ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 19, Number 2, 1994, pp. 85–96

ESPACE À POIDS $H_a^s(G)$ ET PROBLÈME AUX LIMITES ELLIPTIQUE

HOANG QUOC TOAN

1. Introduction

Soient G un domaine borné dans l'espace R^n, $L(x,D)$—un opérateur elliptique d'ordre $2m$ dans le domaine G, et $B_j(x,D)$, $j=1,2,\cdots,m$ $-m$ opérateurs aux limites d'ordres respectifs m_j, $m_j \leq 2m-1$, $j=1,2,\cdots,m$.

Dans le domaine G on considère une famille de domaines $\{G_t\}$ avec les frontières $\{\Gamma_t\}$, qui dépend du paramètre $t \in [0,1]$. Nous supposons que la famille des frontières $\{\Gamma_t\}$ dépendante lissement du paramètre t au sens de S.G. Krein (voir [1]) et de plus:

$$G_t \subset G_0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Dans la suite pour simplifier l'exposé nous supposons que la famille $\{G_t\}$ est croissante lorsque t tend vers zéro, c'est-à-dire que: $G_{t+\Delta t} \subset G_t, \Delta t > 0, \forall t \geq 0$.

Rappelons les propriétés sur la famille $\{\Gamma_t\}$ qui est lisse au sens de Krein: (voir [1], [3] ou [4]).

Soit $t \in [0,1]$, alors avec $|\Delta t|$ suffisanment petite, la surface $\Gamma_{t+\Delta t}$ dans les coordonnées locales dans un voisinage de la surface Γ_t est représentée par l'équation:

$$n = \kappa(x;t,\delta t), \quad |\kappa| \leq C|\Delta t|.$$

On pose $\Delta G_t = G_t \setminus G_{t+\Delta t}$. Alors pour toutes les fonctions $\varphi \in C^\infty(\Delta G_t)$ qui sont nulles ainsi que ses dérivées sur Γ_t (ou sur $\Gamma_{t+\Delta t}$), on a l'inégalité

$$||\varphi||_{H^{s-1}(\Delta G_t)} \leq C \cdot |\Delta t| \cdot ||\varphi||_{H^s(\Delta G_t)} \qquad \forall s \geq 1. \tag{1.1}$$

Received September 14th, 1993. Revised 18/9/1994.

On désigne par $(A_{\Delta t})$ l'opérateur dans $C^\infty(G)$ définie par la formule suivante:

$$(A_{\Delta t}\varphi)(x;n) = \varphi\left(x, \kappa(x;t,\Delta t)\right) - \varphi(x,0)$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées d'un point $x \in \Gamma_t$. Alors $A_{\Delta t}$ peut se prolonger en un opérateur continue de $H^{k-\frac{1}{2}+\alpha+1}(G)$ dans $H^{k-1+\alpha}(\Gamma_t)$ ($k \geq 1$, entière, $0 \leq \alpha < 1$) et:

$$||A_{\Delta t}\varphi||_{H^{k-1+\alpha}(\Gamma_t)} \leq C \cdot |\Delta t| \cdot ||\varphi||_{H^{k-\frac{1}{2}+\alpha+1}(G)}. \tag{1.2}$$

Maintenant on désigne par R_t l'opérateur de prolongement qui prolonge une fonction $u(x)$ définie dans le domaine G_t en une fonction $u_t = R_t\, u(x)$ dans le domaine G, telque:

$$R_t \in L\left\{H^{2m+s}(G_t),\ H^{2m+s}(G)\right\}, \quad 2m+s \leq N,$$

la famille des opérateurs $\{R_t\}$, $t \in [0,1]$ peut être construite de telle sorte que les normes $||R_t||$ sont majorées indépendanment de $t \in [0,1]$ et satisfont à la condition suivante:

$$||R_tS_tu - R_\tau S_\tau u||_{H^{2m+s-1}(G)} \leq C \cdot |t-\tau|||u||_{H^{2m+s}(G)} \tag{1.3}$$

$\forall u \in H^{2m+s}(G)$, $2m+s \leq N$, où S_t est l'opérateur de restriction au σ_t d'une fonction définie dans G (voir [2]).

2. Espace $H^s_a(G_0)$

Soit $\rho(t)$ une fonction continue de la variable $t \in [0,1]$ satisfaisant à la condition suivante:

(i) $\rho(t) > 0 \quad \forall t \in (0,1]$

(ii) $\lim\limits_{t\to 0}\rho(t) = 0$

(iii) Il existe deux nombres réels positifs C et a tels que:

$$\rho(t) \geq C \cdot t^a, \quad \forall t \in (0,1]. \tag{2.1}$$

Alors pour $s \geq 0$ on désigne par $H^s_a(G_0)$ l'ensemble des fonctions $f(x)$ définies dans G_0 tellesque les restrictions S_tf au domaine G_t, $0 < t \leq 1$

appartiennent à $H^s(G_t)$ et satisfont à la condition:

$$||f||_{H_a^s(G_0)} = \sup_{0<t\leq 1} \rho(t)||S_t f||_{H^s(G_t)} < +\infty. \tag{2.2}$$

Il est clair que le membre gauche de l'inégalité (2.2) désigne une norme dans $H_a^s(G_0)$, $s \geq 0$. En effet:

a) Tout d'abord si $f(x) \in H_a^s(G_0)$ satisfait à la condition:

$$||f||_{H_a^s(G_0)} = 0 \iff \sup_{0<t\leq 1} \rho(t)||f||_{H^s(G_t)} = 0,$$

on a $\forall t_0 \in (0,1] : \rho(t_0)||f||_{H^s(G_{t_0})} = 0$.

Donc $||f||_{H^s(G_{t_0})} = 0$. Alors il s'en suit que $f(x) \equiv 0$ dans $G_{t_0}, \forall t_0 \in (0,1]$.

Par ailleur si ω est un domaine ouvert arbitraire dans G_0, compte tenu du fait que: G_t tend vers G_0 lors que $t \to 0$, il existe $t_0 \in (0,1]$ tel que $\omega \subset G_{t_0}$. Par ce que $f(x) \equiv 0$ dans G_{t_0}, on en déduit que $f(x) \equiv 0$ dans ω. Comme ω est un ouvert arbitraire dans G_0, on obtient $f(x) \equiv 0$ dans G_0.

Par conséquent: $\forall f \in H_a^s(G_0)$ $||f||_{H_a^s(G_0)} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ dans G_0.

b) $\forall \lambda \in R$, $\forall f \in H_a^s(G_0)$ on a:

$$\begin{aligned} ||\lambda f||_{H_a^s(G_0)} &= \sup_{0<t\leq 1} \rho(t)||\lambda f||_{H^s(G_t)} = \sup_{0<t\leq 1} |\lambda|\rho(t)||f||_{H^s(G_t)} \\ &= |\lambda|||f||_{H_a^s(G_0)}. \end{aligned}$$

c) Si f_1 et $f_2 \in H_a^s(G_0)$ alors $f_1 + f_2 \in H_a^s(G_0)$ et:

$$\begin{aligned} ||f_1 + f_2||_{H_a^s(G_0)} &= \sup_{0<t\leq} \rho(t)||f_1 + f_2||_{H^s(G_t)} \\ &\leq \sup_{0<t\leq 1} \rho(t) \left\{||f_1||_{H^s(G_t)} + ||f_2||_{H^s(G_t)}\right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent on obtient que:

$$||f_1 + f_2||_{H_a^s(G_0)} \leq ||f_1||_{H_a^s(G_0)} + ||f_2||_{H_a^s(G_0)}$$

Donc l'ensemble $H_a^s(G_0)$, $s \geq 0$, est un espace linèaire muni de la norme définie par l'égalité (2.2).

Il est clair que:

1) $H^s(G_0) \subset H^s_a(G_0)$, $\forall s \geq 0$

2) $\forall s' > s \geq 0:\ H^{s'}_a(G_0) \subset H^s_a(G_0)$ et

$$||f||_{H^s_a(G_0)} \leq ||f||_{H^{s'}_a(G_0)}, \quad \forall f \in H^{s'}_a(G_0),\ s' > s \geq 0.$$

En effet $f \in H^{s'}_a(G_0) \Rightarrow S_t f \in H^{s'}(G_t) \Rightarrow S_t f \in H^s(G_t)$, $\forall t \in (0,1]$ et $||S_t f||_{H^s(G_t)} \leq ||S_t f||_{H^{s'}(G_t)}$. Alors

$$\sup_{0<t\leq 1} \rho(t)||S_t f||_{H^s(G_t)} \leq \sup_{0<t\leq 1} \rho(t)||S_t f||_{H^{s'}(G_t)}.$$

3. Problème aux limites

1. Soient $f(x) \in H^s_a(G_0)$ et $g_j(x) \in H^{2m+s-m_j}(G)$, $2m+s-m_j > 0$, $2m+s \leq N$, $S \geq 0$, ($N-$ assez grand), $j = 1,2,...,m$.

On considère le problème pour $t \in (0,1]$:

$$L(x,D)u(x) = S_t f \quad \text{dans } G_t \tag{3.1}$$

$$B_j(x,D)u(x) = g_j \quad \text{sur } \Gamma_t \tag{3.2}$$

$$(j = 1,2,..,m).$$

Supposons que pour tout $t \in (0,1]$ le problème (3.1)–(3.2) est elliptique et on a l'estimation a priori:

$$||u||_{H^{2m+s}(G_t)} \leq C(t)\Big\{||Lu||_{H^s(G_t)} + \sum_{j=1}^{m} ||B_j u||_{H^{2m+s-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma_t)}\Big\} \tag{3.3}$$

$\forall s \geq 0$, et $C(t)$ est une fonction de la variable $t \in (0,1]$.

L'estimation a priori (3.3) montre l'unicité de la solution du problème (3.1)–(3.2) dans G_t, $0 < t \leq 1$.

Dans ce qui suit en supposant que la fonction $C(t)$ introduite dans l'estimation (3.3) satisfait à la condition:

$$C(t) = o(t^{-\alpha}) \quad (t \to 0), \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.4}$$

On étudie l'existance et l'unicité de la solution du problème (3.1)– 3.2) dans le domaine G_0 qui est la limite de la famille $\{G_t\}$ lorsque $t \to 0$.

Dans cet article, en reprenant ce modèle dans un cadre plus général avec l'espace de type Sobolev à poids $H^s_a(G_0)$ et on modifiant un peu la démarche de l'étude dans [4], on peut améliorer les résultats obtenus dans [4] sur l'existance et l'unicité de la solution du problème en question.

It faut également noter que le présent problème peut être appliqué à étudier des problèmes aux limites pour une classe quelconque d'équations elliptiques dégénérées sur la frontière d'un domaine.

2. Supposons que $u(x,t)$ est la solution unique du problème (3.1)–(3.2) pour $0 < t \leq 1$. Alors à partir de l'estimation (3.3), la solution $u(x,t)$ peut être estimée suivant la norme de la fonction $f(x)$ dans $H^s_a(G_0)$, précisément on a l'inégalité suivante:

$$||u||_{H^{2m+s}(G_t)} \leq \mathcal{C}(t)\Big\{||f||_{H^s_a(G_0)} + \sum_{j=1}^{m}||g_j||_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\} \tag{3.5}$$

$s \geq 0,\ 2m+s \leq N$, et

$$\mathcal{C}(t) = o\left(t^{-(\alpha+a)}\right) \quad (t \to 0). \tag{3.6}$$

En prolongeant la solution $u(t,x)$ au G par l'opérateur de prolongement R_t on trouve la fonction $u_t = R_t u$ définie dans l'ensemble $G \times (0,1]$ de R^{n+1}.

Maintenant on pose:

$$\Delta u_t = u_{t+\Delta t} - u_t.$$

Alors dans le domaine G_t on a:

$$L\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right) = \frac{1}{\Delta t} L\left(u_{t+\delta t} - u_t\right) = \frac{1}{\Delta t}\left(Lu_{t+\Delta t} - f\right).$$

Il est clair que

$$u_{t+\Delta t} \in H^{2m+s}(G), \quad 2m+s \leq N$$

et:

$$L\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \overline{G_t \cap G_{t+\Delta t}} \\ \frac{1}{\Delta t}\left(Lu_{t+\Delta t} - f\right) & \text{si } x \in G_t \setminus G_{t+\Delta t} = \delta G_t. \end{cases}$$

En reprenant la démonstration de deux propositions 1 et 2 dans [4] (remplacant $H^s(G)$ par $H^s_a(G_0)$), nous obtenons les resultats analogues suivants:

PROPOSITION 1. (Voir la proposition 1 dans [4]). *Pour tout* $s \geq 1$ *on a l'estimation:*

$$\|\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\|_{H^{2m+s-1}(G_t)} \leq \mathcal{C}(t)\cdot\mathcal{C}(t+\delta t)\Big\{\|f\|_{H^s_a(G_0)}+\sum_{j=1}^{m}\|g_j\|_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\}, \quad (3.7)$$

$2m+s \leq N$, *où* $\mathcal{C}(t)$ *est définie dans (3.6).*

COROLLAIRE 1. (Voir le corollaire 1 dans [4]). *Pour tout* $s \geq 1$:

$$\|\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\|_{H^{2m+s-1}(G)} \leq \mathcal{C}(t)\cdot\mathcal{C}(t+\Delta t)\Big\{\|f\|_{H^s_a(G_0)}+\sum_{j=1}^{m}\|g_j\|_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\}, \quad (3.8)$$

$2m+s \leq N$.

PROPOSITION 2. (Voir la proposition 2 dans [4]). *Pour tout* $s \geq 1$ *la solution* $u_t(x,t)$ *du problème (3.1)-(3.2) satisfait à l'estimation:*

$$\|u_t\|_{H^{2m+s-1}(G_t)} \leq \mathcal{C}_1(t)\Big\{\|f\|_{H^s_a(G_0)}+\sum_{j=1}^{m}\|g_j\|_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\}, \quad (3.9)$$

où

$$\mathcal{C}_1(t) = \begin{cases} o\big(t^{1-2(\alpha+a)}\big) & \text{si } 1-2(\alpha+a)<0 \\ o\big(1+\delta(\frac{1}{2}-(\alpha+a)\big)\ \ln\frac{1}{t} & \text{si } 1-2(\alpha+a)\geq 0. \end{cases}$$

Où $\delta(\frac{1}{2}-(\alpha+a))$ *est la valeur de la* $\delta-$*fonction (fonction de Dirac) au point* $\frac{1}{2}-(\alpha+a)$.

Maintenant on voit que si la grandeur $1-2(\alpha+a)$ n'est pas positive, alors pour $s \geq 2$ nous pouvons établir une estimation analogue à celle (3.7) vis-à-vis de la solution $u_t(x,t)$:

PROPOSITION 3. *Pour* $s \geq 2$ *l'estimation:*

$$\|\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\|_{H^{2m+s-1}(G_t)} \leq \mathcal{C}(t)\cdot\mathcal{C}_1(t+\Delta t)\Big\{\|f\|_{H^s_a(G_0)}+\sum_{j=1}^{m}\|g_j\|_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\}, \quad (3.10)$$

$2m+s \leq N$, *est satisfaite où:*

$$\mathcal{C}(t) = o\Big(t^{-(\alpha+a)}\Big),\quad \mathcal{C}_1(t) = o\Big(t^{1-2(\alpha+a)}\Big)\quad (t\to 0).$$

PREUVE. En appliquant d'abord l'estimation a priori (3.3) pour la fonction $\frac{\Delta u_t}{\Delta t}$ on a:

$$||\frac{\Delta u_t}{\Delta t}||_{H^{2m+s-2}(G_t)} \leq C(t)\Big\{\left\|L\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right)\right\|_{H^{s-2}(G_t)}+ \\ + \sum_{j=1}^{m}\left\|B_j\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right)\right\|_{H^{2m+s-2-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma_t)}\Big\},$$

$$2m+s\leq N.$$

Où $C(t)=o(t^{-\alpha})$ $(t\to 0)$ est définie dans (3.4).

Pour estimer les grandeurs du second membre, on reprend la démonstration utilisée dans [4]:

Tout d'abord on voit que la fonction $L\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right)$ est nulle ainsi que ses dérivées sur $\Gamma_{t+\Delta t}$. Alors compte tenu de l'inégalité (1.2) on a:

$$\begin{aligned}\left\|L\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right)\right\|_{H^{s-2}(G_t)} &= \frac{1}{|\Delta t|}\|Lu_{t+\Delta t}-f\|_{H^{s-2}(\delta G_t)} \\ &\leq C\,||Lu_{t+\Delta t}-f||_{H^{s-1}(G_t)} \\ &\leq C\,\left\{||u_{t+\Delta t}||_{H^{2m+s-1}(G_t)}+||f||_{H^{s-1}(G_t)}\right\}.\end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}B_j\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right)\Big|_{\Gamma_t} &= \frac{1}{\Delta t}(B_j u_{t+\Delta t}-g_j)|_{\Gamma_t} \\ &= \frac{1}{\Delta t}(B_j u_{t+\Delta t}\big|_{\Gamma_t}-g_j\big|_{\Gamma_{t+\Delta t}}+g_j\big|_{\Gamma_{t+\Delta t}}-g_j\big|_{\Gamma_t}) \\ &= \frac{A_{\Delta t}g_j-A_{\Delta t}\left(B_j u_{t+\Delta t}\right)}{\Delta t}.\end{aligned}$$

Alors avec $s\geq 2$, $2m+s-2-m_j-\frac{1}{2}>0$, de l'estimation (1.2) on trouve l'inégalité suivante:

$$\left\|B_j\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right)\right\|_{H^{2m+s-2-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma_t)} \leq \frac{1}{|\Delta t|}\Big\{||A_{\Delta t}g_j||_{H^{2m+s-2-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma_t)}+ \\ + ||A_{\Delta t}(B_j u_{t+\Delta t})||_{H^{2m+s-2-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma_t)}\Big\} \leq \\ \leq C\left\{||B_j u_{t+\Delta t}||_{H^{2m+s-1-m_j}(G)}+||g_j||_{H^{2m+s-1-m_j}(G)}\right\}.$$

Donc nous obtenons l'estimation pour la fonction $\frac{\Delta u_t}{\Delta t}$:

$$\|\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\|_{H^{2m+s-2}(G_t)} \leq C(t)\Big\{\|u_{t+\Delta t}\|_{H^{2m+s-1}(G_t)} + \|f\|_{H^{s-1}(G_t)} + \\ + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{H^{2m+s-1-m_j}(G)}\Big\}.$$

Pour $\|u_{t+\Delta t}\|_{H^{2m+s-1}(G_t)}$ on applique l'estimation (3.9) et de plus compte tenu du fait que:

$$C(t) \cdot \|f\|_{H^{s-1}(G_t)} = C(t) \cdot \rho^{-1}(t).\rho(t).\|f\|_{H^{s-1}(G_t)} \leq \mathcal{C}(t).\|f\|_{H_a^{s-1}(G_0)}$$

on a:

$$\|\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\|_{H^{2m+s-2}(G_t)} \leq C(t).\mathcal{C}_1(t+\Delta t)\Big\{\|f\|_{H_a^s(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\}$$

$$+ \mathcal{C}(t) \cdot \|f\|_{H_a^{s-1}(G_0)} + C(t) \cdot \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{H^{2m+s-m_j}(G)}$$

$$\leq \mathcal{C}(t) \cdot \mathcal{C}_1(t+\Delta t)\Big\{\|f\|_{H_a^s(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\}.$$

c.q.f.d.

On en déduit le corollaire 2 qui est analogue au corollaire 1:

COROLLAIRE 2. *Pour tout $s \geq 2$ on a:*

$$\|\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\|_{H^{2m+s-2}(G_t)} \leq \mathcal{C}(t) \cdot \mathcal{C}_1(t+\Delta t)\Big\{\|f\|_{H_a^s(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\}, \tag{3.11}$$

où $\mathcal{C}(t) = o\left(t^{-(\alpha+a)}\right)$, $\mathcal{C}_1(t) = o\left(t^{1-2(\alpha+a)}\right)$, $(t \to 0)$, $2m+s \leq N$.

PROPOSITION 4. *Pour tout $s \geq 2$ la solution $u_t(x,t)$ vérifie l'estimation suivante:*

$$\|u_t\|_{H^{2m+s-2}(G_t)} \leq \mathcal{C}_2(t)\Big\{\|f\|_{H_a^s(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\} \tag{3.12}$$

$$s + 2m \leq N,$$

où

$$\mathcal{C}_2(t) = \begin{cases} o\left(t^{2-3(\alpha+a)}\right) & si \quad 2-3(\alpha+a) < 0 \\ o\left(1+\delta(\frac{2}{3}-(\alpha+a)\right) \ln\frac{1}{t} & si \quad 2-3(\alpha+a) \geq 0. \end{cases}$$

$\delta\left(\frac{2}{3}-(\alpha+a)\right)$ *est la valeur de la fonction Dirac au point* $\frac{2}{3}-(\alpha+a)$.

PREUVE. Soit $t \in (0,1]$. On partage le segment $[t,1]$ en k parties égales par les points $t = t_0, t_1, ..., t_k = 1$ et on pose:

$$\Delta t = t_i - t_{i-1}, \quad \Delta t > 0.$$

Alors: $u_t = \sum_{i=1}^{k}(u_{t_{i-1}} - u_{t_i}) + u_{t_k}$, où $u_{t_k} = u_1, u_{t_0} = u_t$.

On prend le corollaire 2 pour estimer la norme de la différence $\Delta u_i = u_{t_{i-1}} - u_{t_i}$ et l'estimation (3.5) pour u_{t_k} et puis on a:

$$\begin{aligned} ||u_t||_{H^{2m+s-2}(G_t)} &\leq \sum_{i=1}^{k} ||u_{t_{i-1}} - u_{t_i}||_{H^{2m+s-2}(G_t)} + ||u_{t_k}||_{H^{2m+s-2}(G_t)} \\ &\leq \{\sum_{i=1}^{k}\mathcal{C}(t_{i-1})\cdot\mathcal{C}(t_i)\cdot\Delta t + \mathcal{C}(1)\}\cdot \\ &\{||f||_{H^s_a(G_0)} + \sum_{j=1}^{m}||g_j||_{H^{2m+s-m_j}(G)}\} \\ &\leq C\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta t}{t_{i-1}^{\alpha+a}.t_i^{2(\alpha+a)-1}} + 1\right\}\left\{||f||_{H^s_a(G_0)} + \sum_{j=1}^{m}||g_j||_{H^{2m+s-m_j}(G)}\right\} \\ &\leq C\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta t}{t_{i-1}^{3(\alpha+a)-1}} + 1\right\}\left\{||f||_{H^s_a(G_0)} + \sum_{j=1}^{m}||g_j||_{H^{2m+s-m_j}(G)}\right\}. \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $k \to +\infty$, la somme

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta t}{t_{i-1}^{3(\alpha+a)-1}}$$

tend vers l'intégrale

$$\int_t^1 \frac{dx}{x^{3(\alpha+a)-1}} = \begin{cases} \frac{1}{2-3(\alpha+a)}\left(1-t^{2-3(\alpha+a)}\right) & \text{si } \alpha+a \neq \frac{2}{3} \\ \ln\frac{1}{t} & \text{si } \alpha+a = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

C'est pourquoi avec k assez grand la somme

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta t}{t_{i-1}^{3(\alpha+a)-1}} + 1$$

ne pourrait pas dépasser

$$C\Big(1 + t^{2-3(\alpha+a)} + \delta(\frac{2}{3} - (\alpha + a))\Big) \ln \frac{1}{t}.$$

Par conséquent on obtient l'estimation:

$$||u_t||_{H^{2m+s-2}(G_t)} \leq C \left\{1 + t^{2-3(\alpha+a)} + \delta \left(\frac{2}{3} - (\alpha + a)\right) \ln \frac{1}{t}\right\} \times$$
$$\times \left\{||f||_{H^s_a(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j||_{H^{2m+s-m_j}(G)}\right\}.$$

Alors

$$\mathcal{C}_2(t) = C \left\{1 + t^{2-3(\alpha+a)} + \delta \left(\frac{2}{3} - (\alpha + a)\right) \ln \frac{1}{t}\right\}.$$

Vérifie la propriété nécessaire.

En raisonnant logiquement on voit que dans le cas où la grandeur $2-3(\alpha+a)$ n'est pas encore positive, en represent la démonstration de la proposition 4 nous pouvons obtenir l'estimation pour $s \geq 3$ vis-à-vis de la solution $u_t \cdots$ Donc en prolongeant ce processus après k pas on trouve l'estimation pour u_t et $s \geq k$:

$$||u_t||_{H^{2m+s-2}(G_t)} \leq \mathcal{C}_k(t)\Big\{||f||_{H^s_a(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j||_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\} \tag{3.13}$$

$$2m + s \leq N,$$

où:

$$\mathcal{C}_k(t) = \begin{cases} o(t^{k-(k+1)(\alpha+a)}) & \text{si } k - (k+1)(\alpha + a) < 0 \\ o(1 + \delta \left(\frac{k}{k+1} - (\alpha + a)\right) \ln \frac{1}{t} & \text{si } k - (k + 1(\alpha + a) \geq 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

et $\delta \left(\frac{k}{k+1} - (\alpha + a)\right)$ est la valeur de la fonction de Dirac au point $\frac{k}{k+1} - (\alpha+a)$.

Supponsons que: $\quad 0 < \alpha + a < 1$.

Alors en vertu de l'expression de la fonction $\mathcal{C}_k(t)$ dans (3.14) on voit que avec

$$k = \left[\frac{\alpha + a}{1 - (\alpha + a)}\right] + 1$$

la fonction $C_k(t)$ peut être majorée par une constante. Dans ce cas de l'estimation (3.13) nous obtenons l'estimation uniforme par rapport à $t \in (0,1]$ pour la solution $u_t(x,t)$:

$$||u_t||_{H^{2m+s-k}(G_t)} \leq C\Big\{||f||_{H_a^s(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j||_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\}, \tag{3.15}$$

$k = \left[\frac{\alpha+a}{1-(\alpha+a)}\right] + 1,\ s \geq k,\ 2m+s \leq N,\ C$ - constante.

En revenant à la propsition 1 on voit également que à partir de l'estimation (3.5) nous avons estimé la fonction $\frac{\Delta u_t}{\Delta t}$ par l'inégalité (3.7). De façon analogue, en prenant la démonstration de la proposition 1, à partir de (3.15) nous recevons l'estimation pour $\frac{\Delta u_t}{\Delta t}$ et puis pour Δu_t :

$$||\Delta u_t||_{H^{2m+s-k-1}(G)} \leq C|\Delta t|\Big\{||f||_{H_a^s(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j||_{H^{2m+s-m_j}(G)}\Big\}, \tag{3.16}$$

$s \geq k+1,\ 2m+s \leq N,\ C$ - constante.

On en déduit que la fonction $u_t(x,t)$ comme une fonction abstraite de la variable $t \in (0,1]$, à valeur dans l'espace $H^{2m+s-k-1}(G)$, est continue uniformément dans $(0,1]$ grâce à (3.16). D'où il existe la limite: $\lim\limits_{t\to 0} u_t = u_0$ dans $H^{2m+s-k-1}(G)$. C'est-à-dire que

$$\lim_{t\to 0} ||u_t - u_0||_{H^{2m+s-k-1}(G)} = 0 \tag{3.17}$$

$$s \geq k+1,\ 2m+s \leq N.$$

Finalement nous obtenons les résultats fondamenteaux suivants:

THÉORÈME 1. *Si* $f(x) \in H_a^s(G_0)$, $g_j(x) \in H^{2m+s-m_j}(G)$, $j = 1, \cdots, m$, $s \geq k+1$, $2m+s \leq N$, $k = \left[\frac{\alpha+a}{1-(\alpha+a)}\right] + 1$, *la fonction* $u_0(x)$ *définie par (3.17) est la solution du problème aux limite:*

$$\begin{gathered} L(x,D)u = f(x) \quad \textit{dans } G_0 \\ B_j(x,D)u = g_j \quad \textit{sur } \Gamma_0 \\ (j = 1, 2, \dots, m) \end{gathered} \tag{3.18}$$

et satisfait à l'estimation suivante:

$$||u_0||_{H^{2m+s-k-1}(G_0)} \leq C \left\{ ||f||_{H_a^s(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j||_{H^{2m+s-m_j}(G)} \right\}.$$

$$2m + s - k - 1 \geq 0, \; 2m + s \leq N, \; C \text{ - constante.}$$

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses du théorème 1, la solution du problème (3.18) est unique.*

Les preuves de deux théorème 1 et 2 sont entièrement similaires à celles des théorèmes 1 et 2 dans l'article [4, 5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.G. Krein, *Allure de solution de ellitiques problèmes aux limites dans variables domaines*, Studia Mathematica, **31**(1968), 411-428 (en Russe).

[2] L.A. Ivanov, *Sur la solution de elliptiques problèmes aux limites dans le domaine de limite*, Ukrainskii Mat. J. **25**, No. 1, (1973) (en Russe).

[3] L.A. Ivanov, L.A. Kotko, S.G. Krein, *Problèmes aux limites dans le domaine variable,* (en Russe) Livre: "Equations differentiales et application", pp. 7–160, I.M. de Lithuanian SSR, Vilnus, 1977.

[4] Hoang Quoc Toan and L.A. Kotko, *Problèmes aux limites dans le variable domaine*, Diff. Uravneniya **15**(1979), 458–464 (en Russe).

[5] Hoang Quoc Toan, *Boundary problems in limit domains and non elliptic boundary problems for partial differential equations*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. de Roumanie. Tom 32 (80), nr. 2, (1988).

FACULTÉ DE MATHEMATIQUES

UNIVERSITÉ DE HANOI

HANOI, VIETNAM