0, \delta)$ est la boule dans l'espace $\mathcal{C}$ avec centre 0 et avec rayon δ.

(ii) La solution triviale $u = 0$ de $R(g)$ est dite asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe un $b := b(\sigma) > 0$ tel que pour tout $\varphi \in B(0, b)$, on ait $\lim\limits_{t \to +\infty} u(\sigma, \varphi)(t) = 0$.

2.2. **Formule de variation de la constante.** [1, 7]

2.2.1. *Semi-groupe défini dans* $\pounds(E)$. Soit $\left(\pounds(E), \|.\|_{\pounds(E)}\right)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues dans E.

Pour chaque $\Phi \in \Theta := C([-r, 0], \pounds(E))$ muni de la norme $\|\Phi\|_\Theta = \sup\limits_{\theta \in J} \|\Phi(\theta)\|_{\pounds(E)}$ et pour chaque $b \in E$, considérons la fonction $\Phi \otimes b$ de $\mathcal{C}$ définie par

$$(\Phi \otimes b)(\theta) = \Phi(\theta)(b) \text{ pour tout } \theta \in [-r, 0].$$

Soit l'opérateur linéaire borné

$$\widetilde{L} : \Phi \in \Theta \mapsto \widetilde{L}(\Phi) \in \pounds(E)$$

défini par $\widetilde{L}(\Phi)(b) = L(\Phi \otimes b)$ pour tout $b \in E$ (où L est l'opérateur donné dans l'introduction).
Le problème de Cauchy retardé

$$\left\{ \begin{array}{l} V'(t) = \widetilde{L}(V_t), \quad t \geq 0 \\ V_0 = \Phi \in \Theta \end{array} \right.$$

admet une unique solution. Ainsi, cette solution définie sur Θ un semi-groupe $\left(\widetilde{T}(t)\right)_{t \geq 0}$ de translation fortement continu tel que $\widetilde{T}(t)\Phi = V_t$ pour tout $t \geq 0$. Son générateur infinitésimal est $\widetilde{A}\Phi = \Phi'$ avec $D(\widetilde{A}) = \{\Phi \in C^1([-r, 0], \pounds(E)) : \Phi'(0) = \widetilde{L}(\Phi)\}$. De plus pour tout $b \in E$ et tout $\theta \in [-r, 0]$

$$\left(\widetilde{T(t)\Phi}\right)(\theta)(b) = T(t)(\Phi \otimes b)(\theta),$$

où $(T(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe de translation fortement continu associé au problème

$$(H)\ \begin{cases} u'(t) = Lu_t,\ t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

2.2.2. *Solution fondamentale.* Soit $e \in E$, désignons par $u^e(t)$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u'(t) = Lu_t + e,\ t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Définition. Soit $h \in C([0, +\infty[; E)$, la solution fondamentale du problème

$$(N.H)\ \begin{cases} u'(t) = Lu_t + h(t),\ t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

est la famille d'opérateurs $\{\mathcal{U}(t) : t \geq 0\}$, $\mathcal{U}(t) : E \to E$, défini par $\mathcal{U}(t)\, e = (u^e)'(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Propriétés. $\mathcal{U}(0) = I$ et $\mathcal{U}(t)\, e = Lu_t + e$ pour tout $t \geq 0$.
Pour chaque $e \in E$ fixé, la fonction $t \longmapsto \mathcal{U}(t)\, e$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et

$$|\mathcal{U}(t)\, e|_E \leq |e|_E\, (1 + tle^{tl}) \text{ où } l := \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |L\varphi|_E\,.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, \mathcal{U}(t) \in \pounds(E)$.
La fonction $t \longmapsto \mathcal{U}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Nous prolongeons $\mathcal{U}$ par zéro sur $[-r, 0[$; puisque $\mathcal{U}(0) = I$ alors la continuité de $\mathcal{U}$ n'est pas conservée, mais nous pouvons définir $\mathcal{U}_t$ sur $[-r, 0[$ par

$$\mathcal{U}_t\,(\theta) = \begin{cases} \mathcal{U}(t+\theta) & \text{si} \quad t+\theta \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t+\theta \in [-r, 0[. \end{cases}$$

2.2.3. *Formule de variation de la constante.* La solution u du problème $(N.H)$ est donnée par la formule

$$u(t) = \begin{cases} (T(t)\varphi)(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t+s)\,(h(s))ds \text{ si } t \geq 0 \\ \varphi(t) \text{ si } t \in J \end{cases}$$

et

$$u_t = T(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{U}_{t-s} \otimes h(s)ds \text{ pour tout } t \geq 0.$$

3. Étude de la stabilité

Considérons l'équation différentielle fonctionnelle

(3.1) $$u'(t) = Lu_t + F(t, u_t),\ \ t \geq 0,$$

où L et F vérifient les hypothèses suivantes:

H_1) $L : \mathcal{C} \to E$ est un opérateur linéaire continu.

H_2) i) $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to E$ est une fonction complètement continue.

ii) Il existe une fonction $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ localement intégrable telle que

$$|F(t,\psi)|_E \leq m(t)h(\|\psi\|) \text{ pour tout } (t,\psi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C},$$
où $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, croissante et vérifiant
$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{h(s)} = +\infty.$$
À l'équation (3.1) associons le problème
$$\mathcal{P}(\varphi) \begin{cases} u'(t) = Lu_t + F(t,u_t), \ t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in \mathcal{C}. \end{cases}$$
Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), il est facile de démontrer (voir [7]) que le problème $\mathcal{P}(\varphi)$ admet au moins une solution donnée par
$$u(t) = \begin{cases} (T(t)\varphi)(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)(F(s,u_s))ds & \text{si} \quad t \geq 0 \\ \varphi(t) & \text{si} \quad t \in J, \end{cases}$$
sa section $u_t(\varphi)$ est donnée par
$$u_t(\varphi) = T(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{U}_{t-s} \otimes F(s,u_s)ds \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Lemme 3.1. i) *Pour tout* $t \geq r$
$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\pounds(E)} \leq (1 + rle^{rl}) \|T(t-r)\|_{\pounds(\mathcal{C})} .$$
ii) *S'il existe deux fonctions* $g_1, g_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *continues avec* g_1 *croissante, telle que pour tous* $t \geq s \geq 0$
$$\|T(t-s)\|_{\pounds(\mathcal{C})} \leq g_1(t)g_2(s),$$
alors il existe une fonction $g_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *continue telle que*
$$\|\mathcal{U}(t-s)\|_{\pounds(E)} \leq g_1(t)g_3(s) \ \textit{pour tous } t \geq s \geq 0.$$

Démonstration. i) D'après [1], la solution fondamentale vérifie l'équation intégrale
$$\mathcal{U}(t) = \widetilde{L}\left(\int_0^t \mathcal{U}_s ds\right) + I \ \text{ pour tout } t \geq 0.$$
Si $t \geq r$, alors
$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t) &= \widetilde{L}\left(\int_0^r \mathcal{U}_s ds + \int_r^t \mathcal{U}_s ds\right) + I \\ &= \widetilde{L}\left(\int_0^r \mathcal{U}_s ds\right) + \widetilde{L}\left(\int_r^t \mathcal{U}_s ds\right) + I \\ &= \int_0^t \widetilde{L}\mathcal{U}_s ds + \widetilde{L}\left(\int_0^r \mathcal{U}_s ds\right) + I, \end{aligned}$$
ce qui donne
$$\mathcal{U}'(t) = \widetilde{L}\mathcal{U}_t \text{ pour tout } t \geq r$$
et donc
$$\mathcal{U}_t = \widetilde{T}(t-r)\mathcal{U}_r.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}_t\|_\Theta &= \left\|\widetilde{T}(t-r)\mathcal{U}_r\right\|_\Theta \\
&= \sup_{\theta\in J}\left\|\left(\widetilde{T}(t-r)\mathcal{U}_r\right)(\theta)\right\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= \sup_{\theta\in J}\sup_{|b|_E\le 1}\left|\left(\widetilde{T}(t-r)\mathcal{U}_r\right)(\theta)\,(b)\right|_E \\
&= \sup_{\theta\in J}\sup_{|b|_E\le 1}\left|\left(T(t-r)\mathcal{U}_r\otimes b\right)(\theta)\right|_E \\
&= \sup_{|b|_E\le 1}\|T(t-r)\mathcal{U}_r\otimes b\| \\
&\le \sup_{|b|_E\le 1}\|T(t-r)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C})}\|\mathcal{U}_r\otimes b\| \\
&\le (1+rle^{rl})\,\|T(t-r)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C})}
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}_r\otimes b\| &= \sup_{\theta\in J}\left|(\mathcal{U}_r\otimes b)(\theta)\right|_E = \sup_{\theta\in J}\left|(\mathcal{U}(r+\theta)\,(b)\right|_E \\
&\le \sup_{\theta\in J}[1+(r+\theta)le^{(r+\theta)l}]\,|b|_E \\
&\le (1+rle^{rl})\,|b|_E\,.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \le (1+rle^{rl})\,\|T(t-r)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C})}\,.$$

ii) Soient $t\ge s\ge 0$.
Si $t\ge s+r$, alors par (i)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} &\le (1+rle^{rl})\,\|T[(t-r)-s]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C})} \\
&\le (1+rle^{rl})g_1(t-r)g_2(s) \\
&\le (1+rle^{rl})g_1(t)g_2(s).
\end{aligned}$$

Si $t\le s+r$, alors

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} &\le (1+(t-s)le^{(t-s)l}) \\
&\le 1+rle^{rl} \\
&\le (1+rle^{rl})g_1(s)g_2(s) \\
&\le (1+rle^{rl})g_1(t)g_2(s).
\end{aligned}$$

Posons $g_3(s)=(1+rle^{rl})g_2(s)$, alors

$$\|\mathcal{U}(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} \le g_1(t)g_3(s).$$

□

Afin d'étudier la stabilité de la solution nulle de l'équation (3.1), introduisons en plus l'hypothèse suivante:

H_3) i) On suppose $h(0) = 0$ et il existe $q > 1$ tel que $h(ku) \leq k^q h(u)$ pour tout $0 < k \leq 1$ et tout $u \geq 0$.

ii) Il existe deux fonctions $g_1, g_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues avec g_1 croissante, telle que pour tous $t \geq s \geq 0$

$$\|T(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C})} \leq g_1(t)g_2(s)$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t m(s)g_1(s)h(g_2(s))ds \leq c < +\infty.$$

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_3)$, *on a pour toute solution* u *de* $\mathcal{P}(\varphi)$

$$\|u_t(\varphi)\| < M \|\varphi\| g(t) \text{ pour tout } t \geq 0, \qquad (*)$$

où $M = 1 + c,\ g(t) = g_1(0)g_2(t),\ \varphi \in \mathcal{C}$ *avec*

$$\|\varphi\| < \frac{1}{M^{\frac{q}{q-1}} g_1(0)(1 + rle^{rl})^{\frac{1}{q-1}}}.$$

Démonstration. Remarquons que

$$\|u_0(\varphi)\| = \|\varphi\| = \|T(0)\varphi\| \leq \|T(0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C})} \|\varphi\| \leq g(0)\|\varphi\| < M \|\varphi\| g(0)$$

et donc, par la continuité en zéro de $t \longmapsto u_t(\varphi)$ l'inégalité $(*)$ est vérifiée dans un voisinage de zéro:

$$\exists \omega > 0 : \forall t \in [0, \omega[,\ \ \|u_t(\varphi)\| < M \|\varphi\| g(t). \qquad (**)$$

Montrons que ω est infini. Supposons que ω est fini, alors on a $(**)$ et $\|u_\omega(\varphi)\| = M\|\varphi\| g(\omega)$ et par suite,

$$\begin{aligned}
&M \|\varphi\| g(\omega) = \|u_\omega(\varphi)\| \\
&\leq \|T(\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C})} \|\varphi\| + \sup_{\omega+\theta\geq 0} \int_0^{\omega+\theta} \|\mathcal{U}(\omega+\theta-s)\|_{\mathcal{L}(E)} m(s)h(\|u_s(\varphi)\|)ds \\
&\leq g(\omega)\|\varphi\| + \sup_{\omega+\theta\geq 0} M^q \|\varphi\|^q g_1(0)^q \int_0^{\omega+\theta} \|\mathcal{U}(\omega+\theta-s)\|_{\mathcal{L}(E)} m(s)h(g_2(s))ds \\
&\leq g(\omega)\|\varphi\| + M^q \|\varphi\|^q g_1(0)^q (1+rle^{rl}) g_2(\omega) \sup_{\omega+\theta\geq 0} \int_0^{\omega+\theta} m(s)g_1(s)h(g_2(s))ds \\
&\leq g(\omega)\|\varphi\| [1 + M^q \|\varphi\|^{q-1} g_1(0)^{q-1}(1+rle^{rl}) \sup_{\omega+\theta\geq 0} \int_0^{\omega+\theta} m(s)g_1(s)h(g_2(s))ds] \\
&< g(\omega)\|\varphi\| [1 + M^q \|\varphi\|^{q-1} g_1(0)^{q-1}(1+rle^{rl})c] \\
&< M \|\varphi\| g(\omega).
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. $\square$

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses précédentes et si g_2 est bornée, alors la solution nulle de l'équation 3.1 est stable.*

Corollaire 3.2. *Sous les hypothèses précédentes et si* $\lim_{t\to+\infty} g_2(t) = 0$, *alors la solution nulle de l'équation* (3.1) *est asymptotiquement stable.*

Pour étudier l'instabilité de la solution nulle de l'équation (3.1), donnons l'hypothèse suivante:

H_4) i) On suppose de plus dans l'hypothèse H_3) i) que h est strictement croissante et que $m \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ où p est le conjugué de q.

ii) Il existe $\lambda \in \sigma(A)$ (spectre de l'opérateur A, où A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$) tel que $\operatorname{Re}\lambda = \mu > 0$ avec μ assez grand.

Lemme 3.2. (voir [8, p. 870]) *Soient* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu (on dit aussi de classe C_0) sur un espace de Banach $(X, \|.\|_X)$ et A son générateur infinitésimal, alors pour tout $\lambda \in Fr\ \sigma(A)$ (frontière du spectre de A), on a:*

i) $\forall\varepsilon > 0, \exists\varphi_0 \in D(A) : \|\varphi_0\|_X = 1$ *et* $\|(A - \lambda I)\varphi_0\|_X < \varepsilon$.

ii) $\forall\omega > 0, \forall\eta \in]0, 1[,\ \exists\varphi_0 \in D(A) : \|\varphi_0\|_X = 1$ *et* $(1-\eta)e^{t\operatorname{Re}\lambda} \leq \|T(t)\varphi_0\|_X \leq (1 + \eta)e^{t\operatorname{Re}\lambda}$ *pour tout* $t \in [0, \omega]$.

De ce lemme nous déduisons le lemme suivant:

Lemme 3.3. *Sous les hypothèses du lemme précédent et si nous supposons* $\operatorname{Re}\lambda = \mu > 0$ *(μ est assez grand) avec $\lambda \in \sigma(A)$, alors*

$$\forall\omega > 0,\ \exists\varphi_0 \in D(A) : 0 < \|\varphi_0\|_X \leq 1 \text{ et } \frac{1}{3}e^{\mu\omega} \leq \|T(\omega)\varphi_0\|_X .$$

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses $H_1), H_2)$ et $H_4)$, la solution nulle de l'équation* (3.1) *est instable.*

Démonstration. Supposons que la solution nulle de l'équation (3.1) est stable, alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 : \forall\varphi \in B(0, \eta), \forall t \geq 0 \text{ on a } u_t(\varphi) \in B(0, \varepsilon).$$

Puisqu'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $\operatorname{Re}\lambda = \mu > 0$, alors pour tout $\alpha > 0$, il existe $a := a(\alpha) \geq 1$ tel que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C})} \leq ae^{(\mu+\alpha q)t}$ pour tout $t \geq 0$.
On sait par le Lemme 3.1 que si $t \geq r$, alors

$$\begin{aligned}\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq (1 + rle^{rl})\, \|T(t - r)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C})}\\ &\leq (1 + rle^{rl})ae^{(\mu+\alpha q)(t-r)}\\ &\leq ae^{-(\mu+\alpha q)r}(1 + rle^{rl})e^{(\mu+\alpha q)t}\end{aligned}$$

et si $0 \leq t \leq r$, alors

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq (1 + tle^{tl}) \leq (1 + rle^{rl}).$$

Soit $a_1 = \max[ae^{-(\mu+\alpha q)r}(1 + rle^{rl}), 1 + rle^{rl}]$, alors pour tout $t \geq 0$,

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq a_1e^{(\mu+\alpha q)t}.$$

Prenons $0 < \varepsilon < \frac{1}{12}\frac{1}{2^{\frac{q+2}{q-1}}}$, alors on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $\|\varphi\| < \eta$ on ait $\|u_t(\varphi)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.
Soit $\delta > 0$ tel que $\delta\eta < \min(\frac{1}{2^{\frac{q+2}{q-1}}}, \frac{h^{-1}(1)}{2})$ et choisissons un $\omega > 0$ tel que

$$\delta^{q-1}\eta^{q-1}e^{\mu(q-1)\omega} = \frac{1}{2^{q+2}}$$

et associons lui un $\varphi_0 \in D(A)$ comme dans le Lemme 3.3 et prenons $\varphi = \delta\eta\varphi_0$. Considérons maintenant le problème

$$\begin{cases} u'(t) = Lu_t + F(t, u_t), \ t \in [0, \omega] \\ u_0 = \varphi. \end{cases}$$

Par la continuité en zéro de $t \longmapsto \frac{u_t(\varphi)}{h^{-1}(e^{\mu q t})}$, on a pour $\frac{\delta\eta}{h^{-1}(1)}$, il existe $t_0 \in]0, \omega[$ tel que pour tout $t \in [0, t_0]$ on ait

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u_t(\varphi)}{h^{-1}(e^{\mu q t})} \right\| &\leq \left\| \frac{u_t(\varphi)}{h^{-1}(e^{\mu q t})} - \frac{u_0(\varphi)}{h^{-1}(1)} \right\| + \left\| \frac{u_0(\varphi)}{h^{-1}(1)} \right\| \\ &< \frac{\delta\eta}{h^{-1}(1)} + \frac{\delta\eta}{h^{-1}(1)} = \frac{2\delta\eta}{h^{-1}(1)} < 1. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0, t_0]$,

$$\|u_t(\varphi)\| < \frac{2\delta\eta}{h^{-1}(1)} h^{-1}(e^{\mu q t})$$

et par suite

$$\begin{aligned} \|u_{t_0}(\varphi)\| &= \left\| T(t_0)\varphi + \int_0^{t_0} \mathcal{U}_{t_0-s} \otimes F(s, u_s(\varphi))ds \right\| \\ &\geq \|T(t_0)\varphi\| - \left\| \int_0^{t_0} \mathcal{U}_{t_0-s} \otimes F(s, u_s(\varphi))ds \right\| \\ &\geq \delta\eta \, \|T(t_0)\varphi_0\| - \left\| \int_0^{t_0} \mathcal{U}_{t_0-s} \otimes F(s, u_s(\varphi))ds \right\|. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t_0} \mathcal{U}_{t_0-s} \otimes F(s, u_s(\varphi))ds \right\| \\ &= \sup_{\theta \in [-r,0]} \left| \int_0^{t_0} [\mathcal{U}_{t_0-s} \otimes F(s, u_s(\varphi))](\theta)ds \right|_E \\ &= \sup_{\theta \in K := [-r,0] \cap [-t_0,0]} \left| \int_0^{t_0+\theta} \mathcal{U}(t_0 - s + \theta)F(s, u_s(\varphi))ds \right|_E \\ &\leq \sup_{\theta \in K} \int_0^{t_0+\theta} \|\mathcal{U}(t_0 + \theta - s)\|_{\mathcal{L}(E)} \, |F(s, u_s(\varphi))|_E \, ds \\ &\leq \sup_{\theta \in K} \int_0^{t_0+\theta} a_1 e^{(\mu+\alpha q)(t_0-s)} m(s) h[\frac{2\delta\eta}{h^{-1}(1)} h^{-1}(e^{\mu q s})]ds \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2^q a_1 \delta^q \eta^q}{[h^{-1}(1)]^q} e^{(\mu+\alpha q)t_0} \int_0^{t_0} m(s) e^{(\mu q-\mu-\alpha q)s} ds$$
$$\leq \beta 2^q \delta^q \eta^q e^{\mu q t_0}$$

avec $\beta = \frac{a_1 \|m\|_p}{[q(\mu q-\mu-\alpha q)]^{\frac{1}{q}}[h^{-1}(1)]^q}$ qu'on peut supposer ≤ 1 puisque μ est assez grand. Ainsi,

$$\|u_{t_0}(\varphi)\| \geq \delta\eta \|T(t_0)\varphi_0\| - 2^q \delta^q \eta^q e^{\mu q t_0}.$$

En faisant tendre t_0 vers ω et en tenant compte du Lemme 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|u_\omega(\varphi)\| &\geq \delta\eta \|T(\omega)\varphi_0\| - 2^q \delta^q \eta^q e^{\mu q \omega} \\ &\geq \delta\eta e^{\mu\omega} \left(\frac{1}{3} - 2^q \delta^{q-1} \eta^{q-1} e^{\mu(q-1)\omega} \right) \\ &\geq \delta\eta e^{\mu\omega} \left(\frac{1}{3} - \frac{2^q}{2^{q+2}} \right) = \frac{1}{2^{\frac{q+2}{q-1}}} (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2^{\frac{q+2}{q-1}}} \frac{1}{12} > \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui est absurde, donc la solution nulle de l'équation (3.1) est instable. □

4. Application

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité de la solution nulle du problème

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = v(t-r,x) + f(t, v(t-r,x)), & t \geq 0,\ x \in [0,\pi] \\ v(\theta,x) = \varphi(\theta)(x), & \theta \in [-r,0], x \in [0,\pi], \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$|f(t,x)| \leq m(t) h(|x|),$$

où $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue croissante avec $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{h(s)} = +\infty$ et $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$une fonction localement intégrable, par exemple on peut prendre $m(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $h(s) = s^q e^s$ avec $q > 1$ ou $h(s) = e^s - s - 1$(avec $q = 2$).

Posons $E = C([0,\pi];\mathbb{R})$, $v(t,x) = u(t)(x)$ pour tous $t \in [-r, +\infty[, x \in [0,\pi]$. Soient $L : \mathcal{C} \to E$ l'opérateur défini par

$$L\psi = \psi(-r)$$

et $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to E$, la fonction définie par

$$F(t,\psi)(x) = f(t, \psi(-r)(x)).$$

Alors le problème (E) est équivalent au problème

$$\mathcal{P}(\varphi) \begin{cases} u'(t) = Lu_t + F(t,u_t),\ t \geq 0 \\ u_0 = \varphi, & \varphi \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que L est un opérateur linéaire continu et que

$$u(t) = \begin{cases} e^{\lambda t}\psi(0),\ t \geq 0 \\ \psi(t),\ t \in [-r,0], \end{cases}$$

avec $0 < \lambda < 1$ tel que $\lambda = e^{-\lambda r}$, est solution du problème homogène

$$\begin{cases} u'(t) = Lu_t, \ t \geq 0 \\ u_0 = \psi, \quad \ \psi \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

de plus

$$\|T(t)\|_{\pounds(\mathcal{C})} \leq e^{\lambda t}.$$

Et donc pour tous $t \geq s \geq 0$

$$\|T(t-s)\|_{\pounds(\mathcal{C})} \leq e^{\lambda(t-s)} = e^{\lambda t} e^{-\lambda s} =: g_1(t) g_2(s).$$

Si nous supposons que la fonction F est complètement continue et si nous prenons par exemple $m(t) = \frac{1}{1+t^2}, h(s) = s^q e^s$ avec $q > 1$, alors

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t m(s) g_1(s) h(g_2(s)) ds \leq e \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{ds}{1+s^2} = \frac{e\pi}{2}$$

et donc les hypothèses (H_1)-(H_3) sont vérifiées. Ce qui donne que la solution nulle de (E) est asymptotiquement stable.

References

[1] O. Arino and E. Sanchez, A variation of constants formula for an abstract functional differential equation of retarded type, *J. Diff. and Integral Equations* **9** (6) (1996), 1305–1320.

[2] T. A. Burton and L. Hatvani, Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals, *Tohoko Math J.* **41** (1989), 65–104.

[3] T. A. Burton and G. Makay, Asymptotic stability for functional differential equations, *Acta Math. Hungar.* **65** (3) (1994), 243–251.

[4] Y. X. Dao, Uniform asymptotic stability in terms of two measures for functional differential equations, *Nonlinear Anal. Theory Methods and Applications* **25** (9-10) (1995), 959–974.

[5] J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1977.

[6] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[7] A. Sghir, Solutions d'une équation différentielle fonctionnelle semi-linéaire à retard infini dans un espace de Banach, *Acta Math. Vietnam.* **24** (2) (1999), 129–145.

[8] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications IV*, Springer-Verlag, 1987.

Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques BP: 2390
Marrakech 40000, Maroc

E-mail address: sghir_a@yahoo.fr