ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 21, Number 1, 1996, pp. 95–108

PSEUDOCONVEXITÉ DES DOMAINES D'EXISTENCE DES FONCTIONS MÉROMORPHES À VALEURS VECTORIELLES

TRAN HUU NAM ET BUI DAC TAC

Résumé. Dans cet article il est démontré que tout domaine d'existence d'une fonction méromorphe définie sur un domaine étalé au-dessus d'un espace de Banach à valeurs dans un dual de l'espace de Fréchet ou dans un espace de Fréchet possédant une norme continue est pseudoconvexe.

Introduction

Soient Ω un domaine étalé au-dessus d'un espace localement convexe et F un espace complet localement convexe. Une fonction holomorphe $f : \Omega_0 \to F$ définie sur un sousensemble ouvert et dense dans Ω à valeurs dans F est dite méromorphe sur Ω s'il existe pour tout $z \in \Omega$ un voisinage U de z et des fonctions holomorphes $h : U \to F$, $\sigma : U \to \mathbf{C}$ telles que

$$f\Big|_{\Omega_0 \cap U} = \frac{h}{\sigma}\Big|_{\Omega_0 \cap U}.$$

Par la méthode de la théorie de faisceau comme dans [8], nous pouvons construire un domaine étalé Ω_f^m au-dessus de E, qui est le plus large domaine auquel f est prolongeable en une fonction méromorphe $\hat{f}$. Un tel domaine est appelé domaine d'existence de f. Il faut noter que la pseudoconvexité du domaine d'existence de la fonction scalaire méromorphe sur le domaine étalé au-dessus d'un espace de Banach a été établie par Aurich [1]. Dans le cas d'espaces localement convexes, le résultat a été généralisé par Harita [3]. Il semble que la méthode et la technique de Harita sont difficilement applicables aux cas où les espaces de valeurs ne restent pas scalaires.

Le but de cet article est d'établir la pseudoconvexité du domaine d'existence des fonctions méromorphes à valeurs vectorielles. Dans la première section la pseudoconvexité est étudie sous la condition de séparabilité portant sur le domaine de définition (i.e. sur E). Ensuite, dans la seconde, le resultat sera géneralisé par l'élimination de la condition de séparabilité.

Received May 8, 1995; in revised form October 5, 1995.

§1. Pseudoconvexité des domaines d'existence des fonctions méromorphes à Banach - valeurs, définies sur un domaine étalé au-dessus d'un espace de Banach séparable

Soient Ω un domaine étalé au-dessus d'un espace de Banach séparable E et $f : \Omega \to F$ une fonction holomorphe à valeurs dans un espace de Banach F. Par Ω_f^h on désigne le domaine d'existence de f. Hirschowitz dans [4] a démontré qu'il existe $x^* \in F^*$, le dual de F, tel que $\Omega_f^h = \Omega_{x^* f}^h$. Par conséquent Ω_f^h est pseudoconvexe. Il faut remarquer encore que Hirschowitz dans [5] a montré qu'il existe un domaine d'existence d'une fonction holomorphe à Banach - valeurs qui n'est pas le domaine d'aucune fonction scalaire holomorphe. En basant sur l'exemple de Hirschowitz nous démontrons d'abord le résultat suivant.

1.1. Proposition. *Il existe un domaine d'existence d'une fonction méromorphe à Banach - valeurs qui n'est pas le domaine d'existence d'aucune fonction scalaire méromorphe.*

Démonstration. Soit X l'espace de fonctions continues à support compact sur un ensemble de nombres ordinaux de seconde classe muni de la topologie d'ordre. Par B on désigne la boule d'unité dans X. Supposons par l'absurde que B soit le domaine d'existence d'une function scalaire méromorphe f. Fixons $x_0 \in B \setminus P(f)$, où $P(f) := \{x \in B :$ f n'est pas holomorphe en $x\}$. Dans [5], Hirschowitz a démontré qu'il existe un nombre de seconde ordre α_0 tel que

$$X_0 := \Big\{\varphi \in X : \text{supp } \varphi \subset [0, \alpha_0]\Big\}$$

est séparable et $f\big|_U$ se factorise holomorphiquement à travers la projection canonique $R : X \to X_0$ pour un voisinage U de x_0 dans $B \setminus P(f)$. Posons

$$W = \Big\{x \in B \setminus P(f) : f \text{ se factorise holomorphiquement à travers } R \text{ sur}$$
$$\text{un voisinage } U_x \text{ de } x \text{ dans } B \setminus P(f) \text{ avec le nombre d'ordre } \alpha_0\Big\}.$$

Il est évident que W est ouvert et fermé dans $B \setminus P(f)$ connexe, donc on a $W = B \setminus P(f)$. D'autre part $R^{-1}(y) \cap (B \setminus P(f))$ est connexe pour tout $y \in R(B \setminus P(f))$, alors $f\big|_{R^{-1}(y) \cap (B \setminus P(f))}$ est constante et donc f est global-holomorphiquement factorisée à travers $R : B \setminus P(f) \longrightarrow R(B \setminus P(f))$. Comme R est la projection, il s'ensuit que f est holomorphiquement prolongée à un domaine qui est plus large que $B \setminus P(f)$. C'est impossible car $B \setminus P(f)$ est le domaine d'existence de la fonction holomorphe $f\big|_{B \setminus P(f)}$.

Il nous reste de montrer que B est le domaine d'existence d'une fonction méromorphe à Banach - valeurs. Prénons une suite dense de nombres rationels $\{\alpha_n\} \subset [0, 2\pi]$ et une suite de nombres complexes $\{a_n\}$, telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Pour $z \in \Delta$, la boule d'unité ouverte dans $\mathbf{C}$, posons

$$g(z) = \exp\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z - e^{i\alpha_n}} \Big\}.$$

Il est facil de voir que $g(z)$ est holomorphe sur Δ qui n'est pas méromorphiquement prolongée en aucun point de $\partial\Delta$. Considérons le dévelopement de Taylor de g en $0 \in \Delta$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \; |z|^n < +\infty$ pour tout z, $|z| < 1$, on peut définir une fonction F sur B par la formule

$$F(u) = g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n, \quad \|u\| < 1.$$

Évidement, F est holomorphe sur B. Supposons que F est méromorphiquement prolongée à un voisinage U de $u_0 \in \partial B$. Prénons un élement x_0 et un nombre $\varepsilon > 0$ de façon que

$$|u_0(x_0)| = 1 \quad \text{et} \quad (1+z)u_0 \in U \quad \text{pour} \quad |z| < \varepsilon.$$

Comme $F((1+z)u_0)(x_0) = g((1+z)u_0(x_0))$ pour $|z| < \varepsilon$ tel que $(1+z)u_0 \in B$, il s'ensuit que $g((1+z)u_0(x_0))$ est méromorphe sur $\{z : |z| < \varepsilon\}$. C'est impossible car g n'est pas méromorphiquement prolongée en $u_0(x_0)$. La proposition est démontrée.

1.2. Théorème. *Soient Ω un domaine étalé au-dessus d'un espace de Banach séparable E et $f : \Omega \to F$ une fonction méromorphe à valeurs dans un espace de Banach F. Alors le domaine d'existence Ω_f^m de f est l'intersection de deux domaines d'existence de fonctions scalaires méromorphes.*

Démonstration. Par $\hat{f}$ on désigne l'extension canonique de f sur Ω_f^m. Si on pose

$$\Omega^0 = \Omega_f^m \setminus P(\hat{f}) \quad \text{et} \quad f^0 = \hat{f}\big|_{\Omega^0}$$

alors Ω^0 est le domaine d'existence de f^0 considerée comme une fonction holomorphe. Étant E séparable, d'après le résultat de Hirschowitz [4], il existe $y^* \in F$ tel que $\Omega^0 = \Omega^h_{y^* f^0}$. Nous démontrons que

$$\Omega^m_{y^*\hat{f}} \setminus \Omega_f^m \subset P(\widehat{y^*\hat{f}}).$$

En effet, soit $t_0 \in \Omega^m_{y^*\hat{f}} \setminus \Omega^m_{\hat{f}}$ et supposons que $y^*\hat{f}$ soit holomorphe en t_0. Comme $\Omega^h_{y^* f^0} = \Omega^0$, il s'ensuit que $t_0 \in \Omega^0$ et donc $t_0 \in \Omega_f^m \setminus P(\hat{f})$. C'est impossible. Comme E est séparable, $\Omega^m_{y^* f}$ est de même. On peut trouver une suite $\{z_j\} \subset R(P(\widehat{y^*\hat{f}})) \setminus \Omega_f^m$ telle que l'ensemble $\{z_j\}$ est dense dans $P(\widehat{y^*\hat{f}}) \setminus \Omega_f^m$ où $R(P(\widehat{y^*\hat{f}}))$ désigne le locus régulier de $P(\widehat{y^*\hat{f}})$. Pour chaque $j \geq 1$, prénons un voisinage U_j de z_j :

$$U_j = z_j + \Delta \times V_j$$

où Δ est la boule d'unité dans $\mathbf{C}$ et V_j est un voisinage de zero dans un espace de Banach tel que $R(P(\widehat{y^*\hat{f}})) \cap U_j = z_j + 0 \times V_j$. On peut supposer que $z_j = (0,0)$. Considérons le dévelopement de Laurent de $\hat{f}$ en $(0,0)$:

$$\hat{f}(\lambda, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^j(z)\lambda^k,$$

où $a_k^j(z)$ sont des fonctions holomorphes à valeurs dans F. Comme $z_j \notin \Omega_f^m$, il existe un nombre infini d'indices k tels que $a_k^j(z) \neq 0$. Pour chaque $j \geq 0$ $k < 0$, notons

$$A(j,k) = \Big\{x^* \in F^*;\ x^*(a_k^j(z)) \neq 0\Big\}.$$

Il est facil de voir que $A(j,k)$ est ouvert et dense dans F^*. Comme F^* est un espace de Baire, on a $\cap A(j,k) \neq \emptyset$. Par conséquent pour chaque $t^* \in \cap A(j,k)$, la fonction $t^*\hat{f}$ n'est pas méromorphiquement prolongée en z_j. Par la densité de $\{z_j\}$ dans $P(\widehat{y^*\hat{f}}) \setminus \Omega_f^m$, $t^*\hat{f}$ n'est pas méromorphiquement prolongée à $P(\widehat{y^*\hat{f}}) \setminus \Omega_f^m$.

Maintenant nous prouvons que $\Omega_f^m = \Omega^m_{y^*\hat{f}} \cap \Omega^m_{t^*\hat{f}}$. Évidement, $\Omega_f^m \subset \Omega^m_{y^*\hat{f}} \cap \Omega^m_{t^*\hat{f}}$. Soit donné $z \in \Omega^m_{y^*\hat{f}} \cap \Omega^m_{t^*\hat{f}}$. Comme $t^*\hat{f}$ est méromorphe en z, il s'ensuit que $z \notin P(\widehat{y^*\hat{f}}) \setminus \Omega_f^m$. Donc $z \in \Omega_f^m$ parce qu'il se trouve déjà dans $\Omega^m_{y^*\hat{f}}$ et que $\Omega^m_{y^*\hat{f}} \setminus \Omega_f^m \subset P(\widehat{y^*\hat{f}})$. Le théorème est démontré.

1.3. Corollaire. *Tout domaine d'existence de fonction méromorphe à Banach valeurs, au-dessus d'un espace séparable de Banach est pseudoconvexe.*

Remarque. Jusqu'à présent on ne sait pas si le théorème 1.2 est encore vrai en cas E n'est pas séparable (même si f est méromorphe à valeurs dans C^2).

§2. Pseudoconvexité des domaines d'existence des fonctions méromorphes définies sur un domaine étalé au-dessus d'un espace de Banach (non-séparable)

En basant sur le résultat obtenu dans le première section nous démontrerons le théorème suivant.

2.1. Théorème. *Soient Ω un domain étalé au-dessus d'un espace de Banach E et $f : \Omega \to F^*$ une fonction méromorphe de Ω dans un dual de l'espace de Fréchet F. Alors Ω_f^m est pseudoconvexe.*

Démonstration. Nous considérons d'abord le cas où F est un espace de Banach. On note $\mathcal{F}$ la famille de tous sousespaces séparables et fermés Q dans E tels que: $f_Q = f\big|_{p^{-1}(Q)}$ soient méromorphes sur $\Omega_Q := p^{-1}(Q)$ où $p : \Omega \to E$ est supposé d'être un biholomorphisme local définissant Ω comme un domaine étalé au-dessus de E. Pour $z \in \Omega_f^m$ (resp. $z' \in \Omega^m_{Q,f_Q}$) on note $d_{\Omega_f^m}(z)$, $d_{\Omega^m_{Q,f_Q}}(z')$ les distances - frontière définies par les formules:

$$d_{\Omega_f^m}(z) = \sup \Big\{ r > 0 : W \ni z \quad \text{tel que} \quad \tilde{p}\big|_W : W \simeq B_E(\tilde{p}(z), r) \Big\}$$

$$d_{\Omega^m_{Q,f_Q}}(z') = \sup \Big\{ r' > 0 : V \ni z' \quad \text{tel que} \quad \tilde{p}_Q\big|_V : V \simeq B_Q(\tilde{p}_Q(z'), r') \Big\}.$$

où $\tilde{p}$ (resp. $\tilde{p}_Q$) sont les extensions canoniques de p (et resp. de $p_Q := p\big|_{\Omega_Q}$).

Pour chaque $z \in \Omega_f^m$ on pose $\mathcal{F}_z = \Big\{ Q \in \mathcal{F} : \Omega^m_{Q,f_Q} \ni z \Big\}$.

On montrera que

$$d_{\Omega_f^m}(z) = \inf\ \Big\{ d_{\Omega^m_{Q,f_Q}}(z) :\ Q \in \mathcal{F}_z \Big\}. \tag{1}$$

Évidement

$$0 < d_{\Omega_f^m}(z) \leq r_z := \inf\ \Big\{ d_{\Omega^m_{Q,f_Q}}(z) :\ Q \in \mathcal{F}_z \Big\}.$$

Il nous reste de montrer que $d_{\Omega_f^m}(z) \geq r_z$. Pour cela il suffit de montrer que la fonction $g := \tilde{f}.\big(\tilde{p}\big|_U\big)^{-1}$ est méromorphiquement prolongée sur $B_E(\tilde{p}(z), r_z)$, (ici U est un voisinage convenablement chosi:

$$\tilde{p}\big|_U : U \simeq B_E(\tilde{p}(z), \delta), \quad 0 < \delta < r_z).$$

Pour tout $Q \in \mathcal{F}_z$ on désigne U_Q le voisinage connexe de z dans Ω^m_{Q,f_Q} tel que:

$$\tilde{p}_Q : U_Q \simeq B_Q(\tilde{p}(z), r_z) := \Big\{ x \in Q : \|x - \tilde{p}(z)\| < r_z \Big\}.$$

On observe que la restriction $g\big|_{Q \cap B_E(\tilde{p}(z),\delta)}$ est méromorphiquement prolongée en fonction $g_Q := \tilde{f}_Q.\big(\tilde{p}_Q\big|_{U_Q}\big)^{-1}$.

Comme $B_E(\tilde{p}(z), r_z) = \bigcup \Big\{ B_Q(\tilde{p}(z), r_z) : Q \in \mathcal{F}_z \Big\}$ on peut définir la fonction g sur $B_E(\tilde{p}(z), r_z)$ par la formule $g(x) = g_Q(x)$ pour $x \in B_Q(\tilde{p}(z), r_z)$. Il est visible que la définition de g est indépendant du choix de Q. Si on note

$$H = \bigcup \Big\{ P\Big(\tilde{f}_Q.\big(\tilde{p}_Q\big|_{U_Q}\big)^{-1}\Big) : Q \in \mathcal{F}_z \Big\} \bigcap B_E(\tilde{p}(z), r_z)$$

alors H sera fermé dans $B_E(\tilde{p}(z), r_z)$. En éffet, soit donnée une suite $\{x_n\} \subset H$ telle que $x_n \to x \in B_E(\tilde{p}(z), r_z)$. Pour chaque $n \geq 1$, choisissons $Q_n \in \mathcal{F}_z$ tel que $x_n \in P(\tilde{f}_{Q_n})$. Notons $Q^* \in \mathcal{F}_z$, l'espace fermé engendré par $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$. Alors $\{x_n\} \in P\Big(\tilde{f}_{Q^*}\ .\big(\tilde{p}_{Q^*}\big|_{U_{Q^*}}\big)^{-1}\Big)$ et par conséquent $x \in P\Big(\tilde{f}_{Q^*}\ .\big(\tilde{p}_{Q^*}\big|_{U_{Q^*}}\big)^{-1}\Big) \subset H$. D'après lemme 2.2 ci-desous H est hypersurface dans $B_E(\tilde{p}(z), r_z)$. Soient donné maintenant $z_0 \in R(H)$, le locus régulier de H. Nous prouvons que g est méromorphiquement prolongée en z_0. On peut considérer $z_0 = 0$. Il existe un voisinage de z_0 de la forme $W = \Delta e \times V$, $e \in E$ tel que $H \cap W = 0 \times V$. Parce que g

est holomorphe sur $\Delta^* e \times V$, nous pouvons considérer le dévelopement de Laurent de g en $z_0 = (0,0)$:

$$g(t,z') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z')t^k, \quad \forall (t,z') \in \Delta^* \times V. \tag{2}$$

Il existe alors $k_0 \in Z$ tel que $a_k(z') = 0$, $\forall k \leq k_0$, $z' \in V$. Sinon on peut choisir une suite $\{k_j\} \to -\infty$ et une suite de points $\{z'_{k_j}\}$ dans V, $z'_{k_j} \to 0$ telle que $a_{k_j}(z'_{k_j}) \neq 0$. Notons Q_0 l'espace séparable fermé engendré par la suite $\{z'_{k_j}\}$ et e. Considérons le dévelopement de Laurent de g_{Q_0} en $0 \in Q_0$

$$g_{Q_0}(t,z') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{Q_0}(z')t^k, \quad \forall (t,z') \in (\Delta^* \times V) \cap Q_0$$

où $b_k^{Q_0}(z') = 0$, $\forall k \leq k_1$.

En tenant compte de l'unicité du dévelopement de Laurent on a

$$a_{k_j}(z'_{k_j}) = b_{k_j}^{Q_0}(z'_{k_j}) = 0, \quad \forall k_j \leq k_1.$$

C'est une contradiction au fait que $a_{k_j}(z'_{k_j}) \neq 0$. Donc les coefficients $a_k(z')$ dans (2) sont nuls pour $k \leq k_0$. D'où g est méromorphiquement prolongée en tout point $z_0 \in R(H)$. Et donc, par [2] g est méromorphiquement prolongée aussi en tout point $z_0 \in B_E(\tilde{p}(z), r_z) \cap S(H)$, le locus singulier de H. Par conséquent (1) est démontrée.

Parce que Ω^m_{Q,f_Q} est pseudoconvexe, la fonction $-\log d_{\Omega^m_{Q,f_Q}}$ est plurisousharmonique. Donc la pseudoconvexité de Ω^m_f est prouvée par (1).

Maintenant nous passons au cas général où F est un espace de Fréchet. On note $\mathcal{B}(F)$ l'ensemble de tous les sousensembles bornés dans F. Pour tout $K \in \mathcal{B}(F)$ on note ρ_K la sup-seminorme sur K et $\omega_{\rho_K} : F^* \to F^*_{\rho_K}$ l'application canonique de F^* dans l'espace de Banach associé à seminorme ρ_K. Pour K, $K' \in \mathcal{B}(F)$, $K \subset K'$ on note $\rho_{K'K}$ l'application canonique de $F^*_{\rho_{K'}}$ dans $F^*_{\rho_K}$ telle que $\omega_{\rho_K} = \omega_{\rho_{K'K}}\omega_{\rho_{K'}}$. Ensuite nous observons que l'application composée $\omega_{\rho_K}\tilde{f} : \Omega^m_f \to F^* \to F^*_{\rho_K}$ et $\widetilde{(\omega_{\rho_K} f)}$ sont des extensions de $\omega_{\rho_K} f$. Parce que $\Omega^m_{\omega_{\rho_K} f}$ est extension maximale il existe un morphisme φ_K de Ω^m_f dans $\Omega^m_{\omega_{\rho_K} f}$ tel que $\quad \tilde{p} = p_K \varphi_K$.

Comme $\omega_{\rho_K} f = \omega_{\rho_{K'K}}\omega_{\rho_{K'}} f$ et $\omega_{\rho_{K'}} f$ est méromorphiquement prolongée sur $\Omega^m_{\omega_{\rho_{K'}} f}$, alors $\omega_{\rho_K} f$ est méromorphiquement prolongée aussi sur $\Omega^m_{\omega_{\rho_{K'}}f}$. Il existe donc un morphisme $\varphi_{K'K}$ de $\Omega^m_{\omega_{\rho_{K'}}f}$ dans $\Omega^m_{\omega_{\rho_K}f}$ tel que $p_{K'} = p_K\varphi_{K'K}$. Posons

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega} &= \lim\ \operatorname{proj} \Omega^m_{\omega_{\rho_K}f}\\ &:= \Big\{(z_K) : z_K \in \Omega^m_{\rho_{K'}f},\ \varphi_{K'K}(z_{K'}) = z_K \text{ pour tout } K \subset K'\Big\}.\end{aligned}$$

Nous montrons que $r_z := \inf\ \Big\{d_{\Omega^m_{\omega_{\rho_K}f}}(z_K),\ K \in \mathcal{B}(F)\Big\} > 0$. Sinon il existe une suite des sousensembles bornés $\{K_n\}$ dans F tel que

$$\lim_{n\to\infty}\ d_{\Omega^m_{\omega_{\rho_{K_n}}f}}(z_{K_n}) = 0.$$

F etant un espace de Fréchet, on peut choisir une suite des nombres positifs $\varepsilon_n \searrow 0$ telle que l'ensemble $K := \bigcup_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n K_n$ est aussi borné dans F. On a alors

$$0 < d_{\Omega^m_{\omega_{\rho_K}f}}(z_K) \le \lim_{n\to\infty}\ d_{\Omega^m_{\omega_{\rho_{K_n}}f}}(z_{K_n}) = 0.$$

C'est impossible. Donc $r_z > 0$.

Comme $p_K(z_K) = p_{K'}(z'_K)$ $(\forall K \subset K')$, il est natural de définir la projection $\hat{p} : \widehat{\Omega} \to E$

$$\hat{p}(z) = p_K(z_K).$$

Alors $(\widehat{\Omega}, \hat{p})$ est un domaine étalé au-dessus de E. Il faut noter que $\Omega^m_f \subset \widehat{\Omega}$.

En effet si $z \in \Omega^m_f$, $z = (z_K)$, où $z_K = \varphi_K(z) \in \Omega^m_{\omega_{\rho_K}f}$, évidement $\inf\ \Big\{d_{\Omega^m_{\omega_{\rho_K}f}}(z_K) : K \in \mathcal{B}(F)\Big\} \ge d_{\Omega^m_f}(z) > 0$. Par consequent $(z_K) \in \widehat{\Omega}$ et $\Omega^m_f \subset \widehat{\Omega}$. Il nous reste de démontrer que $\tilde{f}$ est méromorphiquement prolongée sur $\widehat{\Omega}$. Soit donnée $z = (z_K) \in \widehat{\Omega}$. Si $z_K \notin P\big(\widetilde{\omega_{\rho_K}f}\big)$ pour tout $K \in \mathcal{B}(F)$, $\tilde{f}$ est holomorphe en z. Notons

$$S = \Big\{z = (z_K) \in \widehat{\Omega} : \exists z_K \in P\big(\widetilde{\omega_{\rho_K}f}\big)\Big\}.$$

Comme F est un espace de Fréchet, il est facil de voir que S est fermé dans $\widehat{\Omega}$. La fonction $\tilde{f}$ etant holomorphe en tout point $z \in \hat{\Omega} \setminus S$, par [2], il suffit de montrer que $\tilde{f}$ est méromorphe en tout point régulier de S. Soit donné $z^0 \in R(S)$. Notons $p_K(z^0_K) = \hat{p}(z^0) = a$. Il existe un voisinage U

de z^0 tel que $\hat{p}\big|_U : U \simeq B_E(\hat{p}(z^0), r_{z^0})$. Pour chaque $K \in \mathcal{B}(F)$, il existe dans $\Omega_{\omega_{\rho_K} f}$ un voisinage U_K de z_K tel que

$$p_K\big|_{U_K} : U_K \simeq B_E(p_K(z_K^0), r_{z^0}) = B_E(\hat{p}(z^0), r_{z^0}) = B_E(a, r_{z^0}).$$

Pour simplicité on peut supposer que $a = 0$ et l'ensemble U soit de forme $U \simeq \Delta \times V$ où $S \cap U \simeq 0 \times V$. La fonction $\tilde{f}$ est holomorphe sur $\Delta^* \times V$. Considerons le dévelopement de Laurent de $\tilde{f}$ en z^0

$$\hat{f}(\lambda, z') = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z')\lambda^n, \quad \forall(\lambda, z') \in \Delta^* \times V. \tag{3}$$

On peut affirmer qu'il existe n_0 tel que

$$a_n(z') = 0, \quad \forall n \leq n_0.$$

Sinon il existe une suite $\{z'_{n_j}\} \subset V$, $z'_{n_j} \to 0$ telle que $a_{n_j}(z'_{n_j}) \neq 0$, $\forall j$ $(n_j \to -\infty)$. Pour chaque n_j, il existe un ensemble borné K_{n_j} de façon que

$$\big\|a_{n_j}(z'_{n_j})\big\|_{K_{n_j}} = \sup_{x \in K_{n_j}} \big|a_{n_j}(z'_{n_j})(x)\big| = 1.$$

Choisissons une suite $\lambda_{n_j} \searrow 0$ telle que $K := \bigcup_j \lambda_{n_j} K_{n_j}$ est borné dans F. Parce que $z^0 \in \Omega^m_{\omega_{\rho_K} f}$, les coefficients dans (3) satisfont à $\rho_K(a_n(z')) = 0$ $\forall n \leq n_0$, $\forall z'$ dans un voisinage de z^0. En particulier

$$\big\|a_{n_j}(z'_{n_j})\big\|_K = 0.$$

D'autre part

$$\big\|a_{n_j}(z'_{n_j})\big\|_K \geq \big\|a_{n_j}(z'_{n_j})\big\|_{\lambda_n K_{n_j}} = \lambda_{n_j} > 0.$$

Cette contradiction prouve que $a_n(z') = 0$, $\forall n \leq n_0$. Donc $\tilde{f}$ est méromorphiquement prolongée en z^0. Puisque Ω^m_f est le domaine d'existence on a $\widehat{\Omega} = \Omega^m_f$. D'après Théorème 1.2 $\Omega^m_{\omega_{\rho_K} f}$ est pseudoconvexe, il s'ensuit que Ω^m_f est aussi pseudoconvexe.

2.2. Lemme. *Soit H un sousensemble fermé d'un ouvert G dans un espace de Banach B tel que $H \cap Q$ est une hypersurface dans $G \cap Q$ pour* *tout sousespace séparable et fermé Q dans B avec $Q \cap G \not\subset H$. Alors H est une hypersurface dans G.*

Démonstration. Soit donné $z_0 \in H$. On peut supposer que $z_0 = 0$. Fixons un élement $e \in B$ tel que $\lambda e \notin H$ pour tout $|\lambda| > 0$ suffisamment petit. Notons $\mathcal{F}$ la famille de tous sousespaces séparables, fermés Q dans B tels que $e \in Q$ et $Q \cap H$ est hypersurface dans $G \cap Q$. prenons $Q \in \mathcal{F}$. Alors il existe un voisinage U_Q dans $Q \cap G$ et une fonction holomorphe f_Q sur U_Q satisfaisant à

$$H \cap U_Q = Z(f_Q) := \big\{z \in U_Q : f_Q(z) = 0\big\}.$$

Écrivons

$$Q = (Ce)^{\perp} \oplus Ce$$

où $(Ce)^{\perp}$ est sous-espace complementaire de Ce dans Q tel que $f_Q(\lambda e) \neq 0$,
$0 < |\lambda| < \delta_Q$. D'après le Théorème de Weierstrass [3], il existe un voisinage W_Q de z_0 sous la forme

$$W_Q = V_Q \times \delta_Q \Delta e$$

(où Δ est le disc d'unite dans C et W_Q est tellement choisi qu'il est contenu dans U_Q) et une fonction holomorphe u non - nulle en tout point de W_Q telle que

$$f_Q(z', \lambda) = u(z', \lambda)(\lambda^{n_Q^f} + a^Q_{n_Q^f - 1}(z')\lambda^{n_Q^f - 1} + \cdots + a_0^Q(z')).$$

Posons

$$P_Q^f(z', \lambda) = \lambda^{n_Q^f} + a^Q_{n_Q^f - 1}(z')\lambda^{n_Q^f - 1} + \cdots + a_0^Q(z').$$

On en déduit

$$(*) \qquad H \cap W_Q = Z(P_Q^f)$$

Posons $n_Q = \inf\big\{n_Q^f : f \text{ satisfait à}(*)\big\}$. Nous montrons que

$$m := \sup\ \big\{n_Q : Q \in \mathcal{F}\big\} < +\infty.$$

Supposons par absurde que $m = +\infty$. Il existe $Q_j \in \mathcal{F}$ telle que $n_{Q_j} \to +\infty$. Si on pose $\tilde{Q} = \overline{\text{span}(\cup Q_j)}$, alors $\tilde{Q} \in \mathcal{F}$ et $n_{\tilde{Q}} \geq n_{Q_j}$,

$\forall j \geq 1$. C'est imposible. Donc il existe $Q^* \in \mathcal{F}$, $n_{Q^*} = m$ et pour chaque $Q \in \mathcal{F}^* = \{Q \in \mathcal{F} : Q \supset Q^*\}$ on peut trouver un voisinage $W_Q^1 := V_Q^1 \times \delta_Q^1 \Delta e$ de $0 \in Q$ et un polynôme de Weierstrass

$$P_Q(z', \lambda) = \lambda^m + a_{m-1}^Q \lambda^{m-1} + \cdots + a_0^Q(z') \quad \text{sur} \quad W_Q^1$$

tels que

$$W_Q^1 \cap Z(P_Q) = W_Q^1 \cap H.$$

Maintenant pour Q_1, $Q_2 \in \mathcal{F}^*$, de la relation

$$W_{Q_1}^1 \cap W_{Q_2}^1 \cap Z(P_{Q_1}) = W_{Q_1}^1 \cap W_{Q_2}^1 \cap H = W_{Q_1}^1 \cap W_{Q_2}^1 \cap Z(P_{Q_2})$$

Il en résulte

$$P_{Q_2}\big|_{W_{Q_1}^1 \cap W_{Q_2}^1} = P_{Q_1}\big|_{W_{Q_1}^1 \cap W_{Q_2}^1}.$$

Posons $W = U\{W_Q^1 : Q \in \mathcal{F}^*\}$. Alors W est un voisinage de z_0 dans G et la famille $\{P_Q : Q \in \mathcal{F}^*\}$ définit une fonction holomorphe P sur un ouvert $W_0 \subset W$ telle que

$$W_0 \cap H = Z(P).$$

Donc H est une hypersurface dans G.

Avant d'énoncer Théorème 2.3 il faut introduire quelques notations. Soit $\mathcal{F}$ la famille directe de sous-ensembles finis de fonctions scalaires méromorphes sur Ω. Pour tout $\Phi \in \mathcal{F}$ on note Ω_Φ^m, l'enveloppe de méromorphie par rapport à Φ. C'est le domaine maximale pour lequel toute fonction méromorphe $f \in \Phi$ est méromorphiquement prolongée sur Ω_Φ^m. Soient données Φ, $\Phi' \in \mathcal{F}$, $\Phi \subset \Phi'$ il existe alors un morphisme $\varphi_{\Phi'\Phi}$ de $\Omega_{\Phi'}^m$ dans Ω_Φ^m tel que $p_{\Phi'} = p_\Phi \varphi_{\Phi'\Phi}$ où p_Φ, $p_{\Phi'}$ sont projections canoniques sur E. Notons

$$\operatorname{Int}\Big\{\bigcap_{f \in \mathcal{F}} \Omega_f^m\Big\} := \Big\{(x_\Phi) \in \lim \operatorname{proj} \Omega_\Phi^m : \inf\big\{d_\Phi(x_\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}\big\} > 0\Big\},$$

où $d_\Phi(x_\Phi)$ est distance - frontière relative à Ω_Φ^m.

2.3. Théorème. *Soit F un espace de Fréchet. Alors F posséde une norme continue si et seulement si pour toute fonction méromorphe $f : \Omega \to F$, on a*

$$\Omega_f^m = int\left(\cap\left\{\Omega_{x^*f}^m : x^* \in F^*\right\}\right) \tag{1}$$

où Ω est un domaine étalé au-dessus d'un espace de Banach séparable.

Démonstration.

Nécessité. Soit $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \dots$ une suite de normes qui définit la topologie sur l'espace de Fréchet F. Notons $\omega_n : F \to F_n$ et $\omega_{kn} : F_k \to F_n$ les applications canoniques. Parce que $\omega_n \tilde{f}\big|_\Omega = \big(\widetilde{\omega_n f}\big)\big|_\Omega$, il existe un morphisme $\varphi_n : \Omega_f^m \to \Omega_{\omega_n f}^m$ telle que $\tilde{p} = p_n \varphi_n$ où $\tilde{p}$ et p_n sont projections canoniques de Ω_f^m (resp. de $\Omega_{\omega_n f}^m$) sur E. Il existe encore morphisme φ_{kn} de $\Omega_{\omega_k f}^m$ dans $\Omega_{\omega_n f}^m$ tel que

$$p_k = p_n \varphi_{kn}.$$

Posons

$$\widehat{\Omega} = \Big\{ z = (z_n) \in \lim \text{ proj } \Omega_{\omega_n f}^m : \inf \ \big\{ d_{\Omega_{\omega_n f}^m}(z_n) : n \geq 1 \big\} > 0 \Big\}$$

et

$$\hat{p} : \widehat{\Omega} \to E \text{ par } \hat{p}(z) = p_n(z_n) = \cdots = p_1(z_1) = a.$$

Nous montrerons que $\widehat{\Omega} \simeq \Omega_f^m$. Évidement $\Omega_f^m \subset \widehat{\Omega}$ parce que

$$\inf \ \big\{ d_{\Omega_{\omega_n f}^m}(z_n) \big\} \geq d_{\Omega_f^m}(z) \quad \text{pour tout} \quad z = (z_n) \in \Omega_f^m,$$

où $z_n = \varphi_n(z)$.

On peut prolonger la fonction $\tilde{f}$ en fonction $\widehat{\tilde{f}} : \hat{\Omega} \to F \simeq \lim \ \text{Proj} F_n$ par formule

$$\widehat{\tilde{f}}(z) = \big((\widetilde{w_n f})(z_n) \big)_n, \ z = \big(z_n\big)_n \in \hat{\Omega}.$$

Pour démontrer $\hat{\Omega} \subset \Omega_f^m$ il suffit de démontrer que $\widehat{\tilde{f}}$ est méromorphiquement prolongée en tout point $z \in \widehat{\Omega}$. Si on note $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P(\widetilde{w_n f})$, alors $H = P(\widetilde{w_1 f})$ (par lemme 2.4 ci-desous). Évidement $\widehat{\tilde{f}}$ est holomorphe sur $\hat{\Omega} \setminus H$. Par [2], il nous reste de démontrer que $\widehat{\tilde{f}}$ est méromorphe en tout point $z_0 \in R(H)$. Soit donné $z_0 \in R(H)$. On peut considérer $z_0 = 0$. Il existe un voisinage U de z_0 tel que

$$U = \Delta \times V \quad \text{et} \quad U \cap P(\widetilde{\omega_1 f}) = 0 \times V.$$

Considerons le dévelopement de Laurent de $\widehat{\tilde{f}}$ en $z_0 = (0,0)$.

$$\widehat{\tilde{f}}(\lambda, z') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z') \lambda^k, \quad \forall z' \in \delta V \text{ et } 0 < |\lambda| < \delta.$$

Comme $z_0 \in P(\widetilde{\omega_1 f})$, on en déduit qu'il existe $k_0 \in Z$ tel que $\big\|a_k(z')\big\|_1 = 0$, $\forall k \le k_0$. Grâce à la continuité de norme $\big\|\cdot\big\|_1$, il s'ensuit que $a_k(z') = 0$ $\forall k \le k_0$. Donc $\widehat{\widetilde{f}}$ est méromorphe en z_0. Ainsi on a démontré que $\Omega_f^m = \widehat{\Omega}$.

En basant sur le Théorème 1.2 on peut déduire facilement la relation

$$\mathrm{Int}\big(\cap\big\{\Omega^m_{x^*f} : x^* \in F^*\big\}\big) = \widehat{\Omega}.$$

Donc la relation (1) est démontrée.

Suffisance. Supposons que (1) est verifiée et F ne posséde aucune norme continue. Alors F contient un sous-espace isomorphe à C^∞. Considérons la fonction méromorphe $f : C\setminus\{0\} \to C^\infty$ donnée par la formule $f(z) = (1, 1/z, 1/z^2, \dots)$. Comme $\Omega^m_{x^*f} = C$ pour tout $x^* \in (C^\infty)^*$ on a

$$\mathrm{int}\,\Big(\bigcap\big\{\Omega^m_{x^*f} : x^* \in (C^\infty)^*\big\}\Big) = C \ne \Omega^m_f = C\setminus\{0\}.$$

2.4. Lemme. *Soient F un espace de Fréchet possédant une norme continue et $f : \Omega \to F$ une fonction méromorphe (ici. Ω est un domain étalé au-dessus d'un espace de Banach séparable). Avec les notations comme dans le Théorème 2.3, on a*

$$P\big(\widetilde{\omega_1 f}\big) = P\big(\widetilde{\omega_k f}\big), \quad \forall k \ge 1.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in R\big(P\big(\widetilde{\omega_k f}\big)\big)$, $k \ge 1$. Pour simplicité on suppose que $z_0 = 0$. Alors il existe un voisinage de z_0 tel que $\big(\widetilde{\omega_k f}\big) : \Delta^* \times V \to F_k$ est holomorphe. Considerons le dévelopement de Laurent de $\big(\widetilde{\omega_k f}\big)$ en $z_0 = (0,0)$

$$\big(\widetilde{\omega_k f}\big)(\lambda, z') = \sum_{j=n_k}^{\infty} a_j^k(z')\lambda^j, \quad (n_k < 0)$$

parce que $\big\|\cdot\big\|_1$ est supposée norme continue sur F et $\rho = \big\|\cdot\big\|_1 \le \big\|\cdot\big\|_k$, on a

$$\big(\omega_1 f\big)\tilde{}(\lambda, z') = \sum_{j=n_k}^{\infty} \omega_{k1} a_j^k(z')\lambda^j, \quad (n_k < 0)$$

avec $\omega_{k1} a^k_{n_k}(z') \ne 0$. Ça montre que $z_0 \in P\big(\widetilde{\omega_1 f}\big)$.

De relation $P\big(\widetilde{\omega_k f}\big) = \overline{R(P(\widetilde{\omega_k f}))}$ on a $P(\widetilde{\omega_k f}) \subset P(\widetilde{\omega_1 f})$. Parce que l'inclusion inverse est triviale on obtient

$$P(\widetilde{\omega_k f}) = P(\widetilde{\omega_1 f}).$$

Du Théorème 2.3 on en déduit le corrollaire suivant.

2.5. Corollaire. Si F est un espace de Fréchet possédant une norme continue, alors Ω_f^m est pseudoconvexe pour toute fonction méromorphe $f : \Omega \to F$ définie sur un domaine étalé au-dessus d'un espace séparable de Banach.

Remerciements

Nous prenons plaisir à remercier le professeur N. V. Khue et le docteur L. M. Hai pour leur indications precieuses ainsi que monsieur l'arbitre pour ses remarques très utiles.

Bibliographie

1. V. Aurich, *Das meromorphe Levi Problem in unendlich-dimensionalen Banachräumen*, Bay Akad. Wiss. **5** (1979), 35-42.
2. P. K. Ban, N. V. Khue, N. T. Nga, *Extending vector - valued meromorphic functions and locally biholomorphic maps in infinite dimension*, Revue Roumaine Math. Pures Appl. **36**, 3-4 (1991), 169-179.
3. M. Harita, *Continuation of meromorphic functions in a locally convex space*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser A **41**, Vol 2 (1987), 115-132.
4. A. Hirschowitz, *Prolongement analytique en dimension infinite*, Ann. Inst. Fourier **22** (1972), 2, 255-292.
5. ______ , *Diverser notions d'ouverts d'analytique en dimention infinite*, Sém. Lelong (1969-1970), Lecture Notes. 205.
6. ______ , *Le problème de Lévi pour les espaces homogènes.* Bull. Soc. Math. France **103** (1975), 191-201.
7. N. V. Khue , *On meromorphic functions with values in locally convex spaces*, Studia Math. **73** (1982), 201-211.
8. B. Malgrange, *Lectures on the theory of functions of several complex variables*, Tata. Inst., Bombay 1958.
9. J. Mujica , *Complex analysis in Banach spaces.* North Holand Mathematics Studies N. 120, 1980.
10. H. Rossi , *Continuation of subvarieties of projective varieties*, Amer. J. Math. **91** (1969), 565-575.
11. B. D. Tac , *Extending holomorphic maps in infinite dimensions*, Ann. Polo. Math. LIV. 3 (1991).

L'École normale supérieure de Hanoi, Dich Vong, Tu Liem, Hanoi