ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 24, Number 2, 1999, pp. 129–145

SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FONCTIONNELLE SEMI-LINÉAIRE À RETARD INFINI DANS UN ESPACE DE BANACH

SGHIR ABDELHAQ

Abstract. This paper is concerned with the existence of solutions to the initial value problem for a semilinear functional differential equation with infinite delay in a Banach space:

$$\begin{cases} x'(t)=Lx_t+f(t,x_t), & t\in[0,a]\ (a>0) \\ x(t)=\varphi(t) & t\in\ ]-\infty,0]. \end{cases}$$

The result is based on the Leray-Schauder alternative and a priori bounds on solutions.

1. Introduction

Soit E un espace de Banach réel de norme notée $|.|_E$ et soit $\mathcal{B} := \mathcal{B}^E$ l'espace de phases satisfaisant les axiomes fondamentales introduites par Hale et Kato [5]. Si $x:\ \mathbb{R} \to E$, alors pour tout $t \in\ \mathbb{R}^+$, nous définissons une application $x_t:\ \mathbb{R}^- \to E$ par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$.

Dans ce papier, nous étudions dans la première partie une méthode similaire à celle d'Arino-Sanchez [1] pour l'existence d'une formule de la variation de la constante pour le problème de Cauchy non homogène associé à l'équation différentielle fonctionnelle à retard infini

$$x^{'}(t) = Lx_t + h(t), \quad t \geq 0$$

où $L:\mathcal{B} \to E$ est un opérateur linéaire continu et $h:\ \mathbb{R}^+ \to E$ une fonction continue.

Dans la seconde partie et par utilisation de la formule de la variation de la constante trouvée, nous étudions l'existence des solutions du problème semi-linéaire

Received May 5, 1997; in revised form September 29, 1997.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 34 K30.
Keywords and phrases. Equation différentielle fonctionnelle semi-linéaire à retard infini; formule de la variation de la constante.

$$P(\varphi)\begin{cases} x'(t) & = Lx_t + f(t,x_t), \quad t \in I := [0,a] \\ x_0 & = \varphi, \end{cases}$$

où $(a,\varphi) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathcal{B}$ sont donnés et $f : I \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction complètement continue vérifiant une certaine propriété de bornage.

Les équations différentielles (fonctionnelles) sont étudiées par plusieurs auteurs, par exemple Deimling [2], Iwamiya [7], Martin [8], Pazy [9], Schumacher [10], Shin [11] et Travis et Webb [12].

2. Préliminaires

Désignons par $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^-; E)$, l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^-$ à valeurs dans E muni d'une semi-norme notée $|.|_{\mathcal{B}}$, et

$\mathcal{E}[a] = \{x :]-\infty, a] \to E | x_0 \in \mathcal{B}$ et $x|_I$ est continue$\}$ pour $a > 0$,

$\mathcal{E} = \{x : \mathbb{R} \to E | x_0 \in \mathcal{B}$ et $x|_{\mathbb{R}^+}$ est continue $\}$.

Dans la suite de ce travail, nous supposons que l'espace de phases $\mathcal{B}$ satisfait les axiomes suivants:

A) $\mathcal{B}$ est un espace complet.

B_1) Si $x \in \mathcal{E}[a]$ (rep. $\mathcal{E}$), alors $x_t \in \mathcal{B}$ et la fonction $t \longmapsto x_t$ est continue pour tout $t \in I$ (resp. $t \in \mathbb{R}^+$).

B_2) Il existe une constante $l^{'} > 0$ et deux fonctions $K, M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que:

- K est continue sur $\mathbb{R}^+$;
- M est localement bornée;
- pour toute fonction $x \in \mathcal{E}[a]$ (resp. $\mathcal{E}$) et tout $t \in I$ (resp. $t \in \mathbb{R}^+$),

$$\frac{1}{l'}|x(t)|_E \leq |x_t|_{\mathcal{B}} \leq K(t) \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)|_E + M(t)|x_0|_{\mathcal{B}}.$$

C) Si (φ_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}$ et si $\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta \in K} |\varphi_n(\theta) - \varphi(\theta)|_E = 0$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^-$, alors $\varphi \in \mathcal{B}$ et $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n - \varphi|_{\mathcal{B}} = 0$.

Nous notons par,

$$K_a = \sup_{t \in I} K(t) \quad \text{et} \quad M_a = \sup_{t \in I} M(t).$$

Donnons maintenant quelques espaces de phases $\mathcal{B}$ qui vérifient les axiomes précédents voir par exemple [5], [6].

Example 2.1. Posons

$$
\begin{aligned}
BC &= \{\varphi \in C(\,]-\infty,0];E) : |\varphi(\theta)|_E \ \text{ est bornée sur }]-\infty,0]\} \\
BU &= \{\varphi \in BC : \varphi \text{ est uniformément continue sur }]-\infty,0]\} \\
C^{\infty} &= \{\varphi \in BC : \lim_{\theta\to-\infty}\varphi(\theta) \text{ existe dans } E\} \\
C^{\circ} &= \{\varphi \in BC : \lim_{\theta\to-\infty}\varphi(\theta) = 0\},
\end{aligned}
$$

et soit $|\varphi|_{\mathcal{B}} = \sup\limits_{\theta\le 0}|\varphi(\theta)|_E$; alors les trois sous-espaces BU, C^{∞} et C° vérifient les axiomes précédents, par contre BC ne vérifie pas B_1) avec $K(t) = M(t) = l^{'} = 1$.

Example 2.2. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, posons

$$
C_{\gamma} = \{\varphi \in C(]-\infty,0];E) : \lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\varphi(\theta) \ \text{ existe dans } \ E\}
$$

et $|\varphi|_{\gamma} = \sup\limits_{\theta\le 0} e^{\gamma\theta}|\varphi(\theta)|_E$; alors C_{γ} vérifie les axiomes précédents avec

$$
K(t) = \sup_{-t\le\theta\le 0} e^{\gamma\theta} = \max(1, e^{-\gamma t}), \quad M(t) = e^{-\gamma t} \quad \text{et} \quad l^{'} = 1.
$$

Example 2.3. Soit $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, posons

$$
\mathcal{L}_{\gamma} = \Big\{\varphi :\ \mathbb{R}^{-} \to E : \varphi \quad \text{est mesurable sur } \ ]-\infty,-r], \\
\text{continue sur } \ [-r,0] \ \text{ et } \ |\varphi|_{\mathcal{L}_{\gamma}} < +\infty\Big\},
$$

où $0 \le r < \infty$ et $|\varphi|_{\mathcal{L}_{\gamma}} = \sup\limits_{-r\le\theta\le 0}|\varphi(\theta)|_E + \int\limits_{-\infty}^{-r} e^{\gamma\theta}|\varphi(\theta)|_E d\theta$; alors $\mathcal{L}_{\gamma}$ vérifie les axiomes précédents avec $l^{'} = 1$,

$$
K(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t \le r, \\ 1 + \displaystyle\int_{-t}^{-r} e^{\gamma\theta} d\theta & \text{si} \quad t > r, \end{cases}
$$

$$M(t)=\begin{cases}\max\Big(1+\displaystyle\int_{-r-t}^{-r} e^{\gamma\theta}d\theta, e^{-\gamma t}\Big) & \text{si} \quad 0\le t\le r,\\ \max\Big(\displaystyle\int_{-r-t}^{-t} e^{\gamma\theta}d\theta, e^{-\gamma t}\Big) & \text{si} \quad t>r.\end{cases}$$

Enfin, rappelons que le problème de Cauchy homogène

$$(H) \quad \begin{cases} x^{'}(t)=Lx_t & t\ge 0,\\ x_0=\varphi & \varphi\in\mathcal{B},\end{cases}$$

où $L:\mathcal{B}\to E$ est un opérateur linéaire continu, admet une unique solution $x(\varphi)\in\mathcal{E}\cap C^1(\mathbb{R}^+;E)$ et que pour tout $t\ge 0$, l'opérateur $T(t):\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ défini par $T(t)\varphi=x_t(\varphi)$ est un semi-groupe linéaire de classe (C_0) et satisfaisant la propriété de translation:

$$\Big(T(t)\varphi\Big)(\theta)=\begin{cases}\varphi(t+\theta) & \text{si} \quad t+\theta\le 0,\\ \Big(T(t+\theta)\varphi\Big)(0) & \text{si} \quad t+\theta\ge 0,\end{cases}$$

pour $t\in\mathbb{R}^+$, $\theta\in\mathbb{R}^-$ et $\varphi\in\mathcal{B}$.

Son générateur infinitésimal A est défini par

$$A\varphi=\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)\varphi-\varphi}{h} \text{ (quand cette limite existe dans } \mathcal{B}).$$

De plus, pour chaque $\varphi\in\mathcal{B}$, la solution du problème (H) est donnée par

$$x(\varphi)(t)=\begin{cases}\varphi(t) & \text{si} \quad t\le 0,\\ \Big(T(t)\varphi\Big)(0) & \text{si} \quad t\ge 0.\end{cases}$$

Nous pouvons expliciter $D(A)$ (domaine de A) et $A\varphi$ dans des cas particuliers de $\mathcal{B}$ (voir par exemple [6]).

3. Formule de variation de constante

Considérons le problème de Cauchy non homogène

$$(N.H) \quad \begin{cases} x^{'}(t)=Lx_t+h(t) & t\ge 0,\\ x_0=\varphi & \varphi\in\mathcal{B},\end{cases}$$

où $h \in C([0, \infty[; E)$.

Théorème 3.1. *Le problème (N.H) admet une unique solution* $x \in \mathcal{E} \cap C^1(\mathbb{R}^+, E)$.

Démonstration. Il est clair que x est solution du problème (N.H) si, et seulement si la restriction de x à tout intervale $]-\infty, a]$ (où $a > 0$) vérifie l'équation intégrale:

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(0) + \int_0^t L x_s ds + \int_0^t h(s) ds, & \text{si} \quad t \in I, \\ \varphi(t) & \text{si} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Pour tout $a > 0$, considérons le fermé

$$C_\varphi = \{y \in C([0, a]; E); y(0) = \varphi(0)\}$$

et pour $y \in C_\varphi$, définissons la fonction $\tilde{y}$ par

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si} \quad t \leq 0, \\ y(t) & \text{si} \quad t \in I, \end{cases}$$

alors $\tilde{y} \in \mathcal{E}[a]$ et d'après l'axiome B_1), $\tilde{y}_t \in \mathcal{B}$ et $t \longmapsto \tilde{y}_t$ est continue sur I.

Nous choisissons une constante négative γ convenable et nous munissons l'espace de Banach $C(I; E)$ de la norme (équivalente à la norme sup.)

$$\|y\|_\gamma := \sup_{t \in I} |y(t)|_E e^{\gamma t}, \text{ pour tout } \ y \in C(I; E).$$

Considérons maintenant l'opérateur τ défini sur C_φ par,

$$\tau_y(t) = \varphi(0) + \int_0^t L\tilde{y}_s ds + \int_0^t h(s) ds, \ \text{ pour tout } t \in I.$$

Il est clair que $\tau_y \in C_\varphi$ si $y \in C_\varphi$. Pour tous $y, z \in C_\varphi$ et tout $t \in I$

$$|\tau_y(t) - \tau_z(t)|_E \leq l \int_0^t |\tilde{y}_s - \tilde{z}_s|_{\mathcal{B}} ds \ \text{ où } \ l := \|L\|,$$

puisque $\tilde{y}(\theta) - \tilde{z}(\theta) = 0$ si $\theta \leq 0$ nous avons

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_t - \tilde{z}_t|_{\mathcal{B}} = |(\tilde{y} - \tilde{z})_t|_{\mathcal{B}} &\leq K(t) \sup_{0\leq s\leq t} |(\tilde{y} - \tilde{z})(s)|_E \\ &\leq K(t) \sup_{0\leq s\leq t} |(y - z)(s)|_E e^{\gamma t}.e^{-\gamma t} \\ &\leq e^{-\gamma t}.K(t).\|y - z\|_\gamma; \end{aligned}$$

ceci implique

$$\begin{aligned} |\tau_y(t) - \tau_z(t)|_E &\leq l\|y - z\|_\gamma. \int_0^t e^{-\gamma s}.K(s)ds \\ &\leq \frac{-lK_a}{\gamma}\|y - z\|_\gamma.e^{-\gamma t}; \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\tau_y - \tau_z\|_\gamma \leq \frac{-lK_a}{\gamma}\|y - z\|_\gamma;$$

nous choisissons alors γ tel que $\dfrac{-lK_a}{\gamma} < 1$.

Soit y l'unique point fixé de τ sur C_φ, il est clair que la fonction $x :]-\infty, a] \to E$ définie par

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si} \quad t \leq 0, \\ y(t) & \text{si} \quad t \in I \end{cases}$$

est l'unique solution de l'équation intégrale

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(0) + \displaystyle\int_0^t Lx_s ds + \int_0^t h(s)ds & \text{si} \quad t \in I, \\ \varphi(t) & \text{si} \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Définissons,

$$\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\varphi} : \mathbb{R}^- \to \mathcal{L}(E) : \forall b \in E, \hat{\varphi} \otimes b \in \mathcal{B} \text{ et } \sup_{|b|_E \leq 1} |\hat{\varphi} \otimes b|_{\mathcal{B}} < +\infty\},$$

où $\hat{\varphi} \otimes b$ est défini par $(\hat{\varphi} \otimes b)(\theta) = \hat{\varphi}(\theta)(b)$.

Munissons $\overset{\wedge}{\mathcal{B}}$ de la semi-norme suivante

$$|\overset{\wedge}{\varphi}|_{\overset{\wedge}{\mathcal{B}}} = \sup_{|b|_E \leq 1} |\overset{\wedge}{\varphi} \otimes b|_{\mathcal{B}}.$$

Considérons maintenant l'opérateur linéaire continu, $\tilde{L} : \overset{\wedge}{\mathcal{B}} \to \mathcal{L}(E)$ défini par

$$(\tilde{L}\, \overset{\wedge}{\varphi})(b) = L(\overset{\wedge}{\varphi} \otimes b).$$

Definition 3.1 (voir [1]). La solution fondamentale du problème (N.H) est la famille d'opérateurs $(\mathcal{U}(t))_{t \geq 0}$, $\mathcal{U}(t) : E \to E$, définis par:

$$\mathcal{U}(t)e = (x^e)'(t), \quad t \geq 0,$$

où x^e est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} x'(t) = Lx_t + e; & t \geq 0, \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Lemme 3.1. *Pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{U}(t) \in \mathcal{L}(E)$.*

Démonstration. La linéarité de $\mathcal{U}(t)$ résulte de la linéarité de L et de l'unicité de la solution.

La continuité de $\mathcal{U}(t)$, pour $e \in E$ et $t \geq 0$,

$$|x^e(t)|_E \leq l \int_0^t |x_s^e|_{\mathcal{B}} ds + t|e|_E.$$

donc par l'axiome B_2)

$$\begin{aligned} |x_t^e|_{\mathcal{B}} \leq\ & K(t) \sup_{0 \leq s \leq t} |x^e(s)|_E + M(t)|x_0^e|_{\mathcal{B}} \\ \leq\ & K(t) \sup_{0 \leq s \leq t} [l \int_0^s |x_\nu^e|_{\mathcal{B}} d\nu + s|e|_E] \\ \leq\ & K(t)[l \int_0^t |x_s^e|_{\mathcal{B}} ds + t|e|_E] \\ \leq\ & tK(t)|e|_E + lK(t) \int_0^t |x_s^e|_{\mathcal{B}} ds. \end{aligned}$$

et par l'inégalité de Gronwall [4],

$$|x_t^e|_{\mathcal{B}} \leq tK(t)|e|_E + lK(t)\int_0^t sK(s)|e|_E.e^{lK(t)(t-s)}ds.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|\mathcal{U}(t)e|_E \leq &\ l|x_t^e|_{\mathcal{B}} + |e|_E \\ \leq &\ H(t)|e|_E,\end{aligned}$$

où $H(t) = 1 + l(tK(t) + lK(t).\int_0^t sK(s)e^{lK(t)(t-s)}ds)$.

Soit $(\nu(t))_{t\geq 0}$, la famille d'opérateurs linéaires définis par $\nu(t) : E \to E$, $\nu(t)e = x^e(t)$; nous avons

$$\begin{aligned}|\nu(t)e|_E = &\ \Big|\int_0^t (x^e)'(s)\ ds\Big|_E \\ = &\ \Big|\int_0^t \mathcal{U}(s)e\ ds\Big|_E \\ \leq &\ |e|_E \cdot \int_0^t H(s)\ ds,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\nu(t) \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $t \geq 0$.

Puisque $\nu(0) = 0$, il est naturel de prolonger ν par zéro sur $]-\infty, 0[$.

Pour tout $t \geq 0$ soit $\nu_t :\ \mathbb{R}^- \to \mathcal{L}(E)$ défini par $\nu_t(\theta) = \nu(t+\theta)$, alors $\nu_t \in \overset{\wedge}{\mathcal{B}}$ car pour tout $e \in E$ et tout $\theta \in\ \mathbb{R}^-$

$$\begin{aligned}(\nu_t \otimes e)(\theta) = \nu_t(\theta)(e) = &\ \nu(t+\theta)(e) \\ = &\ \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t+\theta \leq 0, \\ x^e(t+\theta) & \text{si} \quad t+\theta \geq 0 \end{cases} \\ = &\ x_t^e(\theta).\end{aligned}$$

Ce qui donne $\nu_t \otimes e = x_t^e \in \mathcal{B}$ (d'après l'axiome B_1) puisque $x^e \in \mathcal{E}$ et

$$\sup_{|e|_E \leq 1} |\nu_t \otimes e|_{\mathcal{B}} = \sup_{|e|_E \leq 1} |x_t^e|_{\mathcal{B}} < +\infty. \qquad \square$$

Proposition 3.1 (voir [1]). *La fonction* $t \longmapsto \nu(t)$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathcal{L}(E)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et continûment différentiable sur* $\mathbb{R}^+$.

A partir de cette proposition Arino-Sanchez [1] ont démontré que la fonction $t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathcal{U}(t) \in \mathcal{L}(E)$ est continue, nous la prolongeons par zéro sur $]-\infty, 0[$ sa continuité n'est pas conservée puisque $\mathcal{U}(0) = I$, mais nous pouvons définir la fonction $\mathcal{U}_t$ sur $\mathbb{R}^-$ par:

$$\mathcal{U}_t(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t+\theta < 0, \\ \mathcal{U}(t+\theta) & \text{si} \quad t+\theta \geq 0, \end{cases}$$

pour $t \geq 0$ et $\theta \leq 0$; mais rien nous assure que $\mathcal{U}_t \in \overset{\wedge}{\mathcal{B}}$.

Nous conclusons voir [1] que la solution x du problème (N.H) s'écrit sous la forme:

$$x(t) = \big(T(t)\varphi\big)(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)(h(s))ds; \quad t \geq 0,$$

$$\text{et} \quad x_t = T(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{U}_{t-s} \otimes h(s)ds \; ; \; t \geq 0.$$

4. Problème semi-linéaire

Considérons le problème semi-linéaire suivant

$$\mathcal{P}(\varphi) \quad \begin{cases} x'(t) = Lx_t + f(t, x_t) \; ; t \in [0, a] = I, \\ x_0 = \varphi, \end{cases}$$

où $(a, \varphi) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathcal{B}$, L et f vérifient les hypothèses suivantes:

H_1) $L : \mathcal{B} \to E$ est linéaire continu,

H_2) $f : I \times \mathcal{B} \to E$ est complétement continu.

Définition 4.1. Une fonction $x \in \mathcal{E}[a]$ est dite solution du problème $\mathcal{P}(\varphi)$ si pour tout $t \in I$

$$x(t) = \big(T(t)\varphi\big)(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)(f(s, x_s))ds$$

$$x_0 = \varphi$$

Théorème 4.1. *Si H_1) et H_2) sont vérifiées et s'il existe $k > 0$ tel que* $\sup\limits_{0\leq t\leq a} |x(t)|_E \leq k$, *pour chaque solution x du problème*

$$P_\lambda(\varphi) \quad \begin{cases} x^{'}(t) = Lx_t + \lambda f(t, x_t) \;\; t \in I, \\ x_0 = \varphi, \end{cases}$$

où $\lambda \in (0, 1)$. Alors le problème $P(\varphi)$ admet au moins une solution.

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant:

Lemme 4.1 (voir [3 p. 61]). *Soit C un convexe d'un espace normé tel que $0 \in C$. Soit $\tau : C \to C$ un opérateur complètement continu et soit $\xi(\tau) = \{y \in C : y = \lambda\tau y$ pour $0 < \lambda < 1\}$. Alors ou bien $\xi(\tau)$ est non borné ou bien τ admet un point fixé.*

Démonstration. Notons

$$\mathcal{E}^\varphi[a] = \{x :]-\infty, a] \to E : x_0 = \varphi \text{ et } x_{|_I} \text{ est continue } \},$$

$$C_0 = \{y \in C(I; E) : y(0) = 0\}.$$

Pour tout $y \in C_0$, considérons la fonction $\tilde{y} \in \mathcal{E}[a]$ définie par

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0, \\ y(t) & \text{si} \quad t \in I. \end{cases}$$

Posons

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si} \quad t \leq 0, \\ (T(t)\varphi)(0) & \text{si} \quad t \in I. \end{cases}$$

D'après l'axiome B_1) $\tilde{\varphi}_t, \tilde{y}_t \in \mathcal{B}$ et $t \longmapsto \tilde{\varphi}_t$ ou $\tilde{y}_t$ est continue sur I.

Il est clair que $x \in \mathcal{E}^\varphi[a]$ est solution du problème $P(\varphi)$ si, et seulement si $\tilde{y} = x - \tilde{\varphi}$ où y est solution de l'equation intégrale,

$$y(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\big(f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)\big)ds \;\; \text{pour } t \in I.$$

Considérons l'opérateur τ défini sur C_0 par

$$\tau_y(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\big(f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)\big)ds \;\; \text{pour } t \in I.$$

Nous avons prouver les propriétés de τ comme suit. Tout d'abord, $\tau_y \in C_0$ si $y \in C_0$; $\xi(\tau)$ est borné :

Soit $y \in \xi(\tau)$, posons $x = \tilde{y} + \tilde{\varphi}$ alors x est solution du problème $P_\lambda(\varphi)$ et d'après l'hypothèse nous obtenons pour tout $t \in I$

$$|y(t)|_E = \ |x(t) - (T(t)\varphi)(0)|_E \leq \ k + l^{'} \sup_{t \in I} \|T(t)\|.|\varphi|_{\mathcal{B}} < \ +\infty.$$

En suite τ est complétement continu. En effet, d'arbord τ est continu par les raisons suivantes.

Soit (y^n) une suite de C_0 qui converge vers un certain y dans $C(I;E)$ alors

$$\exists c > 0 : \forall n \in \ \mathbb{N} \ \|y^n\|_0 := \sup_{t \in I} |y^n(t)|_E < c,$$

de plus $\tilde{y}^n$ et $\tilde{y} \in \mathcal{E}[a]$ et donc $\tilde{y}^n_t$ et $\tilde{y}_t \in \mathcal{B}$ et pour chaque $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{y}^n_t - \tilde{y}_t|_{\mathcal{B}} \leq & \ K(t) \sup_{0 \leq s \leq t} \ |\tilde{y}^n(s) - \tilde{y}(s)|_E + M(t) |\tilde{y}^n_0 - \tilde{y}_0|_{\mathcal{B}} \\ \leq & \ K(t) \ \|y^n - y\|_0, \end{aligned}$$

ce qui donne que $\tilde{y}^n_t$ converge vers $\tilde{y}_t$ dans $\mathcal{B}$ et

$$\begin{aligned} |\tilde{y}^n_t + \tilde{\varphi}_t|_{\mathcal{B}} \leq & \ K(t) \ \|y^n\|_0 + K(t) \sup_{0 \leq s \leq t} \ |(T(s)\varphi)(0)|_E + M(t) \ |\varphi|_{\mathcal{B}} \\ \leq & \ K_a(c + \sup_{s \in I} \ |(T(s)\varphi)(0)|_E) + M_a \ |\varphi|_{\mathcal{B}}; \end{aligned}$$

en raison de la continuité de f, on a pour chaque $s \in I$, $f(s, \tilde{y}^n_s + \tilde{\varphi}_s)$ converge dans E vers $f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)$ et pour tout $n \in \ \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\tau y^n - \tau y\|_0 \leq & \ \sup_{t \in I} \int_0^t \|\mathcal{U}(t-s)\| \ |f(s, \tilde{y}^n_s + \tilde{\varphi}_s) - f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)|_E \ ds \\ \leq & \ N \int_0^a |f(s, \tilde{y}^n_s + \tilde{\varphi}_s) - f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)|_E \ ds \end{aligned}$$

où $N = \sup_{t \in I} \|\mathcal{U}(t)\|$; comme f est complètement continue alors il existe un compact K de $E : \forall s \in I, \forall n \in \ \mathbb{N} \ \ f(s, \tilde{y}^n_s + \tilde{\varphi}_s) \in K$,
et par la convergence dominée de Lebesgue nous concluons que (τy^n) converge vers τy dans $C(I;E)$.

Nous montrons maintenant que, τ est compact:

Soit B un borné de $C(I;E)$, nous allons montré que τB est relativement compact.

On remarque τ est equicontinu. En effet, pour $0 \leq t_0 < t \leq a$ et $y \in B$, nous avons

$$\begin{aligned} |\tau y(t) - \tau y(t_0)|_E \leq & \int_0^{t_0} \|\mathcal{U}(t-s) - \mathcal{U}(t_0 - s)\| \, |f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)|_E \, ds \\ & + \int_{t_0}^{t} \|\mathcal{U}(t-s)\| \, |f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)|_E \, ds \end{aligned}$$

or

$$\int_{t_0}^{t} \|\mathcal{U}(t-s)\| \, |f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)|_E \, ds \leq N.H|t - t_0|,$$

où $H = \max\{|f(t,\psi)|_E : t \in I \text{ et } \|\psi\| \leq \rho\}$
avec $\rho = K_a(\|y\|_0 + \sup_{t\in I}|(T(t)\varphi)(0)|_E) + M_a.\|\varphi\|_{\mathcal{B}}$,

$$\int_0^{t_0} \|\mathcal{U}(t-s) - \mathcal{U}(t_0 - s)\| \, |f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)|_E \, ds \leq H \int_0^{t_0} \|\mathcal{U}(t-s) - \mathcal{U}(t_0 - s)\| \, ds$$

Puisque pour $t \in I$

$$\begin{aligned} |x_t^e|_{\mathcal{B}} \leq & \; tK(t)|e|_E + lK(t) \int_0^t sK(s)|e|_E e^{lK(t)(t-s)} \, ds \\ \leq & \; tK_a|e|_E \Big[1 + \int_0^t lK(t) e^{lK(t)(t-s)} \, ds\Big] \\ \leq & \; tK_a|e|_E e^{ltK(t)} \\ \leq & \; tK_a.e^{a.lK_a}.|e|_E \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|x^e(t) - x^e(t_0)|_E = & \ |\int_0^t Lx_s^e \, ds - \int_0^{t_0} Lx_s^e \, ds + e(t-t_0)|_E \\
\leq & \ |t-t_0||e|_E + \int_{t_0}^t l|x_s^e|_{\mathcal{B}} \, ds \\
\leq & \ K_1|t-t_0| \ |e|_E,
\end{aligned}$$

où $K_1 = 1 + al.K_a e^{alK_a}$.

On a donc,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}(t-s) - \mathcal{U}(t_0-s)\| := & \sup_{|e|_E \leq 1} |\mathcal{U}(t-s)e - \mathcal{U}(t_0-s)e|_E \\
= & \sup_{|e|_E \leq 1} |Lx_{t-s}^e - Lx_{t_0-s}^e|_E \\
\leq & \ l \sup_{|e|_E \leq 1} |x_{t-s}^e - x_{t_0-s}^e|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
|x_{t-s}^e - x_{t_0-s}^e|_{\mathcal{B}} \leq & \ K(t_0-s) \sup_{0 \leq \nu \leq t_0-s} |x^e(\nu + t - t_0) - x^e(\nu)|_E \\
& + M(t_0-s) \ |x_{t-t_0}^e - x_0^e|_{\mathcal{B}} \\
\leq & \ K_a \sup_{0 \leq \nu \leq t_0-s} |x^e(\nu + t - t_0) - x^e(\nu)|_E + M_a|x_{t-t_0}^e|_{\mathcal{B}} \\
\leq & \ K_a.K_1|t-t_0| \ |e|_E + M_a|t-t_0|K_a e^{alK_a}.|e|_E \\
\leq & \ \text{const} \ .|t-t_0| \ |e|_E,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_0^{t_0} \|\mathcal{U}(t-s) - \mathcal{U}(t_0-s)\| \, ds \leq \ \text{const}.|t-t_0|,$$

ainsi

$$|\tau y(t) - \tau y(t_0)|_E \leq const.|t-t_0|.$$

On prouve maintenant que $\{\tau y(t) : y \in B\}$ est relativement compact pour chaque $t \in I$. En effet, puisque f est complètement continue et que pour $s \in [0,t]$, $\mathcal{U}(t-s) : E \to E$ est continue, alors

$$\mathcal{K} = \{\mathcal{U}(t-s)(f(s, \tilde{y}_s + \tilde{\varphi}_s)) : s \in [0,t] \text{ et } y \in B\}$$

est relativement compact, donc $\mathcal{K}_1 = \overline{co}\mathcal{K}$ est un compact de E, voir [8] et $\mathcal{K}_2 = \{tx : (t,x) \in I \times \mathcal{K}_1\}$ est compact, ainsi $\{\tau y(t) : y \in B\} \subset t\overline{co}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_2$ est relativement compact.

Ce qui donne que τ admet un point fixe y et parsuite $x = \tilde{y} + \tilde{\varphi}$ est solution du problème $P(\varphi)$. Donnons maintenant quelques conditions sur f pour avoir le bornage d'une solution du problème $P_\lambda(\varphi)$, pour celà faisons l'hypothèse suivante:

$H_3)$ $|f(t,\varphi)|_E \leq w(t, |\varphi|_{\mathcal{B}})$ pour tout $(t,\varphi) \in I \times \mathcal{B}$ où $w : I \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et que $w(t,.)$ est croissante pour tout $t \in I$ fixé.

Soit x une solution du problème $P_\lambda(\varphi)$ alors pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
|x(t)|_E \leq\ & |\big(T(t)\varphi\big)(0)|_E + \lambda \int_0^t \|\mathcal{U}(t-s)\|.|f(s,x_s)|_E ds \\
\leq\ & l^{'} |T(t)\varphi|_{\mathcal{B}} + \int_0^t \|\mathcal{U}(t-s)\|.|f(s,x_s)|_E ds \\
\leq\ & l^{'} M |\varphi|_{\mathcal{B}} + N. \int_0^t w(s, |x_s|_{\mathcal{B}}) ds,
\end{aligned}$$

où $M = \sup_{t \in I} \|T(t)\|$ et $N = \sup_{t\in I} \|\mathcal{U}(t)\|$.

Pour tout $t \in I$, posons

$$z(t) = \sup\{|x_s|_{\mathcal{B}} : o \leq s \leq t\},$$

alors il existe $\bar{t} \in [0,t]$ tel que $z(t) = |x_{\bar{t}}|_{\mathcal{B}}$ et par utilisation de l'axiome $B_2)$

$$\begin{aligned}
z(t) = |x_{\bar{t}}|_{\mathcal{B}} \leq\ & K(\bar{t}) \sup_{0 \leq s \leq \bar{t}} |x(s)|_E + M(\bar{t})|\varphi|_{\mathcal{B}} \\
\leq & K_a \sup_{0 \leq s \leq \bar{t}} [l^{'} M |\varphi|_{\mathcal{B}} + N \int_0^s w(\nu, |x_\nu|_{\mathcal{B}}) ds] + M_a.|\varphi|_{\mathcal{B}} \\
\leq\ & (l^{'} M K_a + M_a)|\varphi|_{\mathcal{B}} + N K_a \int_0^t w(s, |x_s|_{\mathcal{B}}) ds \\
\leq\ & (l^{'} M K_a + M_a)|\varphi|_{\mathcal{B}} + N K_a \int_0^t w(s, z(s)) ds \quad . \qquad (1)
\end{aligned}$$

i) Si $w(t,u) = m(t).u$ où $m : I \to \mathbb{R}^+$ est continue alors pour tout $t \in I$

$$z(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t m(s)z(s)ds,$$

où $c_1 = (l^{'}MK_a + M_a)|\varphi|_{\mathcal{B}}$ et $c_2 = NK_a$ et par l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$z(t) \leq c_1 \exp\Big(c_2 \int_0^t m(s)ds\Big) < +\infty.$$

Ce qui donne, $\exists\, c > 0 : \forall t \in I \ z(t) \leq c$ et par l'axiome $B_2)$

$$|x(t)|_E \leq l^{'}|x_t|_{\mathcal{B}} \leq l^{'}c.$$

ainsi $\sup\limits_{t\in I}|x(t)|_E \leq l^{'}c.$

ii) Si $w(t,u) = m(t).g(u)$ où $g : \mathbb{R}^+ \to]0,\infty[$ est continue, croissante et $\int\limits_{c_1}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} = \infty$ alors par utilisation de l'inégalité (1) nous obtenons pour tout $t \in I$,

$$z(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t m(s)g(z(s))ds\,. \tag{2}$$

Désignons par $u(t)$ le membre de droite de (2) alors pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} z(t) \leq&\ u(t), \\ u^{'}(t) =&\ c_2 m(t) g(z(t)) \\ \leq&\ c_2 m(t) g(u(t)), \end{aligned}$$

donc $\dfrac{u^{'}(t)}{g(u(t))} \leq c_2 m(t)$, et par intégration

$$\int_0^t \frac{u^{'}(s)}{g(u(s))}ds = \int_{c_1}^{u(t)} \frac{ds}{g(s)} \leq c_2 \int_0^t m(s)ds < +\infty.$$

Cette inégalité et l'hypothèse faite sur g impliquent qu'il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $t \in I$ $u(t) \leq c$, donc $z(t) \leq c$ et comme précédemment $\sup\limits_{t\in I}|x(t)|_E \leq l^{'}c$.

iii) Si l'équation ordinaire réelle

$$\begin{cases} r^{'}(t) = c_2 w(t, r(t)),\ t \in I \\ r(0) = c_1, \end{cases}$$

admet une solution maximale bornée $r_{\max}$ sur I, alors pour tout $t \in I$, $z(t) \leq r_{max}(t)$ qui est borné et donc $\sup\limits_{t\in I}|x(t)|_E$ l'est aussi.

Exemple. Prenons $w(t,u) = m(t)u + g(t)u^p$, $0 \leq p \leq 1$, $m, g :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues.

• Si $p = 0$, alors $w(t,u) = m(t)u + g(t)$ et l'équation ordinaire s'écrit:

$$\begin{cases} r^{'}(t) = m_1(t)r(t) + g_1(t), t \in I, \\ r(0) = c_1 \end{cases}$$

où $m_1(t) = c_2 m(t)$ et $g_1(t) = c_2 g(t)$.

La solution de cette équation est donnée par

$$\begin{aligned} r(t) = & \Big(c_1 + \int_0^t g_1(s) e^{-\int_0^s m_1(\nu)d\nu} ds\Big) e^{\int_0^t m_1(s)ds} \\ \leq & \Big(c_1 + \int_0^t g_1(s)ds\Big).e^{\int \int_0^t m_1(s)ds}, \quad \text{qui est bornée.} \end{aligned}$$

• Si $p = 1$, alors $w(t,u) = (m(t) + g(t))u$ et nous obtenons le cas étudié dans i).

• Si $0 < p < 1$, l'équation ordinaire s'écrit

$$\begin{aligned} r^{'}(t) = & \ m_1(t)r(t) + g_1(t)r(t)^p, \\ r(0) = & \ c_1. \end{aligned}$$

c'est une équation de Bernoulli, nous posons alors $v(t) = r(t)^{1-p}$ et nous obtenons l'équation ordinaire suivante déjà étudiée dans le premier point;

$$\begin{cases} v^{'}(t) = m_2(t)v(t) + g_2(t), \\ v(0) = c_1^{1-p}, \end{cases}$$

où $m_2(t) = (1-p)m_1(t)$ et $g_2(t) = (1-p)g_1(t)$.

References

1. O. Arino et E. Sanchez, *A variation of constant formula for abstract delay differential equations*, J. Diff. and Integral Equation **9** (1996), 1305-1320.
2. K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis.* Springer, Berlin (1985).
3. J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Vol.I, Monographie Matematyezne. P.N.w, Warsaw, 1982.
4. J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, Berlin, 1977.
5. J. K. Hale and J. Kato, *Phase spaces for retarded equations with infinite delay*, Funkcialay Ekvacioj **21** (1978), 11- 41.
6. Y. Hino, S. Murakami and T. Naito, *Functional differential equations with infinite delay*, Lect. Notes in Math. 1473, Springer, New York, 1991.
7. T. Iwamiya, *Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces*, Hiroshima. Math. J. **16** (1986), 499-530.
8. R. H. Jr. Martin, *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces,* Wiley-Interscience, New York, 1976.
9. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, Berlin, 1983.
10. K. Schumacher, *Remarks on semilinear partial functional differential equations with infinite delay*, J. Math. Analysis Applic. **80** (1981), 261-290.
11. J. S. Shin, *Uniqueness of mild solutions to semilinear functional differential equations in Banach spaces*, Proc. Int. Symp. Functional differential equations, pp. 334-338, World Scientific, Singapore, 1991.
12. C. C. Travis and G. F. Webb, *Existence and stability for functional equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1974), 395-418.

Université Cadi Ayyad, Faculté des sciences Semlalia,
Département de Mathématiques,
B.P.S:15, Marrakech 40000, Maroc.