ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 19, Number 1, 1994, pp. 67–75

OSCILLATION ET CONVERGENCE D'UNE MARTINGALE

PHAN VIET THU

Soient $\{|X_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$ une matingale et Φ une fonction de Young telles que $\Phi(|X_n|)$ soit integrable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Désignons par

$$\Phi(|X_n|) = M_n^{(\Phi)} + A_n^{(\Phi)}; \quad n \in \mathbf{N} \tag{1}$$

la décomposition de Doob de sous-martingale intégrable $\{\Phi(|X_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$ associée à la martingale $\{|X_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$, où $M_n^{(\Phi)}$ est une martingale et $\{A_n^{(\Phi)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ est un processus croissant. Cet article est consacré à l'étude du comportment asymptotique de la martingale $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ à l'aide du processus croissant $\{A_n^{(\Phi)}\}_{n\in\mathbf{N}}$.

I. Préliminaires sur les fonction de Young et les espaces d'Orlicz

Soit $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction croissante, continue à gauch, $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty$, sa primitive

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(x)dx \tag{2}$$

est alors une fonction de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, continue, convexe, croissante et nulle à l'origine. Pour simplicité φ est appelée densité de la fonction Φ.

On désigne par ψ, l'inverse de la fonction φ définie par

$$\psi(u) = \sup\{x; \varphi(x) < u\}; \quad u > 0. \tag{3}$$

La fonction $\psi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est finie car $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty$, elle est continue à gauche, croissante, nulle à l'origine et $\lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) = +\infty$. L'inverse de la fonction

Received August 30, 1993

ψ est la fonction φ, donnée par

$$\varphi(x) = \sup\{u : \psi(u) < x\}; \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Il est facile de vérifier que la primitive Ψ de la fonction ψ,

$$\Psi(v) = \int_0^v \psi(u)du; \quad v \in \mathbb{R}_+ \tag{5}$$

est telle que:

$$tv \leq \Phi(t) + \Psi(u); \quad t, v \in \mathbb{R}_+ \tag{6}$$

Un tel couple (Φ, Ψ) s'appelle un couple de fonctions de Young et la fonction Ψ (resp. Φ) est dite conjuguée de Φ (resp. Ψ). On dit qu'une fonction de Young Φ vérifie la *condition* Δ_2 si

$$\Phi(2x) \leq K\Phi(x); \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{7}$$

où $K > 0$ est une constante. On peut démontrer le lemme suivant:

LEMME 1. *Pour toute fonction de Young Φ et sa fonction de densité φ les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $\Phi(ax) \leq d\Phi(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$ *pour un $a > 1$ et un $d < +\infty$,* (8)

b) $\varphi(a'x) \leq d'\varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$ *pour un $a > 1$ et un $d' < +\infty$,* (9)

c) $\sup\limits_{x>0} \frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} = p < +\infty.$ (10)

Si Φ vérifie les conditions du Lemme 1 nous disons que la fonction Φ vérifie la condition de croissance modérée.

Le théorème suivant nous donne en même temps la définition de l'espace d'Orlicz.

THÉORÈME 1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et (Φ, Ψ) un couple de fonctions de Young. L'ensemble $L^\Phi(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des classes d'équivalence de v.a. réelles X définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour lesquelles il existe au moins un réel $a > 0$ tel que $E[\Phi(a^{-1}|X|)] \leq 1$ est un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ contenant $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$. En outre, la formule*

$$||X||_\Phi = \inf\{a : a > 0; \quad E[\Phi(a^{-1}|X|)] \leq 1\} \tag{11}$$

définit une norme sur L^Φ et il existe deux constantes $C_1, C_\infty > 0$ telles que $C_1||X||_1 \leq ||X||_\Phi \leq C_\infty||X||_\infty$ pour toute v.a. X de L^Φ. L'espace vectoriel normé L^Φ est un espace de Banach et appelé un espace d'Orlicz

DÉMONSTRATION (voir par exemple [1]).

Il est facile de voir que toute v.a. $X \in L^\Phi$ vérifie l'inégalité

$$||X||_\Phi \leq \max\{1;\ E[\Phi(|X|)]\}. \tag{12}$$

II. Oscillation et convergence d'une martingale

Nous nous donnerons une fois pour toute un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une suite croissante $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$. Les v.a.r., les martingales et les processus croissants considérés sont définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et par rapport à la suite $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Considérons une martingale $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, et une fonction de Young Φ. Si $E[\Phi(|X_n|)] < +\infty; n \in \mathbf{N}$, alors la suite $\{\Phi(|X|)\}_{n\in\mathbf{N}}$ est une sous-martingale intégrable, en vertu de la convexité et de la croissance monotone de Φ. Nous pouvons donc écrire la décomposition de Doob de Φ:

$$\Phi(|X_n|) = M_n^{(\Phi)} + A_n^{(\Phi)}; \quad n \in \mathbf{N}, \tag{13}$$

où le processus croissant $\{A_n^{(\Phi)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ est défini par la formule

$$A_{n+1}^{(\Phi)} - A_n^{(\Phi)} = E^{\mathcal{B}_n}[\Phi(|X_{n+1}|] - \Phi(|X_n|), \quad n \in \mathbf{N} \tag{14}$$

$A_0^{(\Phi)} = 0$ et $\{M_n^{(\Phi)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ est une $\mathcal{B}_n$-martingale.

PROPOSITION 1. *Soit Φ une fonction de Young et $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une martingale vérifiant la condition $E[\Phi(|X_n|)] < +\infty, n \in \mathbf{N}$. Alors la v.a.r. $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ existe et est finie p.s. sur $\{A_\infty^{(\Phi)} < +\infty\}$ où $\{A_n^{(\Phi)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ désigne le processus croissant dans la décomposition de Doob de la sous-martingale $\{\Phi(|X_n|)\}_{n\in\mathbf{N}}$. En outre si Φ vérifie la condition-Δ_2 et*

$$E[\sup_{n\in\mathbf{N}} \Phi(|X_{n+1} - X_n|)] < +\infty \tag{15}$$

alors

$$\limsup_n X_n = +\infty \quad et \quad \liminf_n X_n = -\infty \tag{16}$$

p.s. $\{A_\infty^{(\Phi)} = +\infty\}$.

DÉMONSTRATION. Nous pourrons supposer dans la suite, sans restreindre essentiellement la généralité que $X_0 = 0$. Considérons la décomposition de Doob:

$$\Phi(|X_n|) = M_n^{(\Phi)} + A_n^{(\Phi)}; \quad n \in \mathbf{N} \tag{17}$$

où $\{M_n^{(\Phi)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ est une martingale et le processus croissant $\{A_n^{(\Phi)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ est donné par ses accroissments:

$$A_{n+1}^{(\Phi)} - A_n^{(\Phi)} = E^{\mathcal{B}_n}[\Phi(|X_{n+1}|] - \Phi(|X_n|), \quad n \in \mathbf{N} \tag{18}$$

$A_0^{(\Phi)} = 0$. D'après l'hypothèse tous les deux termes au membre droit de la décomposition (17) sont intégrables et il est facile de voir que $\{\Phi(X_n^-)\}_{n\in\mathbf{N}}$, et $\{\Phi(X_n^+)\}_{n\in\mathbf{N}}$ sont aussi des sous-martingales non-négatives et intégrables.

Designons par $\{A'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ le processus croissant dans la décomposition de Doob de sous-martingale $\{\Phi(X_n^+)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Nous allons montrer que

(a') $\lim_{n\to\infty} X_n$ existe et est finie p.s. sur (19)

$$\{A'_\infty < \infty\},$$

(b') $\limsup_n X_n = +\infty$ p.s. sur $\{A'_\infty < +\infty\}$. (20)

Ça suffiera pour démontrer la proposition puisqu'en appliquant ce résultat pour la martingale $\{-X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ nous avons

(a") $\lim_{n\to\infty} X_n$ existe et est finie p.s. sur $\{A''_\infty < \infty\}$, (21)

(b") $\liminf_n X_n = +\infty$ p.s. sur $\{A''_\infty < +\infty\}$. (22)

où $\{A''_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ désigne le processus croissant associé à la décomposition de Doob de la sous-martingale $\{\Phi(X_n^-)\}_{n\in\mathbf{N}}$. En reliant les résultats (a'); (b') et (a"); (b") il s'en suit que

$$\{A'_\infty < \infty\} = \{A''_\infty < \infty\} \tag{23}$$

En effet, lorsque $\lim_{n\to\infty} X_n$ existe dans $\mathbf{R}$ les limites $\limsup_n X_n$ et $\liminf_n X_n$ ne peuvent pas être infinies cela entraîne aussi l'égalité

$$A_n^{(\Phi)} = A'_n + A''_n; \quad n \in \mathbf{N}. \tag{24}$$

Ça veut dire que $A_\infty^{(\Phi)}$ est finie simultanément avec A'_∞ et A''_∞. Pour voir la validité de l'égalité (24) nous écrivons $|X_n|$ sous la forme:

$$|X_n| = X_n^+ + X_n^- = X_n 1_{\{X_n \geq 0\}} + (-X_n 1_{\{X_n<0\}}).$$

Ça implique que $\Phi(|X_n|) = \Phi(|X_n^+|) + \Phi(|X_n^-|)$ car $\{X_n \geq 0\} \cap \{X_n < 0\} = \emptyset$ et $\Phi(0) = 0$.

$$A_{n+1}^{(\Phi)} - A_n^{(\Phi)} = E^{\mathcal{B}_n}[\Phi(|X_{n+1}|)] - \Phi(|X_n|), \tag{25}$$

$$A'_{n+1} - A'_n = E^{\mathcal{B}_n}[\Phi(X_{n+1}^+)] - \Phi(X_n^+), \tag{26}$$

$$A''_{n+1} - A''_n = E^{\mathcal{B}_n}[\Phi(X_{n+1}^-)] - \Phi(X_n^-), \tag{27}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. En additionnant les deux dernieères égalités

$$\begin{aligned}
&(A'_{n+1} + A''_{n+1} - (A'_n + A''_n) = \\
&= E^{\mathcal{B}_n}[\Phi(X_{n+1}^+) + \Phi(X_{n+1}^-)] - [\Phi(X_n^+) + \Phi(X_n^-)] = \\
&= E^{\mathcal{B}_n}[\Phi(|X_{n+1}|)] - \Phi(|X_n|) = A_{n+1}^{(\Phi)} - A_n^{(\Phi)}
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $A_0^{(\Phi)} = A'_0 = A''_0 = 0$ l'égalité (24) est valable.

Maintenant nous retournons à la démonstration de (a') et (b')

(a'). Pour tout nombre réel $\alpha > 0$ désignons un temps d'arrêt ν_α défini par

$$\nu_\alpha = \begin{cases} \min(n : A'_{n+1} > \alpha) & \text{si} \quad A'_\infty > \alpha \\ +\infty & \text{si} \quad A'_\infty \leq \alpha \end{cases} \tag{28}$$

En particulier $A'_{\nu_\alpha} \leq \alpha$, par conséquent

$$\begin{aligned}
&\lim E[\Phi(X_{\nu_\alpha\wedge n}^+)] = \lim_{n\to\infty} E(A'_{\nu_\alpha\wedge n}) = \\
&= E(A'_{\nu_\alpha}) \leq \alpha
\end{aligned} \tag{29}$$

Notons que $X_0 = 0$ p.s. Il est facile de montrer que $A'_{\nu_\alpha\wedge n}$ est le processus croissant associé à la décomposition de Doob de la sous-martingale

$\{\Phi(X^+_{\nu_\alpha\wedge n})\}_{n\in\mathbf{N}}$. En utilisant (6) et (29) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E(X_{\nu_\alpha\wedge n}) &\le \lim_{n\to\infty} E[\Phi(X_{\nu_\alpha\wedge n})] + \Psi \\ &\le \alpha + \Psi(1) < +\infty,\end{aligned}\tag{30}$$

où Ψ est la fonction de Young conjuguée de Φ. Ça montre que la martingale $\{X_{\nu_\alpha\wedge n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers une limite integrable (v. [7]), donc la limite $\lim_{n\to\infty} X_m = X_\infty$ existe et est finie p.s sur l'événement $\{\nu_\alpha = +\infty\} = \{A'_\infty \le \alpha\}$. Faisons tendre α vers $+\infty$ nous voyons que: $\lim_{n\to\infty} X_m = X_\infty$ existe p.s. sur $\{A'_\infty < +\infty\}$.

(b'). Soit $\alpha > 0$ un réel positive arbitraire, nous définissons un temps d'arrêt ν'_α par la formule:

$$\nu'_\alpha = \begin{cases} \min(n : X_n > \alpha & \text{si } \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} X_n > \alpha \\ +\infty & \text{si } \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} X_n \le \alpha \end{cases}\tag{31}$$

La condition

$$E[\Phi(\sup_{n\in\mathbf{N}}(X_{n+1} - X_n)^+] < +\infty$$

implique que

$$E(A'_{\nu'_\alpha}) = \lim_{m\to\infty} E[\Phi(X^+_{\nu'_\alpha\wedge m})]$$

est finie. En effet, parce que $X_{\nu'_\alpha\wedge m} \le \alpha$ sur $\{\nu'_\alpha > m\}$ et sur l'évenement complémentaire $\{\nu'_\alpha \le m\}$ nous avons:

$$\begin{aligned}X_{\nu'_\alpha\wedge m} &\le \alpha + (X_{\nu'_\alpha} - X_{\nu'_\alpha - 1})^+ \le \alpha + \sup_{n\in\mathbf{N}}(X_{n+1} - X_n)^+ \le \\ &\le 2\max(\alpha; \sup_{n\in\mathbf{N}}(X_{n+1} - X_n)^+).\end{aligned}\tag{32}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}\Phi(X^+_{\nu'_\alpha\wedge m}) &\le \max\{\Phi(2\alpha); \Phi[2\sup_{n\in\mathbf{N}}(X_{n+1} - X_n)^+]\} \le \\ &\le K\max\{\Phi(\alpha); \Phi[\sup_{n\in\mathbf{N}}(X_{n+1} - X_n)^+]\}\end{aligned}\tag{33}$$

car Φ vérifie la *condition*-Δ_2 nous avons donc

$$\lim_{m\to\infty} E[\Phi(X^+_{\nu'_\alpha\wedge m})] = E(A'_{\nu'_\alpha} \le$$

$$\le K\{\Phi(\alpha) + E[\Phi(\sup_{n\in\mathbf{N}}(X_{n+1} - X_n)^+]\} < +\infty \tag{34}$$

la v.s. positive $A'_{\nu'_\alpha}$ appartient alors à L^1 et est finie p.s. et par conséquent $A'_\infty < \infty$ p.s. sur l'événement

$$\{\nu'_\alpha = +\infty\} = \{\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n \leq \alpha\}, \tag{35}$$

si $\alpha \uparrow +\infty$ nous avons:

$$A'_\infty < +\infty \quad \text{sur} \quad \{\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n < +\infty\}, \tag{36}$$

où d'une manière équivalente

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n = +\infty \quad \text{sur} \quad \{A'_\infty = +\infty\}. \tag{37}$$

Enfin il nous reste à voir que

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n = +\infty\} = \{\lim_{n\in\mathbb{N}} \sup X_n = +\infty\} \tag{38}$$

mais cela vient de ce que $X_n < +\infty$ p.s.; $n \in \mathbb{N}$ ce qui achève la démonstration de la proposition.

Nous citons maintenant, sans démonstration, un théorème qui est bien connu et qui a été mise au point par Mogyoródi dans [2].

THÉORÈME 2. *Soient* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale et* Φ *une fonction de Young vérifiant la condition de croissance modérée. Si* $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||X_n||_\Phi < +\infty$ *alors la martingale est régulière et converge dans* L^Φ *vers sa limite presque sûre* $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$.

DÉMONSTRATION (v. [2]).

PROPOSITION 2. *Soient* Φ *une fonction de Young vérifiant la condition de croissance modérée,* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale telles que* $X_n \in L^\Phi, n \in \mathbb{N}$; *Désignons par*

$$\Phi(|X_n|) = M_n^{(\Phi)} + A_n^{(\Phi)}; \quad n \in \mathbb{N}$$

la décomposition de Doob de la sous-martingale intégrable $\{\Phi(|X_n|)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $\{A_n^{(\Phi)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est le processus croissant correspondant.*

Si $E(A_\infty^{(\Phi)}) < +\infty$ alors la martingale $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est régulière et converge dand L^Φ vers sa limite presque sûre.

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse la fonction Φ vérifie la condition de croissance modérée, soit $\Phi(ax \leq a\Phi(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$ pour un $a > 1$ et un $d < +\infty$, l'espace vectoriel L^Φ coincide avec l'ensemble des classes d'équivalence de v.a. X telles que $E[\Phi(|X|)] < \infty$. En effet si $X \in L^\Phi$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $||X||_\Phi \leq a^n$ alors l'inégalité $E[\Phi(\frac{|X|}{a^n}] \leq 1$ entraîne que

$$E[\Phi(|X|)] \leq d^n < +\infty$$

Inversement, si $E[\Phi(|X|)] < \infty$, l'inégalité générale $||X||_\Phi \leq \max\{1; E[\Phi(|X|)]\}$ implique que $X \in L^\Phi$. Alors $\{\Phi(|X|)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale intégrable et nous pouvons donc prendre la décomposition de Doob de $\{\Phi(|X|)\}_{n\in\mathbb{N}}$, soit

$$\Phi(|X_n|) = M_n^{(\Phi)} + A_n^{(\Phi)}; \quad n \in \mathbb{N}$$

comme $A_0^{(\Phi)} = 0$ alors $M_0^{(\Phi)} = \Phi(|X_0|)$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} E[\Phi(|X_n|)] &= E(A_n^{(\Phi)}) + E(M_n^{(\Phi)}) = \\ &= E(A_n^{(\Phi)}) + E[\Phi(|X_0|)]. \end{aligned} \tag{39}$$

De l'inégalité générale

$$||X_n||_\Phi \leq \max\{1; E[\Phi(|X_n|]\}$$

on voit alors que

$$||X_n||_\Phi \leq \max\{1; E(A_n^{(\Phi)}) + E[\Phi(|X_n|]\}.$$

Nous avons enfin, en désignant $E[\Phi(|X_0|] = a$,

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} ||X_n||_\Phi &\leq \max\{1; \lim_{n\to\infty} \uparrow E(A_n^{(\Phi)}) + a\} \\ &= \max\{1; E(A_n^{(\Phi)}) + a\} < +\infty. \end{aligned} \tag{40}$$

D'après le Théorème 2, la martingale $\{X_n\}$ est régulière et converge dans L^Φ vers sa limite presque sûre.

REFERENCES

[1] Jacques Neveu, *Martingale à temps discret*, Masson et C^{ie}, Éditeurs 1972
[2] J.T. Mogyorodi, *A remark on a theorem of J. Neveu*, Annales Univ. Sci. Budapest, Sec. Math. XXI, 1978, 77-81.
[3] M.A. Krasznoszelskij and Ya. Bi. Rutyickij, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Gröningen, 1961.
[4] Phan Viet Thu, *On the oscillation of martingales*, Annales Univ. Sci. Budapest, Sec. Math. Tomus XXV, 1982, 145-149.

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
MECANIQUE ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE HANOI