ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 24, Number 1, 1999, pp. 9–14

SUR LA COMPACITE DES SHIFTS A POIDS OPERATEURS

MALIKA ABOUFATIMA ET MOHAMED HOUIMDI

Abstract. Soient H un espace de Hilbert séparable complexe de dimension infinie et $(e_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormale de H. Soit A le shift à poids défini par: $Ae_n=\alpha_n e_{n+1}$ où $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée de nombres complexes. Alors d'après [1] A est compact si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n=0$. De plus, $A\in\mathcal{C}_p$ si et seulement si $\sum\limits_{n\geq 0} |\alpha_n|^p<\infty$. Dans cet article on considère l'opérateur A défini sur $H^{(\infty)}$ par: $A.(x_0,x_1,x_2,\dots)=(0,A_0x_0,A_1x_1,\dots)$ où $H^{(\infty)}$ est la somme directe hilbertienne d'une infinité dénombrable de copies de H et où $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'opérateurs linéaires bornés sur H. On va montrer d'une part que A compact si et seulement si pour tout n, A_n est compact et $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\|=0$. D'autre part, $A\in\mathcal{C}_p$ si et seulement si pour tout $n\geq 0$ $A_n\in\mathcal{C}_p$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \left\|A_n\right\|_p^p<\infty$, où $\|.\|_p$ est la $\mathcal{C}_p$ norme.

1. Introduction

Soient H un espace de Hilbert séparable complexe de dimension infinie et $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. On désigne par $H^{(\infty)}$ la somme directe hilbertienne d'une infinité dénombrable de copies de H. Rappelons que

$$H^{(\infty)} = \Big\{ \big(x_n\big)_{n\geq 0} : \forall n, x_n \in H \ et \ \sum_{n\geq 0} \big\|x_n\big\|^2 < \infty \Big\}$$

et que tout opérateur linéaire T sur $H^{(\infty)}$ est défini par une matrice carrée infinie $\big(T_{n,m}\big)_{n,m\geq 0}$ à coefficients dans $\mathcal{L}(H)$ (Voir [2], [3]).

Rappelons aussi qu' un opérateur A est dit dans la classe $\mathcal{C}_p$ $(0 < p < \infty)$ si A est compact et si les valeurs propres de $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ sont dans l^p. Notons que $A \in \mathcal{C}_p$ si et seulement si $|A| \in \mathcal{C}_p$ si et seulement si

Received March 8, 1997
1990 Mathematics subject classification. Primary 47B37

$|A|^p \in \mathcal{C}_1$, et la $\mathcal{C}_p$ norme, notée par $\|.\|_p$, est donnée par:

$$\|T\|_p = \left(\mathrm{tr}|T|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \forall T \in \mathcal{C}_p$$

où tr désigne la trace.

On dit qu'un opérateur A sur $H^{(\infty)}$ est un shift à poids opérateurs, si A est représenté par une matrice de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ A_0 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & 0 & A_n & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad ,$$

où $\sup\limits_{n\geq 0} \|A_n\| < \infty$, parsuite, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in H^{(\infty)}$, on a $A.x = (0, A_0x_0, A_1x_1, \ldots, A_nx_n, \ldots)$. Signalons qu'une étude spectrale d'un tel opérateur, dans le cas où les poids sont tous inversibles, a été faite dans [3], [4], les auteurs ont en particulier caractérisé le commutant, l'algèbre faiblement fermée engendrée par A, le spectre et les parties du spectre de A et A^*.

Proposition 1.1. *Soit A un shift à poids opérateurs, où $(A_n)_{n\geq 0}$ est la suite des poids. Alors on a :*

(i) $\|A\| = \sup\limits_{n\geq 0} \|A_n\|$,

(ii) $r(A) = \inf\limits_{k\geq 1} \left(\sup\limits_{n\geq 0} \|A_{n+k-1} \ldots A_n\|\right)^{\frac{1}{k}}$,

(iii) $\forall x \in H^{(\infty)}$ *, on a:* $A^*x = (A_0^*x_1, A_1^*x_2, \ldots, A_n^*x_{n+1}, \ldots)$.

Preuve. C'est une vérification de routine.

Remarque 1.1. On vérifie facilement que:

(i) $A^*A = \bigoplus\limits_{n\geq 0} (A_n^*A_n)$

(ii) $|A| = \bigoplus\limits_{n\geq 0} |A_n|$, (où $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$).

2. Le résultat principal

Lemme 2.1. *Soient $T_0, T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{L}(H)$, et $T = T_0 \bigoplus T_1 \bigoplus \ldots \bigoplus T_n$, alors T est compact si et seulement si pour tout k, $k = 0, 1, \ldots, n$, T_k est compact.*

Preuve. Supposons que T est compact, pour montrer que T_k est compact, il suffit de montrer que pour toute suite orthonormale $(x_m)_{m\geq 0}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \langle T_k x_m, x_m\rangle = 0$. (Voir [5]). Soit donc $(x_m)_{m\geq 0}$ une suite orthonormale de H, posons $y^{(m)} = (0,\dots,0,x_m,0,\dots,0)$, alors $\left(y^{(m)}\right)_{m\geq 0}$ est une suite orthonormale de $H^{(n)} = H\bigoplus\dots\bigoplus H$, la somme directe de n copies de H. Et puisque T est compact, alors $\lim\limits_{m\to\infty}\left\langle Ty^{(m)}, y^{(m)}\right\rangle = 0$. Or $\left\langle Ty^{(m)}, y^{(m)}\right\rangle = \langle T_k x_m, x_m\rangle$, d'où le résultat.

Supposons maintenant que pour tout $k = 0,1\dots n$, T_k est compact: pour chaque k, soit $(T_{k,m})_{m\geq 0}$ une suite d'opérateurs de rang fini tels que $\lim\limits_{m\to\infty}\|T_{k,m} - T_k\| = 0$. Posons $T_m = T_{0,m}\bigoplus T_{1,m}\bigoplus\dots\bigoplus T_{n,m}$, alors il est clair que pour tout $m\geq 0$, T_m est de rang fini et on a $\|T - T_m\| = \sup\limits_{0\leq k\leq n}\|T_k - T_{k,m}\|$, d'où $\lim\limits_{m\to\infty}\|T - T_m\| = 0$. □

Lemme 2.2. *Soient $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de $\mathcal{L}(H)$ et $T = \bigoplus\limits_{n\geq 0} T_n$. Alors T est compact si et seulement si:*

(i) *$\forall n\geq 0$, T_n est compact,*

(ii) *$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\| = 0$.*

Preuve. Supposons que T est compact, fixons $k\geq 0$ et montrons que T_k est compact. Pour cela, il suffit de montrer que pour toute suite orthonormale $(x_n)_{n\geq 0}$ de H, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle T_k x_n, x_n\rangle = 0$. Soit donc $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite orthonormale de H, pour tout entier $n\geq 0$, posons $y^{(n)} = (x_{n,m})_{m\geq 0}$, où $x_{n,m} = 0$ si $m\neq k$ et $x_{n,m} = x_n$ si $m = k$, alors $\left(y^{(n)}\right)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormale de $H^{(\infty)}$, et puisque T est supposé compact, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left\langle Ty^{(n)}, y^{(n)}\right\rangle = 0$.

Or on a: $\left\langle Ty^{(n)}, y^{(n)}\right\rangle = \langle T_k x_n, x_n\rangle$, d'où le résultat. Montrons maintenant que $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\| = 0$. Puisque T_n est compact, alors $T_n^* T_n$ est aussi compact. Soit $\lambda_n\in\sigma(T_n^*T_n)$ tel que $\lambda_n = r(T_n^*T_n) = \|T_n^*T_n\| = \|T_n\|^2$, et puisqu'on peut supposer pour tout $n\geq 0$, $T_n\neq 0$, alors $T_n^*T_n\neq 0$ donc $\lambda_n\neq 0$ et λ_n est une valeur propre de $T_n^*T_n$. Soit $x_n\in H$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $T_n^*T_n x_n = \lambda_n x_n$ donc $\langle T_n^*T_n x_n, x_n\rangle = \lambda_n = \|T_n\|^2$. Posons $y^{(n)} = (x_{n,m})_{m\geq 0}$ tel que $x_{n,m} = 0$, $n\neq m$ et $x_{n,n} = x_n$, alors $\left(y^{(n)}\right)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormale de $H^{(\infty)}$, donc on a $\lim\limits_{n\to\infty}\left\langle T^*Ty^{(n)}, y^{(n)}\right\rangle = 0$. Or on a $\left\langle T^*Ty^{(n)}, y^{(n)}\right\rangle = \langle T_n^*T_n x_n, x_n\rangle = \|T_n\|^2$, d'où le résultat.

Supposons maintenant que pour tout $n \geq 0$, T_n est compact et $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\| = 0$: posons $T^{(n)} = T_0 \bigoplus T_1 \bigoplus \ldots \bigoplus T_n \bigoplus 0 \bigoplus \ldots$, alors d'après le Lemme 2.1, pour tout $n \geq 0$, $T^{(n)}$ est compact et on a $\left\|T^{(n)} - T\right\| = \sup\limits_{m\geq n+1} \|T_m\|$.
Il s'ensuit alors que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|T^{(n)} - T\right\| = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \|T_n\| = 0$, donc T est compact. □

Théorème 2.1. *Soit A le shift à poids opérateurs, où $(A_n)_{n\geq 0}$ est la suite des poids. Alors A est compact si et seulement si:*

(i) $\forall n \geq 0$, A_n *est compact,*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\| = 0$.

Preuve. On sait qu'un opérateur A est compact, si et seulement si, $|A|$ est compact. Or ici on a $|A| = \bigoplus\limits_{n\geq 0} |A_n|$, donc d'après le lemme précédent, A est compact si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $|A_n|$ est compact et $\lim\limits_{n\to\infty} \|\,|A_n|\,\| = 0$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \|\,|A_n|\,\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$. D'où le résultat. □

Lemme 2.3. *Soient $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de $\mathcal{L}(H)$ et $T = \bigoplus\limits_{n\geq 0} T_n$, alors $T \in \mathcal{C}_p$ si et seulement si pour tout $n \geq 0$ $T_n \in \mathcal{C}_p$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \|T_n\|_p^p < \infty$.*

Dans ce cas on a: $\|T\|_p = \left(\sum\limits_{n\geq 0} \|T_n\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$, où $\|.\|_p$ est la $\mathcal{C}_p$ norme.

Preuve. Rappellons tout d'abord que $H^{(\infty)}$ s'identifie au produit tensoriel Hilbertien $H\hat{\otimes}H$, et que si $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de H, alors $(e_n \otimes e_m)_{n,m\geq 0}$ est une base orthonormale de $H\hat{\otimes}H$ (voir [7], [8]). On pourra alors considérer $T = \bigoplus\limits_{n\geq 0} T_n \in \mathcal{L}(H^{(\infty)})$ comme étant l'opérateur sur $H\hat{\otimes}H$ défini par $T(e_n \otimes e_m) = (T_m e_n) \otimes e_m$ pour tout $n, m \geq 0$.
Puisque $|T|^p = \bigoplus\limits_{n\geq 0} |T_n|^p$, on peut considérer $|T|^p$ comme étant l'opérateur sur $H\hat{\otimes}H$ défini par $|T|^p(e_n \otimes e_m) = (|T_m|^p e_n) \otimes e_m$.

Supposons que $T \in \mathcal{C}_p$, donc T est compact, par suite d'après le Lemme

2.2, pour tout $n \geq 0, T_n$ est compact. De plus on a:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(|T|^p) &= \sum_{n,m\geq 0} \langle |T|^p(e_n \otimes e_m), e_n \otimes e_m\rangle \\
&= \sum_{n,m\geq 0} \langle |T_m|^p e_n \otimes e_m, e_n \otimes e_m\rangle \\
&= \sum_{n,m\geq 0} \langle |T_m|^p e_n, e_n\rangle \\
&= \sum_{m\geq 0}\Big(\sum_{n\geq 0}\langle |T_m|^p e_n, e_n\rangle\Big).
\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{tr}(|T|^p) < \infty$, il s'ensuit alors d'après la dernière égalité que pour tout $m \geq 0$ $\sum_{n\geq 0}\langle |T_m|^p e_n, e_n\rangle < \infty$, ce qui revient à dire que pour tout $m \geq 0$, $\operatorname{tr}(|T_m|^p) < \infty$, il en résulte que pour tout $n \geq 0$, $T_n \in \mathcal{C}_p$, et $\sum_{m\geq 0}\|T_m\|_p^p = \sum_{m\geq 0}\Big(\operatorname{tr}(|T_m|^p)\Big) = \operatorname{tr}(|T|^p) < \infty$. Supposons maintenant que pour tout $n \geq 0$ $T_n \in \mathcal{C}_p$ et $\sum_{n\geq 0}\|T_n\|_p^p < \infty$, par suite pour tout $n \geq 0$, T_n est compact et $\lim_{n\to\infty}\|T_n\| = 0$, et alors d'après le Lemme 2.2, T est compact. De plus d'après ce qui précède $\operatorname{tr}(|T|^p) = \sum_{n\geq 0}\|T_n\|_p^p < \infty$, d'où $T \in \mathcal{C}_p$. □

Théorème 2.2. *Soit A le shift à poids opérateurs, où $(A_n)_{n\geq 0}$ est la suite des poids. Alors $A \in \mathcal{C}_p$ si et seulement si pour tout $n \geq 0$ $A_n \in \mathcal{C}_p$ et $\sum_{n\geq 0}\|A_n\|_p^p < \infty$.*

Preuve. $A \in \mathcal{C}_p$ si et seulement si $|A| \in \mathcal{C}_p$, mais $|A| = \bigoplus_{n\geq 0}|A_n|$, alors d'après le dernier lemme, $A \in \mathcal{C}_p$ si et seulement si pour tout $n \geq 0$ $|A_n| \in \mathcal{C}_p$ et $\sum_{n\geq 0}\|\,|A_n|\,\|_p^p < \infty$. Par conséquent, $A \in \mathcal{C}_p$ si et seulement si pour tout $n \geq 0$ $A_n \in \mathcal{C}_p$ et $\sum_{n\geq 0}\|A_n\|_p^p < \infty$. □

References

1. B. Beauzamy, *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, North-Holland, Amsterdam-New York, 1988.
2. J. B. Conway, *Subnormal Operators*, Pitman, London, 1981.
3. M. Houimdi, *Propriétés spectrales des opérateurs shifts. Modèles de similitude et phénomène d'explosion du spectre*, Thèse de $3^{ème}$ cycle, Bordeaux, 1984.
4. R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, vol. 1, Elementary theory, Academic Press, Boston-San Diego-New York, 1983.
5. H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
6. J. R. Ringrose, *Compact non Self-adjoint Operators*, Van Nostrand, London, 1971.
7. A. L. Shields, *Weighted Shift Operators and Analytic Function Theory*, A. M. S. Providence, Rhode Island, 1974.
8. M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathematiques
BP S15, 40000, Marrakech, Marocco.