ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 23, Number 2, 1998, pp. 325–345

INTÉGRATION STOCHASTIQUE MULTIVOQUE ET INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES RÉTROGRADES

A. BOUCHEN, A. EL ARNI, Y. OUKNINE ET M. N'ZI

Abstract. We will present several results concerning multivalued stochastic integration and the existence of solution for some backward stochastic differential inclusion under various conditions, including non-Lipschitz case.

1. Introduction

Dans la litérature l'approche multivoque en analyse stochastique est étudiée par plusieurs auteurs dans des sens différents, citons par exemple M. T. Loumi [10] qui a défini l'intégrale stochastique multivoque au sens de Mac Shane, Bensoussan et Lions [2] et Cépa [4] qui ont étudié des inclusions différentielles stochastiques faisant intervenir des opérateurs maximaux monotones et enfin Hiai [7] qui a introduit la définition de l'intégrale stochastique multivoque par rapport à un mouvement Brownien cylindrique sur un espace de Hilbert; Il a par ailleurs résolu une inclusion différentielle stochastique sous des conditions de Lipschitz.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, I\!\!P)$ une base stochastique vérifiant les conditions habituelles. On suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la celle d'un Brownien W. On note $E = M_{d,m}(R)$ l'espace des matrices réelles à d lignes et m colonnes.

Nous introduisons dans la Section 3 la définition de l'intégrale stochastique multivoque par rapport à une semimartingale continue à valeurs dans $I\!\!R^m$ et nous établissons quelques propriétés de cette intégrale analogues à celles de l'intégrale multivoque par rapport à une mesure positive σ-finie établies par Hiai et Umegaki [8].

Dans la Section 4 nous démontrons, en utilisant la méthode itérative de Picard, l'existence de la solution de l'inclusion differentielle stochastique rétrograde

Received March 19, 1997; in revised form October 8, 1997.
1991 Mathematics Subject Classification. 60H10, 60H20.
Key words and phrases. Backward stochastic differential inclusion, multifunction.

$$y_t \in \xi + \int_t^1 h(s, y_s, z_s)ds - \int_t^1 z_s dW_s,$$

où $\xi \in L^2_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$, h est une multifonction borélìenne définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times E$ à valeurs convexes et compactes dans $\mathbb{R}^d$ et vérifiant des conditions qui seront spécifiées dans la suite.

2. Préliminaires.

Dans toute la suite on notera $\mathcal{M}_2^c(\mathbb{R}^m)$ l'espace des martingales à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ de carré intégrable, continues et nulles en 0 et $\mathcal{M}_2^{c,b}(\mathbb{R}^m)$ le sous espace de $\mathcal{M}_2^c(\mathbb{R}^m)$ formé par les martingales bornées dans $L^2_{\mathbb{R}^m}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On notera aussi $\mathcal{M}^{c,loc}(\mathbb{R}^m)$ l'espace des martingales locales à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, continues et nulles en 0.

Soit X un espace de Banach séparable. On note $\mathcal{P}_f(X)$ (resp. $\mathcal{P}_{cf}(X)$) l'ensemble des parties fermées (resp. convexes fermées) de X et $\mathcal{P}_k(X)$ (resp. $\mathcal{P}_{ck}(X)$) l'ensemble des parties compactes (resp. convexes compactes) de X.

On définit la distance de Hausdorff δ_X sur $\mathcal{P}_f(X)$ par:

$$\delta_X(A, B) = \max\left(\sup_{x\in A} d_X(x, B) \;\; ; \;\; \sup_{y\in B} d_X(y, A)\right),$$

où d_X est la distance associée à la norme de X. On utilisera aussi la notation:

$$|A|_X = \delta_X(A, \{0\}) = \sup_{x\in A} \|x\|.$$

Les ensembles $\mathcal{P}_f(X)$, $\mathcal{P}_{cf}(X)$, $\mathcal{P}_k(X)$ et $\mathcal{P}_{ck}(X)$ sont complets pour la distance δ_X ([5], Théorèmes II-3 et II-5).

Rappellons ici quelques résultats concernants la mesurabilité des multifonctions. Pour d'autres détails nous renvoyons le lecteur à Castaing-Valadier ([5], Chap. III).

Définition 1. Soient $(T, \mathcal{B})$ un espace mesurable et F une multifonction définie sur T et à valeurs fermées non vides dans X. On dit que F est $\mathcal{B}$-mesurable si pour tout ouvert O de X l'ensemble

$$F^-(O) = \big\{x \in T \;\big|\; F(x) \cap O \neq \emptyset\big\}$$

appartient à $\mathcal{B}$.

Théorème 1. *Soit F une multifonction définie sur T et à valeurs fermées non vides dans X. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *F est $\mathcal{B}$-mesurable,*

ii) *l'application $x \to d_X(a, F(x))$ est $\mathcal{B}$-mesurable pour tout élément a de X,*

iii) *il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de séléctions mesurables de F telle que*

$$\forall x \in T, \qquad F(x) = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{f_n(x)\}}.$$

Pour la démonstration voir ([5], Théorème III-9).

Si F et G sont des multifonctions à valeurs fermées et non vides dans X et ξ une application réelle définie sur T on notera $F+G$, $\overline{co}\,F$ et ξF les multifonctions définies par

$$(F+G)(x) = \overline{F(x)+G(x)}\,,\ \overline{co}\,F(x) = \overline{co}\,(F(x)) \text{ et } (\xi F)(x) = \xi(x)F(x).$$

Théorème 2. *Si F, G et ξ sont $\mathcal{B}$-mesurables alors les trois multifonctions $F+G$, $\overline{co}\,F$ et ξF sont $\mathcal{B}$-mesurables.*

La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans ([8], Théorèmes 1.4 et 1.5).

Si μ est une mesure positive σ-finie sur $(T, \mathcal{B})$ et F une multifonction B-mesurable à valeurs fermées et non vides dans X on définit l'ensemble:

$$S_F^2(\mu) = \left\{ f \in L_X^2(T, B, \mu) \quad / \quad f(x) \in F(x) \quad \mu - p.p \right\}.$$

Il est clair que $S_F^2(\mu)$ est fermé dans $L_X^2(T, B, \mu)$; De plus on a

$$S_{\overline{co}\,F}^2(\mu) = \overline{co}\,\left(S_F^2(\mu)\right)$$

d'après ([8], Théorème 1.5).

Enfin nous noterons $L^0_{I\!R^d}(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ l'espace des (classes) des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables muni de la convergence en probabilité. C'est un e.v.t.l.c complet métrisable.

3. Intégration stochastique multivoque

Pour une étude détaillée des intégrales stochastiques univoques, nous renvoyons le lecteur au livre de P. Protter [12]. Pour ne pas alourdire notre exposé, nous donnons, sans démonstration, les principaux résultats de l'intégrale stochastique multivoque. Les preuves détaillées de ces résultats sont exposées dans la thèse de A. Bouchen [3].

Définition 2. On dit qu'une multifonction $h : I\!R^+ \times \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$ à valeurs fermées non vides est un processus stochastique multivoque, si pour $t \in I\!R^+$, la multifonction h_t définie par

$$h_t(\omega) = h(t, \omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

est $\mathcal{F}$ mesurable. Elle est dite adaptée si pour tout $t \in I\!R^+$ la multifonction h_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. On dira aussi que h est prévisible si elle est mesurable par rapport à la tribu prévisible de $I\!R^+ \times \Omega$ notée $\mathcal{P}$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 1.

Lemme 1. *Si $h : I\!R^+ \times \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$ est un processus multivoque (resp. adapté, resp. prévisible) alors il existe une suite $(\sigma^n)_{n\geq 0}$ de processus univoques (resp. adaptés, resp. prévisibles) à valeurs dans X telle que:*

$$h_t(\omega) = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\sigma_t^n(\omega)\}}, \quad \forall (t, \omega) \in I\!R^+ \times \Omega.$$

Remarque. Si h est un processus multivoque (resp. prévisible, resp. adapté) alors $|h|_X$ est un processus réel (resp. prévisible, resp. adapté) puisqu'on a

$$\forall (t, \omega) \in I\!R^+ \times \Omega, \quad |h_t(\omega)|_X = \sup_{n\geq 0} \|\sigma_t^n(\omega)\|.$$

Définition 3. On dit qu'un processus multivoque h est localement borné si le processus réel $|h|_X$ est localement borné.

Remarques. 1) Le processus multivoque h est localement borné si et seulement si il existe un processus positif g localement borné tel que

$$\forall (t, \omega) \in I\!R^+ \times \Omega, \quad h_t(\omega) \subset B(0, g_t(\omega)),$$

où $B(0, g_t(\omega))$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon $g_t(\omega)$.

2) Toutes les séléctions d'un processus multivoque localement borné sont localement bornées.

3) Si r est un processus positif prévisible et σ un processus prévisible à valeurs dans X alors la multifonction Γ définie par

$$\Gamma(t,\omega) = B\left(\sigma_t(\omega), r_t(\omega)\right), \quad \forall (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$$

est un processus multivoque prévisible ([5], Théorème III.41).

4) Soient S et T deux temps d'arrêt et $Y : \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$ une multifonction $\mathcal{F}_S$-mesurable. $1_{]S,T]}Y$ est alors un processus prévisible.

5) Si F et G sont deux processus multivoques prévisibles et ξ un processus réel prévisible alors les multifonctions $\overline{co}\,F$, $F+G$ et ξF sont aussi des processus prévisibles; (Théorème 2).

Définition 4. Soient $h : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathcal{P}_k(E)$ un processus prévisible localement borné et $X = \left(X^1,\dots,X^m\right)$ une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On définit l'intégrale stochastique multivoque de h par rapport à X par:

$$\forall t \geq 0, \quad \int_0^t h_s dX_s = \Big\{ \int_0^t \sigma_s dX_s \;/\; \sigma \in S_h \Big\},$$

où S_h est l'ensemble des séléctions prévisibles de h.

Remarques. 1) $\int_0^t h_s dX_s \neq \emptyset$ puisque S_h est non vide (Théorème 1). De plus on a

$$\int_0^t h_s dX_s \subset L^0_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}).$$

2) Soit $M = \left(M^1,\dots,M^m\right)$ un élément de $\mathcal{M}^{c,loc}(\mathbb{R}^m)$ tel que:

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m \mathbb{E}\Big(\int_0^t |h_s|^2 \, d\left\langle M^j \right\rangle_s \Big) < +\infty.$$

Alors on a:

$$\int_0^t h_s dM_s \subset L^2_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}).$$

3) Soit $A = (A^1,\dots,A^m)$ un processus continu, à variation finie et nul en 0 tel que

$$\forall t \geq 0, \quad E\,|A_t| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^m \mathbb{E}\Big(\int_0^t |h_s|^p \, d\left|A^j\right|_s \Big) < +\infty,$$

où p est un élément de $[1,+\infty[$. Alors on a

$$\int_0^t h_s dA_s \subset L^1_{\mathbb{R}^d}\left(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P}\right).$$

En effet si $\sigma = \left(\sigma^{i,j}\right)\ 1 \leq j \leq m_{1\leq i\leq d}$ est une séléction prévisible de h et si $p = 1$ alors on a

$$\mathbb{E}\Big(\Big|\int_0^t \sigma_s^{i,j} dA_s^j\Big|\Big) \leq \mathbb{E}\Big(\int_0^t \left|\sigma_s^{i,j}\right| d\left|A^j\right|_s\Big) < +\infty.$$

D'autre part si $p > 1$ alors on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\Big|\int_0^t \sigma_s^{i,j} dA_s^j\Big|\Big) &\leq \mathbb{E}\Big(\int_0^t \left|\sigma_s^{i,j}\right| d\left|A^j\right|_s\Big)\\ &\leq \left[\mathbb{E}\left|A_t\right|\right]^{\frac{1}{q}}\left[\mathbb{E}\Big(\int_0^t \left|\sigma_s^{i,j}\right|^p d\left|A^j\right|_s\Big)\right]^{\frac{1}{p}}\\ &< +\infty,\end{aligned}$$

où q est le conjugué de p.

4) Si h est à valeurs dans $\mathcal{P}_{ck}(E)$ alors $\int_0^t h_s dX_s$ est convexe pour tout $t \geq 0$.

5) Si h et Ψ sont deux processus multivoques prévisibles localement bornés et indistinguables alors on a

$$\int_0^t h_s dX_s = \int_0^t \Psi_s dX_s\,, \quad \forall t \geq 0,$$

puisque toute séléction prévisible de h est indistinguable d'une séléction prévisible de Ψ et inversement.

6) Si $h \subset \Psi$ alors on a

$$\int_0^t h_s dX_s \subset \int_0^t \Psi_s dX_s\,, \quad \forall t \geq 0.$$

La réciproque est fausse, en effet il suffit de prendre $X = 1$, $h = [0,1]$, et $\Psi = [1,2]$.

7) Si Y est une autre semimartingale alors on a

$$\int_0^t h_s d(X+Y)_s \subset \int_0^t h_s dX_s + \int_0^t h_s dY_s\,, \quad \forall t \geq 0.$$

L'inclusion inverse est fausse, en effet soient σ et τ deux processus réels prévisibles et localement bornés tels que

$$\int_0^{t_1} \sigma_s dX_s \neq \int_0^{t_1} \tau_s dX_s,$$

où $t_1 \in I\!R^+$, $Y = -X$ et h la multifonction définie par

$$h_t(\omega) = \{\sigma_t(\omega)\,,\, \tau_t(\omega)\}\,, \quad \forall (t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega.$$

Alors h est un processus multivoque prévisible localement borné et on a

$$\int_0^{t_1} h_s d(X+Y)_s = \{0\} \neq \int_0^{t_1} h_s dX_s + \int_0^{t_1} h_s dY_s.$$

8) Si T est un temps d'arrêt alors on a

$$\int_0^t 1_{[0,T]}\, h_s dX_s = \int_0^t h_s dX_s^T\,, \quad \forall t \geq 0.$$

Lemme 2. *Soient $(T,\mathcal{B})$ un espace mesurable, Γ et Ψ deux multifonctions $\mathcal{B}$-mesurables à valeurs dans $\mathcal{P}_k(X)$ et σ une séléction de $\Gamma + \Psi$. Alors il existe une séléction $\mathcal{B}$-mesurable τ de Γ et une séléction $\mathcal{B}$-mesurable r de Ψ telle que $\sigma = \tau + r$.*

Théorème 3. *Soient h et Ψ deux processus multivoques prévisibles, localement bornés et à valeurs dans $\mathcal{P}_{ck}(X)$. Alors on a les deux propriétés suivantes:*

i) $\forall \alpha \in I\!R\,, \quad \int\limits_0^t \alpha h_s dX_s = \alpha \int\limits_0^t h_s dX_s,$

ii) $\int\limits_0^t (h+\Psi)_s dX_s = \int\limits_0^t h_s dX_s + \int\limits_0^t \Psi_s dX_s.$

Théorème 4. *Soit $M = \left(M^1, \dots, M^m\right)$ un élément de $\mathcal{M}_2^c\left(I\!R^m\right)$ tel que:*
i) $\left\langle M^i, M^j \right\rangle = 0$ *si* $i \neq j$
ii) $\left\langle M^1 \right\rangle = \cdots = \langle M^m \rangle = A$ *où A est un processus croissant, continu et nul en* 0.

Soit $h : I\!R^+ \times \Omega \to \mathcal{P}_k\left(E\right)$ un processus prévisible et localement borné tel que

$$\forall t \geq 0\,, \quad I\!E\Big(\int\limits_0^t |h_s|^2 \, dA_s\Big) < +\infty.$$

Alors $\int\limits_0^t h_s dM_s$ est un fermé borné de $L^2_{I\!R^d}\left(\Omega, \mathcal{F}_t, I\!P\right)$. Si de plus h est à valeurs dans $\mathcal{P}_{ck}\left(E\right)$ alors $\int\limits_0^t h_s dM_s$ est convexe et faiblement compact dans $L^2_{I\!R^d}\left(\Omega, \mathcal{F}_t, I\!P\right)$.

Remarque. Sous les hypothèses du Théorème 4 si on suppose de plus que

$$I\!E\Big(\int\limits_0^{+\infty} |h_s|^2 \, dA_s\Big) < +\infty,$$

alors l'ensemble:

$$\left\{ \Big(\int\limits_0^t \sigma_s dM_s \Big)_{t \geq 0} \quad / \quad \sigma \in S_h \right\}$$

est un fermé borné de $\mathcal{M}_2^{c,b}\left(I\!R^d\right)$.

Théorème 5. *Soient $M = \left(M^1, \dots, M^m\right)$ un élément de $\mathcal{M}^{c,loc}\left(I\!R^m\right)$ et $h : I\!R^+ \times \Omega \to \mathcal{P}_k\left(E\right)$ un processus prévisible et localement borné tels que*

$$\forall t \geq 0\,, \quad \sum_{j=1}^m I\!E\Big(\int\limits_0^t |h_s|^2 \, d_E \left\langle M^j \right\rangle_s \Big) < +\infty.$$

Alors $\int_0^t h_s dM_s$ *est borné dans* $L^2_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *et l'application* $t \mapsto cl\Big(\int_0^t h_s dM_s\Big)$ *est continue de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathcal{P}_f\left(L^2_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{F})\right)$ *muni de la distance de Hausdorff.*

Théorème 6. *Soient* $M = \left(M^1, \ldots, M^m\right)$ *un élément de* $\mathcal{M}^{c,loc}(\mathbb{R}^m)$ *et* $A = \left(A^1, \ldots, A^m\right)$ *un processus continu à variation finie et nul en* 0 *et* $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathcal{P}_k(E)$ *un processus prévisible et localement borné tel que:*

$$\text{i)} \quad \forall t \geq 0\,, \quad \mathbb{E}(|A|_t) < +\infty,$$

$$\text{ii)} \quad \forall t \geq 0\,, \quad \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}\Big(\int_0^t |\Phi_s|^2 \, d(\langle M^j \rangle_s + |A^j|_s)\Big) < +\infty.$$

Alors on a:

1) *Si* X *est la semimartingale continue* $M + A$ *alors on a*

$$\forall t \geq 0\,, \quad \overline{co} \int_0^t \Phi_s dX_s = cl \int_0^t \overline{co}\, \Phi_s dX_s$$

dans $L^1_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *et dans* $L^0_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

2) *Si* $A = 0$ *le résultat précédent est vrai dans* $L^2_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Théorème 7. *Soient* $X = \left(X^1, \ldots, X^m\right)$ *une semimartingale continue nulle en* 0 *et* $h : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathcal{P}_k(E)$ *un processus prévisible et localement borné. Alors on a*

$$\forall t \geq 0\ , \quad \overline{co}\Big(\int_0^t h_s dX_s\Big) = cl\Big(\int_0^t \overline{co}\, h_s dX_s\Big)$$

dans $L^0_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Théorème 8. *Sous les hypothèses du théorème 6 soit* $(\sigma^i)_{i\geq 1}$ *une suite de séléctions prévisibles de* Φ *telle que*

$$\forall (s,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\,, \quad \Phi s(\omega) = \overline{\{\sigma^i_s(\omega) \ / \ i \geq 1\}}$$

et soit S *l'ensemble défini par*

$$S = \Big\{ \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i}\, \sigma^i \ / \ N \in \mathbb{N}^* \ \textit{et}\ (A_i)_{1\le i\le N} \ \textit{une partition prévisible de}\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \Big\}.$$

Alors on a les deux propriétés suivantes:

1) *Si* X *est la semimartingale continue* $M + A$ *alors l'ensemble*

$$\Big\{ \int_0^t \tau_s \, dX_s \quad / \quad \tau \in S \Big\}$$

est dense dans $\int_0^t \Phi_s dX_s$ *pour les topologies de* $L^1_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *et de* $L^0_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

2) *Si* $A = 0$ *le résultat précédent est vrai dans* $L^2_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Théorème 9. *Soient* $X = \left(X^1, \ldots, X^m\right)$ *une semimartingale continue nulle en* 0 *et* $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathcal{P}_k(E)$ *un processus prévisible localement borné. Soit* $(\sigma^i)_{i\ge 1}$ *une suite de séléctions prévisibles de* Φ *telle que*

$$\forall (s,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\,, \quad \Phi s(\omega) = \overline{\{\sigma^i_s(\omega) \quad / \quad i \ge 1\}}$$

et soit S *l'ensemble défini par*

$$S = \Big\{ \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i}\, \sigma^i \,/\, N \in \mathbb{N}^* \ \textit{et}\ (A_i)_{1\le i\le N} \ \textit{une partition prévisible de}\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \Big\}.$$

Alors l'ensemble

$$\Big\{ \int_0^t \tau_s \, dX_s \quad / \quad \tau \in S \Big\}$$

est dense dans $\int_0^t \Phi_s dX_s$ *pour la topologie de* $L^0_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

4. Inclusions différentielles stochastiques rétrogrades

Dans toute cette section $W = \left(W^1, \ldots, W^m\right)$ est le processus du mouvement brownien standart sur $I\!R^m$.

On se propose d'étudier l'inclusion différentielle stochastique rétrograde suivante

$$(E) \qquad y_t \in \xi + \int_t^1 h\left(s, y(s), z(s)\right) ds - \int_t^1 z(s) dW_s,$$

où $h : \Omega \times I\!R^+ \times I\!R^d \times E \longrightarrow \mathcal{P}_{ck}\left(I\!R^d\right)$ est une multifonction boréliènne et $\xi : \Omega \longrightarrow I\!R^d$ une application $\mathcal{F}_1-$mesurable et de carré intégrable. Noter que dans le cas ou la multifonction h est univoque, cette théorie a été largement étudiée dans la litérature, plus particulièrement, on trouve des résultats d'existence et d'unicité dans E. Pardoux et S. Peng [11].

Définition 5. On dit qu'un processus adapté (y, z) $y : I\!R^+ \times \Omega \longrightarrow I\!R^d$ et $z : I\!R^+ \times \Omega \longrightarrow E$ est solution de l'inclusion (E) si on a les propriétés suivantes:

a) $y_1 = \xi$ p.s

b) $I\!E \sup\limits_{0 \le s \le 1} |y(s)|^2 + I\!E \int_0^1 |z(s)|^2 \, ds < +\infty$

c) il existe un processus prévisible et localement borné σ à valeurs dans $I\!R^d$ tel que

$$\text{i)} \quad \sigma_s(\omega) \in h\left(s,\, y(s,\omega),\, z(s,\omega)\right) \; dPds \text{ p.s}$$

$$\text{ii)} \quad \forall t \geq 0\,,\; y\left(t\right) = \xi + \int_t^1 \sigma_s ds - \int_t^1 z(s) dW_s \text{ p.s.}$$

Lemme 3. *Soient X un espace de Banach séparable, $\Phi : I\!R^+ \times I\!R^d \longrightarrow \mathcal{P}_f\left(X\right)$ une multifonction boréliènne et $x : I\!R^+ \times \Omega \longrightarrow I\!R^d$ un processus adapté.*
Alors le processus

$$\begin{aligned} \Gamma : I\!R^+ \times \Omega &\longrightarrow \mathcal{P}_f\left(X\right) \\ (t, \omega) &\longmapsto \Phi\left(t, x_t\left(\omega\right)\right) \end{aligned}$$

est prévisible.

Si de plus on a

$$\forall (t,y) \in I\!R^+ \times I\!R^d , \quad |\Phi(t,y)|_X^2 \leq K^2 \left(1 + \|y\|^2\right) ,$$

alors Γ *est localement borné.*

Démonstration. Soit $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ une suite de séléctions boréliènnes de Φ telle que

$$\forall (t,x) \in I\!R^+ \times I\!R^d , \quad \Phi(t,x) = \overline{\{\sigma_n(t,x) \ / \ n \geq 1\}}.$$

Donc on a

$$\forall (t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega , \quad \Gamma_t(\omega) = \overline{\{\sigma_n \left(t, y_t(\omega)\right) \ / \ n \geq 1\}}.$$

Comme le processus $(t,\omega) \longmapsto \sigma_n \left(t, y_t\left(\omega\right)\right)$ est prévisible pour tout $n \geq 1$ alors Γ est prévisible.

La deuxième partie est immédiate puisque

$$\forall (t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega , \quad |\Gamma_t(\omega)|_X \leq K^2 \left(1 + \|y_t(\omega)\|^2\right) . \qquad \square$$

Lemme 4. *Soient* H *un espace de Hilbert séparable et* $\Gamma : I\!R^+ \times \Omega \longrightarrow \mathcal{P}_{ck}(H)$ *et* $\sigma : I\!R^+ \times \Omega \longrightarrow H$ *deux processus prévisibles. Alors il existe une séléction prévisible* s *de* Γ *telle que*

$$\forall (t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega , \quad d_H \left(\sigma_t(\omega), \Gamma_t(\omega)\right) = \|\sigma_t(\omega) - s_t(\omega)\| .$$

Démonstration. Pour tout $(t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega$, soit $s_t(\omega)$ la projection de $\sigma_t(\omega)$ sur $\Gamma_t(\omega)$ dans H. Alors on a

$$\forall (t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega , \ s_t(\omega) \in \Gamma_t(\omega) \text{ et } d_H \left(\sigma_t(\omega), \Gamma_t(\omega)\right) = \|\sigma_t(\omega) - s_t(\omega)\| .$$

Posons $\Psi_t(\omega) = \{ s_t(\omega)\}$ pour tout $(t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega$.

D'après la définition de la projection on a

$$\forall (t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega , \quad \Psi_t(\omega) = \Gamma_t(\omega) \cap B \left(\sigma_t(\omega) \, ; \, d_H \left(\sigma_t(\omega), \Gamma_t(\omega)\right)\right) ,$$

où $B(x \, ; \, r)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon r dans H.

D'après la Remarque 3) suivant la Définition 4 le processus

$$(t,\omega) \longmapsto B\left(\sigma_t(\omega)\,;\, d_H\left(\sigma_t(\omega),\Gamma_t(\omega)\right)\right)$$

est prévisible, donc Ψ est prévisible ([5], Prop. III.4). Par suite s est prévisible. $\square$

Théorème 10. *On suppose que h, ξ vérifient les hypothèses suivantes:*
i) $\forall(t,y,z),\ \forall(t,y',z') \in I\!R^+ \times I\!R^d \times E$,

$$\delta_{I\!R^d}\left(h(t,y,z)\,;\, h(t,y',z')\right) \leq K\left(\|y-y'\| + \|z-z'\|\right),$$

ii) $I\!E \int_0^1 |h(s,0,0)|^2\, ds < +\infty$,
iii) $I\!E\, \|\xi\|^2 < +\infty$.
Alors il existe un processus adapté (y,z) qui est solution de l'inclusion différentielle stochastique rétrograde (E).

Démonstration. On va utiliser la méthode d'itération de Picard. Pour cela on va partager la démonstration en quatre étapes.

$1^{\text{ère}}$ étape. Posons

$$\begin{cases} y_t^0(\omega) = 0, \\ z_t^0(\omega) = 0, \\ h_t^0(\omega) = h\left(t, y_t^0(\omega), z_t^0(\omega)\right), \end{cases}$$

pour tout $(t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega$. Le Lemme 3 et l'Hypothèse ii) entrainent que h^0 est un processus multivoque prévisible et localement borné.

Soit σ^0 une séléction prévisible de h^0. Pour tout $(t,\omega) \in I\!R^+ \times \Omega$, on considère l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$y_t = \xi + \int_t^1 \sigma_s^0 ds - \int_t^1 z_s dW_s.$$

On notera $\left(y^1, z^1\right)$ la solution et on pose $h_t^1(\omega) = h\left(t, y_t^1(\omega), z_t^1(\omega)\right)$. Alors $\left(y^1, z^1\right)$ est un processus adapté et h^1 processus multivoque prévisible et localement borné d'après Lemme 3

Le Lemme 4 montre qu'il existe deux séléctions prévisibles σ^1 de h^1 telles que l' on ait

$$d_{\mathbb{R}^d}\left(\sigma_t^0(\omega), h_t^1(\omega)\right) = \left\|\sigma_t^0(\omega) - \sigma_t^1(\omega)\right\|,$$

pour tout $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$.

Ainsi on construit une suite $(y^n, z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times E$, une suite $(h^n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ de processus multivoques, prévisibles, localement bornés et à valeurs dans $\mathcal{P}_{ck}(\mathbb{R}^d)$ et une suite $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus prévisibles, localement bornés et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telles que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$,

a) σ^n est une séléction de h^n,

b) $\forall (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\,,\ d_{\mathbb{R}^d}\left(\sigma_t^n(\omega), h_t^{n+1}(\omega)\right) = \left\|\sigma_t^{n+1}(\omega) - \sigma_t^n(\omega)\right\|,$

d) $\forall t \geq 0\,,\ \ y_t^{n+1} = \xi + \int_t^1 \sigma_s^n ds - \int_t^1 z_s^{n+1} dW_s$

2^{me} étape. Montrons qu'il existe $C > 0$ tel que
(1)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq 1}\|y_t^n\|^2 + \mathbb{E}\int_0^1 |z_t^n|^2\,dt < C\Big(\mathbb{E}\,\|\xi\|^2 + \mathbb{E}\int_0^1 \left\|h_t^0(\omega)\right\|^2 dt\Big).$$

Ceci est une conséquence immédiate de la formule d'Ito, du lemme de Gronwall et de l'inégalité de Doob.

3^{me} étape. On va montrer dans cette étape que la suite $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement en ω et uniformément en t sur $[0,1]$ vers un processus y adapté et continu, et que la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2\,[d\mathbb{P}dt]$ vers un processus prévisible z.

On a

$$y_t^{n+1} - y_t^n = -\int_t^1 (\sigma_s^n - \sigma_s^{n-1})ds + \int_t^1 (z_s^{n+1} - z_s^n)dW_s.$$

Soit k un réel strictement positif. En appliquant la formule d'Ito au processus continu $\left\|y_t^{n+1} - y_t^n\right\|^2 \exp(kt)$, on obtient:

$$0 = \left\|y_t^{n+1} - y_t^n\right\|^2 \exp(kt) + k\int_t^1 \left\|y_s^{n+1} - y_s^n\right\|^2 \exp(ks)\,ds$$

$$+ \int_t^1 \left\|z_s^{n+1} - z_s^n\right\|^2 \exp(ks)\,ds$$

$$- 2\int_t^1 \left\langle y_s^{n+1} - y_s^n, \sigma_s^n - \sigma_s^{n-1}\right\rangle \exp(ks)\, ds$$

$$+ 2\int_t^1 \left\langle y_s^{n+1} - y_s^n, \left(z_s^{n+1} - z_s^n\right) dW_s\right\rangle \exp(ks)\, .$$

D'après les estimations précédentes, on a

$$\int_t^1 \left\langle y_s^{n+1} - y_s^n, \left(z_s^{n+1} - z_s^n\right) dW_s\right\rangle \exp(ks)$$

est une martingale (pour n fixé), et par suite

$$I\!\!E \int_t^1 \left\langle y_s^{n+1} - y_s^n, \left(z_s^{n+1} - z_s^n\right) dW_s\right\rangle \exp(ks) = 0.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
& I\!\!E \left\|y_t^{n+1} - y_t^n\right\|^2 \exp(kt) + \\
& + kI\!\!E \int_t^1 \left\|y_s^{n+1} - y_s^n\right\|^2 \exp(ks)\, ds + I\!\!E \int_t^1 \left\|z_s^{n+1} - z_s^n\right\|^2 \exp(ks)\, ds \\
& \leq I\!\!E \int_t^1 \frac{k}{2} \left\|y_s^{n+1} - y_s^n\right\|^2 \exp(ks)\, ds + I\!\!E \int_t^1 \frac{2}{k} \left\|\sigma_s^n - \sigma_s^{n-1}\right\|^2 \exp(ks)\, ds.
\end{aligned}$$

En appliquant la propriété b) et la condition i) on obtient pour tout $s \geq t$:

$$\begin{aligned}
\left\|\sigma_s^n - \sigma_s^{n-1}\right\| &= d_{I\!\!R^d}\left(\sigma_s^{n-1}, h_s^n\right) \\
&\leq \delta_E\left(h_s^{n-1}, h_s^n\right) \\
&\leq K\left(\left\|y_s^{n-1} - y_s^n\right\| + \left\|z_s^{n-1} - z_s^n\right\|\right). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Il en résulte donc que

$$\mathbb{E}\left\|y_t^{n+1}-y_t^n\right\|^2\exp(kt)+\frac{k}{2}\mathbb{E}\int_t^1\left\|y_s^{n+1}-y_s^n\right\|^2\exp(ks)\,ds$$
$$+\mathbb{E}\int_t^1\left\|z_s^{n+1}-z_s^n\right\|^2\exp(ks)\,ds\le\mathbb{E}\int_t^1\frac{2}{k}\left\|\sigma_s^n-\sigma_s^{n-1}\right\|^2\exp(ks)\,ds\le$$
$$\mathbb{E}\int_t^1\frac{4K^2}{k}\left(\left\|y_s^{n-1}-y_s^n\right\|^2+\left\|z_s^{n-1}-z_s^n\right\|^2\right)\exp(ks)\,ds.$$

On choisit $k=8(1+K^2)$, et en désignant par ρ_n l'expression

$$\mathbb{E}\left\|y_t^{n+1}-y_t^n\right\|^2\exp(kt)+\frac{k}{2}\mathbb{E}\int_t^1\left\|y_s^{n+1}-y_s^n\right\|^2\exp(ks)\,ds$$
$$+\mathbb{E}\int_t^1\left\|z_s^{n+1}-z_s^n\right\|^2\exp(ks)\,ds.$$

On obtient que $\rho_n\le\dfrac{C}{2^n}\cdot$

Il en resulte que la suite (y^n,z^n) converge dans $L^2(\Omega\times[0,1])$, vers un processus $(y\,,z)$.

Il en resulte aussi que

$$\max_{0\le s\le 1}\mathbb{E}\left(\left\|y_s^{n+1}-y_s^n\right\|^2\exp(ks)\right)\le\frac{C_0}{2^n}\cdot$$

En utilisant l'inégalité de Doob pour estimer l'intégrale stochastique, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\le s\le 1}\left\|y_s^{n+1}-y_s^n\right\|^2\exp(ks)\right)\le\frac{C_1}{2^n}\;,$$

où C_1 est une constante.

Donc d'après le lemme de Borel-Cantelli il existe un $\mathbb{P}$-négligeable F et une application $N:\Omega\longmapsto\mathbb{N}$, tels que:

(3) $$\forall\omega\in F^c\,,\quad\forall n\ge N(\omega)\,,\quad\max_{0\le t\le T}\left\|y_t^{n+1}-y_t^n\right\|\le\frac{1}{(1,5)^{n+1}}\cdot$$

On en déduit que

$$(4)\quad \forall\omega \in F^c\,,\quad \forall n \geq N(\omega)\,,\ \forall p \geq 1\,,\ \max_{0\leq t\leq 1}\left\|y_t^{n+p} - y_t^n\right\| \leq \frac{C_2}{(1,5)^{n+1}}\ \cdot$$

Donc si $\omega \in F^c$ alors la suite $(y_\cdot^n(\omega))_{n\in I\!\!N}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers un un processus continu et adapté $y_\cdot(\omega)$. tel que $y_1 = \xi$ p.s.

En passant, si nécessaire, à une sous suite on peut supposer que la suite $(z_\cdot^n)_{n\in I\!\!N}$ converge p.s vers z. Si on pose

$$h'_t(\omega) = h\left(t, y_t(\omega), z_t\left(\omega\right)\right),$$

pour tout $(t,\omega) \in I\!\!R^+ \times \Omega$, alors h' est un processus prévisible et localement borné tel que l'on ait d'après la condition $i)$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \delta_{I\!\!R^d}\left(h_t^n(\omega)\,; h'_t(\omega)\right) = 0 \text{ p.s. } .$$

D'autre part en utilisant le lemme de Fatou et l'inégalité (1) on obtient:

$$I\!\!E \max_{0\leq t\leq 1} \|y_t\|^2 + I\!\!E\int_0^1 |z_s|^2\, ds \leq C\Big(I\!\!E\,\|\xi\|^2 + I\!\!E\int_0^1 \left\|h_t^0(\omega)\right\|^2 dt\Big).$$

$4^{\text{è}}$ étape. D'après l'inégalité (σ), on déduit que la suite $(\sigma^n)_{n\in I\!\!N}$ converge p.s. vers un processus prévisible σ.

D'autre part σ est une séléction de h', en effet, on a:

$$\begin{aligned} d_E\left(\sigma_t(\omega), h'_t(\omega)\right) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} d_E\left(\sigma_t^n(\omega), h'_t(\omega)\right)\ ,\ p.s \\ &\leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \delta_E\left(h_t^n(\omega), h'_t(\omega)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme h' est localement borné alors σ l'est aussi.

La suite $(\sigma_t^n)_{n\in I\!\!N}$ est donc une suite de Cauchy dans $L_E^2\left(\Omega, \mathcal{F}, I\!\!P\right)$. En passant à des sous suites on peut supposer qu'elle converge presque sûrement vers σ_t. Or on a

$$y_t^{n_k+1} = \xi + \int_t^1 \sigma_s^{n_k} ds - \int_t^1 z_s^{n_k+1} dW_s\,,\quad \forall k \in I\!\!N,$$

donc on a

$$y_t = \xi + \int_t^1 \sigma_s ds - \int_t^1 z_s dW_s \,, \ p.s.$$

y est alors une solution de l'inclusion différentielle stochastique rétrograde (E) au sens de la définition 5. □

Remarque. En général, on n'a pas unicité de la solution de (E) comme le montre l'exemple suivant:

Soient W un mouvement brownien réel, $\xi = 0$, h la multifonction borélìenne définie par

$$h(t, y, z) = [0, 1] \,,$$

pour tout $(t, x) \in I\!R^+ \times I\!R$. Alors h, ξ vérifient les hypothèses du théorème 10 et $x^1 = (W, 0)$ et $x^2 = (0, 0)$ sont deux solutions distinctes de l'inclusion différentielle stochastique rétrograde

$$y_t \in \int_t^1 h(s, y_s, z_s)\, ds - \int_t^1 z_s dW_s.$$

5. Inclusions rétrogrades sans la condition de Lipschitz

L'objectif de cette section est de prouver un résultat d'existence, lorsque $(d = 1)$ sans l'hypothèse de Lipschitz. Pour cela nous utilisons un résultat de Michael sur les séléctions continues d'une multiapplication.

Théorème 11. *Soient X un espace métrique, Y un espace de Banach et F une multiapplication à valeurs dans $\mathcal{P}_{cf}(Y)$ semi continue inférieurement sur X. Alors il existe une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x) \in F(x)$, $\forall x \in X$.*

Dans cette partie, on suppose que la multifonction F satisfait les hypothèses suivantes:

1) $\| F(t, y, z)\| \le K(1 + \|y\| + \|z\|)$,

2) $F(t, ., .)$ est semi continue inférieurement sur $I\!R \times I\!R^n, \forall t \in [0, 1]$.

Le résultat principal de cette section est le

Théorème 12. *On suppose que F est à valeurs dans $\mathcal{P}_{cf}(I\!R)$ et satisfait les conditions 1) et 2), alors il existe une solution de l'inclusion différentielle stochastique rétrograde.*

Démonstration. Par le théorème de Michael, il existe une séléction continue en (y,z) telle que $f(t,y,z) \in F(t,y,z)$, $\forall\,(y,z)\,I\!R \times I\!R^n$. D'après la condition 2) on a

$$|\,f(t,y,z)| \leq K(1+|y|+\|z\|).$$

On considère l'inclusion différentielle stochastique rétrograde suivante

$$y_t \in \xi + \int_t^1 f\,(s,y_s,z_s)\,ds - \int_t^1 z_s dW_s.$$

Par approximation de la fonction f par une suite d'applications lipschitziennes en (y,z)

$$f_n\,(t,y,z) \downarrow f\,(t,y,z)$$

et en utilisant le théorème de comparaison classique, on prouve l'existence d'une suite de processus adaptés (y_n, z_n) tel que $y_{n+1} \leq y_n$ p.s. La suite approximante peut être choisie de telle façon que

$$|\,f_n(t,y,z)| \leq K(1+|y|+\|z\|),$$

si on designe par $(y_\pm, z_\pm)$ la solution de l'équation rétrograde

$$y_\pm\,(t) \in \xi + \int_t^1 \pm K(1+|y_\pm\,(s)|+\|z_\pm\,(s)\|)ds - \int_t^1 z_\pm\,(s)\,dW_s.$$

Par le théorème de comparaison de nouveau on obtient

$$y_- \leq y_n \leq y_+$$

et par suite si on note

$$y\,(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} y_n\,(t,\omega)$$

cette convergence a lieu également dans $L^2\,[\Omega \times [0,1]]$. Soit $\varepsilon > 0$, en utilisant la formule d'Ito de nouveau on a

$$I\!E\,|y_n\,(t) - y_m\,(t)|^2 + I\!E \int_t^1 \|z_n\,(s) - z_m\,(s)\|^2\,ds \leq$$

$$C_\varepsilon I\!E \int_t^1 |y_n\,(s) - y_m\,(s)|^2\,ds + \varepsilon \sup_n \Big(I\!E \max_{0\leq t\leq 1} |y_n\,(t)|^2 + I\!E \int_0^1 \|z_n\,(s)\|^2\,ds \Big).$$

La condition de croissance au plus linéaire imposée à la multifonction F assure que

$$\sup_n \left(I\!\!E \max_{0 \le t \le 1} |y_n(t)|^2 + I\!\!E \int_0^1 \|z_n(s)\|^2 \, ds \right) < \infty,$$

en faisant tendre n et m vers l'infini, on obtient

$$\lim_{n,m \to \infty} I\!\!E \int_0^1 \|z_n(s) - z_m(s)\|^2 \, ds \le C\varepsilon,$$

la suite $(z_n)_{n \ge 0}$ est une suite de Cauchy dans $L^2[\Omega \times [0,1]]$; en prenant une sous suite, on peut supposer que $(z_n)_{n \ge 0}$ converge presque surement vers une limite z. En utilisant la continuité de la séléction f et le théorème de la convergence dominée, on montre que (y, z) est une solution de notre inclusion différentielle stochastique rétrograde. □

References

1. J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions, Set Valued Maps and Viability*, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag, 1984.
2. A. Bensoussan et J. L. Lions, *Applications des inéquations variationnelles en controle optimale stochastique*, Bordas, Paris, 1978.
3. A. Bouchen, *Intégration et équations différentielles stochastiques multivoques*, Thèse, Université cadi Ayyad, Faculté des sciences Semlalia, Marrakech, Maroc, 1994.
4. Cépa, Thèse d'Université d'Orléans, 1994.
5. C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math. 580, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977.
6. C. Dellacherie et P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiel*, Chap I-IV et Chap V-VIII. Hermann, Paris, 1975-1980.
7. F. Hiai, *Multivalued stochastic integrals and stochastic differential inclusions*, Preprint (1985).
8. F. Hiai and H. Umegaki, *Integrals conditional expectation and martingales of multivalued functions*, J. Multivariate Anal. **7** (1977), 149-182.
9. I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo, Springer-Verlag, 1988.
10. M. T. Loumi, *Intégration stochastique multivoque et application aux équations différentielles multivoques*, Thèse, Académie de Montpellier, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1986.

11. E. Pardoux and S. Peng, *Adapted solution of backward stochastic differential equation*, Syst. Contr. Lett. **14** (1990), 55-61.

12. P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong, Springer-Verlag, 1980.

13. D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1991.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Mathématiques, B.P. S 15, 40000 Marrakech, MAROC
E-mail: fssm.math@casanet.net.ma

Université Nationale de Côte d'Ivoire
Centre universitaire de Cocady
Abidjan 22, Côte d'Ivoire.