ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 19, Number 1, 1994, pp. 139–144

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DE PERTURBATION NON CLASSIQUE EN UNE DIMENSION

TAOUFIG BENKIRAN

1. Introduction

Ce travail est consacré à l'étude d'un problème de perturbation singulière :

$$(P_1)(f) \quad \begin{cases} \epsilon^2(u_\epsilon^{(4)} - u_\epsilon^{(2)} - u_\epsilon^{(2)} + u_\epsilon = f & 0 < x < \pi \\ B_1(x')u_\epsilon(x') = B_2(x')u_\epsilon(x') = 0 & \text{pour } x' \text{ de } \{0, \pi\} \end{cases}$$

qui apparait dans la théorie de l'Elasticité [6]. B_1 et B_2 étant deux opérateurs frontières d'ordre respectivement deux et trois.

1. Si les opérateurs frontières B_1 et B_2 sont donnés par

$$B_1(x') := d^2/dx^2 \quad \text{et} \quad B_2(x') := d^3/dx^3 \tag{1}$$

avec x' étant un élément de $\{0, \pi\}$ et lorsque f n'est pas dans l'espace de Sobolev $H^\beta(]0, \pi[)(\beta > 1/2)$, nous montrons que la solution u_ϵ du problème $(P_1)(f)$ n'est pas forcement bornée dans $L^2(]0, \pi[)$.

2. Si les opérateurs frontière B_1 et B_2 sont donnés par :

$$\begin{aligned} B_1(x') &:= d^2/dx^2 \\ B_2(x') &:= x'd^3/dx^3 + (x' - \pi) \end{aligned} \tag{2}$$

avec x' un élément de $\{0, \pi\}$ et lorsque f est un élément de $L^2(]0, \pi[)$, nous montrons que la solution u_ϵ du problème $(P_1)(f)$ converge vers la solution v du problème :

$$(L_1)(f) \quad \begin{cases} -v'' + v = f & \text{dans } 0 < x < \pi \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

Avant d'aborder l'étude, on se propose de commencer par un lemme :

Received October 26, 1993

LEMME 1. *(cf. [2], [3])*

Soient, pour $\epsilon > 0$ et $i \leq r < 3$, les fonctions $f_{\epsilon r}$ définies par :

$$f_{\epsilon r}(x) := x^r / P_\epsilon(x), \text{ où } P_\epsilon(x) := (x^2+1)\epsilon^2 x^2 + 1). \tag{3}$$

Alors,

(i) pour $2 \leq r < 3$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} f_{\epsilon r} 2n &= \epsilon^{1-r} \beta(r-1)/2, (3-r)/2)/4 + 0(\epsilon^{(2-r)}) \\ \sum_{n \geq 0} f_{\epsilon r} 2n + 1 &= \epsilon^{1-r} \beta(r-1)/2, (3-r)/2)/4 + 0(\epsilon^{(2-r)}) \end{aligned} \tag{4}$$

(ii) pour $i \leq r < 2$:

$$\begin{aligned} &|\sum_{n \geq 1} f_{\epsilon r}(2n) - 1/2 \int_0^\infty f_{\epsilon r}(x) dx| \leq a\epsilon^{2-r} + b \\ &|\sum_{n \geq 0} f_{\epsilon r}(2n+1) - 1/2 \int_0^\infty f_{\epsilon r}(x) dx| \leq a\epsilon^{2-r} + b, \end{aligned} \tag{5}$$

où $\beta(p,q)$ désigne la fonction béta d'Euler et a et b deux constantes positives indépendantes de ϵ.

2. Comportement de u_ϵ lorsque B_1 et B_2 sont donnés par (1)

Pour $\epsilon > 0$, on écrit le problème $(P_1)(f)$ sous la forme :

$$(P_\epsilon)_1 \quad \begin{cases} \epsilon^2(u_\epsilon^{(4)} - u_\epsilon^{(2)}) - u_\epsilon^{(2)} + u_\epsilon = f & 0 < x < \pi \\ B_1(x')u_\epsilon(x') = B_2(x')u_\epsilon(x') = 0 & \text{pour } x' \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

avec

$$B_1(x') = d^2/dx^2 \text{ et } B_2(x') = d^3/dx^3. \tag{6}$$

THÉORÈME 2. *(cf. [2])*

Pour une fonction f de $L^2(]0,\pi[)$ donnée par

$$f(x) := \sum_{n \geq 1} \sin(nx)/n^a \qquad \text{avec } 1/2 < \alpha < 1, \tag{7}$$

la solution u_ϵ du problème $(P_\epsilon)_1$ n'est pas bornée dans $L^2(]0,\pi[)$. De plus on a:

$$\int_0^\pi |u_\epsilon(x)|dx = 0(\epsilon^{\alpha-1}). \tag{8}$$

PREUVE. Comme f est donnée par (7) avec $\alpha < 1$, alors elle n'est pas dans l'espace de Sobolev $H^\beta(]0,\pi[)\beta > 1/2$, (cf. [6] page 391 i.e. f n'est pas continue sur $[0,\pi]$).

On considère le problème de Sturme-Liouville :

$$(SL)(h) \quad \begin{cases} \epsilon^2(v_\epsilon^{(4)} - v_\epsilon^{(2)}) - v_\epsilon^{(2)} + v_\epsilon = h & \text{dans } 0 < x < \pi \\ v_\epsilon(0) = v_\epsilon(\pi) = 0 \\ v_\epsilon^{(2)}(0) = v_\epsilon^{(2)}(\pi) = 0. \end{cases}$$

En référant à la théorie spectral [5], pour h dans $L^2(]0,\pi[)$ donnée par :

$$h(x) = \sum_{n\geq 1} h_n \sin(nx); \quad \sum_{n\geq 1} |h_n|^2 < +\infty \tag{9}$$

la solution v_ϵ du problème $(SL)(h)$ est donnée par :

$$v_\epsilon(x) = \sum_{n\geq 1}(h_n/\mu_{n,\epsilon})\sin(nx) \quad \text{avec } \mu_{n,\epsilon} = (1+n^2)(1+n^2\epsilon^2). \tag{10}$$

D'autre part, l'ensemble E des solutions du problème :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \epsilon^2(w_\epsilon^{(4)} - w_\epsilon^{(2)}) - w_\epsilon^{(2)} + w_\epsilon = 0 & \text{dans }]0,\pi[\\ w_\epsilon^{(2)}(0) = w_\epsilon^{(2)}(\pi) = 0 \end{cases}$$

est un sous espace vectoriel de $H^2(]0,\pi[)$ de dimension deux, dont $(\varphi_\epsilon,\psi_\epsilon)$ est une base :

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon(x) &= (x/2) + \sum_{n\geq 1}((-1)^n/n\mu_{n,\epsilon})\sin(nx), \\ \psi_\epsilon(x) &= ((\pi - x/2) + \sum_{n\geq 1}((1)/n\mu_{n,\epsilon})\sin(nx). \end{aligned} \tag{11}$$

Soient v_ϵ, u_ϵ les solutions des problèmes $(SL)(f)$ et $(P_\epsilon)_1$ respectivement. La fonction $w_\epsilon = u_\epsilon - v_\epsilon$ est une solution du problème (P_1) et on a donc :

$$(u_\epsilon - v_\epsilon)(x) = a_\epsilon\varphi_\epsilon(x) + b_\epsilon\psi_\epsilon(x),$$

où a_ϵ et b_ϵ sont des constantes qu'on détermine en utilisant le Lemme 1, pour $2 \leq r < 3$, et $B_2 u_\epsilon(0) = B_2 u_\epsilon(\pi) = 0$. On trouve alors :

$$b_\epsilon = 0(\epsilon^{\alpha-1}) \quad \text{et} \quad a_\epsilon = 0(\epsilon^\alpha). \tag{13}$$

Comme $v_\epsilon, \varphi_\epsilon$ et ψ_ϵ convergent dans $H^2(]0,\pi[)$ (cf. [7]):

$$\int_0^\pi |u_\epsilon(x)| dx = 0(\epsilon^{\alpha-1}) \quad \text{pour} \quad 1/2 < \alpha < 1.$$

u_ϵ n'est pas donc bornée dans $L^2(]0,\pi[)$.

REMARQUE 3. (cf. [1], [7]) Lorsque f est dans l'espace de Sobolev $H^\beta(]0,\pi[)$ pour $\beta > 1/2$, on montre que u_ϵ converge dans $H^{\delta+2}(]0,\pi[)$ vers la solution u du problème :

$$(L_1) \quad \begin{cases} u'' + u = f & 0 < x < \pi \\ u''(0) = u''(\pi) = 0, \end{cases}$$

où $\delta < \inf(\beta, 3/2)$.

3. Comportement de u_ϵ lorsque B_1 et B_2 sont donnés par (2)

$$(P_\epsilon)_2 \quad \begin{cases} \epsilon^2(\varphi_\epsilon^{(4)} - \varphi_\epsilon^{(2)}) - \varphi_\epsilon^{(2)} + \varphi_\epsilon = f & \text{dans } 0 < x < \pi \\ \varphi_\epsilon^{(2)}(0) = \varphi_\epsilon^{(2)}(\pi) = 0 \\ \varphi_\epsilon(0) = \varphi_\epsilon^{(3)}(\pi) = 0. \end{cases}$$

and

$$(L_2) \quad \begin{cases} -\varphi'' + \varphi = f & \text{dans} \quad 0 < x < \pi \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases}$$

THÉORÈME 4. *(cf. [3], [4])*

Pour f une fonction de $L^2(]0,\pi[)$ donnée par :

$$f(x) := \sum_{n \geq 1} \sin(nx)/n^\alpha \qquad \text{avec } \alpha > 1/2,$$

la solution φ_ϵ du problème $(P_\epsilon)_2$ converge vers la solution φ du problème (L_2) dans l'espace de Sobolev $H^2(]0,\pi[)$.

PREUVE. Soient, comme ci-dessus $v_\epsilon, \varphi_\epsilon$ les solutions des problèmes $(SL)(f)$ et $(P_\epsilon)_2$ respectivement. La fonction $w_\epsilon = \varphi_\epsilon - v_\epsilon$ est une solution du problème

(P_1), on a donc :

$$(\varphi_\epsilon - v_\epsilon)(x) = c_\epsilon \varphi_\epsilon(x) + d_\epsilon \psi_\epsilon(x), \tag{15}$$

où c_ϵ et d_ϵ sont des constantes qu'on détermine comme suivant:

1) Si $1/2 < \alpha \leq 1$, en utilisant le Lemme 1, pour $2 \leq r < 3$, et $\varphi_\epsilon(0) = \varphi_\epsilon^{(3)}(\pi) = 0$, on trouve alors :

$$c_\epsilon = 0(\epsilon^\alpha) \quad \text{et} \quad d_\epsilon = 0. \tag{16}$$

2) Si $1/2 < \alpha \leq 2$, en utilisant le Lemme 1, pour $1 \leq 2 < 3$, et $\varphi_\epsilon(0) = \varphi_\epsilon^{(3)}(\pi) = 0$, on trouve alors :

$$C_\epsilon| \leq A\epsilon^\alpha + B\epsilon \quad \text{et} \quad d_\epsilon = 0. \tag{17}$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1}((-1)^{n+1}/n\mu_{n,\epsilon})\sin(nx)$, la solution du problème $(SL)(x/2)$ converge dans $H^2(]0,\pi[)$, la norme $||\psi_\epsilon||_{H^2(]0,\pi[)}$ est bornée et indépendante de ϵ, et donc :

$$\lim_{\epsilon\to 0} ||\varphi_\epsilon - v_\epsilon||_{H^2(]0,\pi[)} = 0. \tag{18}$$

i.e. φ_ϵ et v_ϵ sont de même nature dans $H^2(]0,\pi[)$, ce qui prouve la convergence de φ_ϵ vers φ dans $H^2(]0,\pi[)$.

Remarque 5. Si f est donnée par (14) avec $\alpha > 2$, en utilisant seulement $\varphi_\epsilon(0) = \varphi_\epsilon^{(3)}(\pi) = 0$, on a

$$|c_\epsilon| \leq D\epsilon^\alpha \quad \text{et} \quad d_\epsilon = 0 \tag{19}$$

et on retrouve le même résultat.

Références

[1] T. Benkiran, *Étude d'un problème de perturbation singulière*, thèse de doctorat de l'Université, Juin 1989.

[2] T. Benkiran, *Comportement asymptotique d'un problème de perturbation singulière non classique*, Collect. Math. **43**, 2(1992), 107–115.

[3] T. Benkiran, *Sur un problème de perturbation singulière (I)*, Extracta Mathematicae, **8**, 2(1993), 1–6.

[4] T. Benkiran, *Sur un problème de perturbation singulière (II)*, à paraître dans Extracta Mathematicae, **9**, 1(1994).

[5] D. Dautry - J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et technique*, Tome 5 (Spectre des opérateurs) Masson 1987.

[6] C. George, *Exercices et problèmes d'intégation*, Université de Nancy I, Gauthier - Viallars, 1980.

[7] D. Huet, *Stabilité et convergence dans les problèmes de perturbations singulières*, Asymptotic Analysis 2, North-Holland, 1989, 5–19.

[8] L. Landau, E. Lifschitz, *Théorie de l'Elasticité*, Mir, Moscou, 1967 (Traduction du russe).

FACULTÉ DES SCIENCES SEMLAUA
Bd PRINCE MOULAY ABDELLAH, B.P. S15
40000 DEPARTEMENT DE MATHS, MARRAKECH
MAROC