ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 17, Number 2, 1992

LES SYSTÈMES DE REPRÉSENTATION ABSOLUE ET LE PROLONGEMENT DES FONCTIONS ENTIÈRES DANS LES ESPACES DUAUX DE FRÉCHET MONTEL

CHAN PORN

Soit G un domaine convexe dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{O}(G)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes sur G, muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts de G. D'après [6], on sait qu'il existe une suite $\{\lambda^k\} \subset \mathbb{C}^n$ telle que toute $f \in \mathcal{O}(G)$ peut être écrite sous la forme

$$\text{(Exp)} \qquad \begin{cases} f(z) = \sum\limits_{k\geq 1} \xi_k \exp(z, \lambda^k) \\ \sum\limits_{k\geq 1} |\xi_k| \exp \|\lambda^k\|_K < \infty \end{cases}$$

pour tout ensemble compact K dans G et

$$\lim_{k\to\infty} \|\lambda^k\| = \infty,$$

où

$$(z, \lambda^k) = z_1\lambda_1^k + \cdots + z_n\lambda_n^k$$

et

$$\|\lambda^k\|_K = \sup\left\{|z, \lambda^k)| : z \in K\right\}.$$

Puisque $\mathcal{O}(G)$ est nucléaire, il entraine que l'énoncé est valable pour l'espace $\mathcal{O}(G, F)$ des fonctions holomorphes sur G à valeurs dans un espace de Banach F.

Le but de cette note est d'étudier la représentation ci- dessus dans le cas de dimension infinie.

Dans la Section 2 nous allons montrer qu'une espace de Fréchet E est nucléaire si et seulement si toute $f \in \mathcal{O}(E^*, F)$, où E^* désigne l'espace dual

Received March 9, 1991.

de E et F est un espace de Banach arbitraire, peut être écrite sous la forme $(\mathrm{Exp})_F$ (Le Théorème 1).

En utilisant la représentation $(\mathrm{Exp})_F$, dans la Section 3, nous montrons quelques résultats sur le prolongement des fonctions entières sur DFM-espaces. Dans un cas particulier, ce résultat a été obtenu par Boland en 1975 [1].

1. Préliminaires

Adoptons les notations habituelles de la théorie des espaces localement convexes utilisées dans les livres de Pietsch [8] et Schaefer [9]. Tous les espaces localement convexes sont supposés des espaces vectoriels complexes et de Hausdorff.

Par rapport à un espace localement convexe E, on note $C(E)$ l´ensemble des sous ensembles compacts absolument convexes de E. Notons $E(B)$ pour $B \in C(E)$, l´espace normé canonique. Nous observons que $E(B)$ est un espace de Banach si E est séquentiellement complet. Pour chaque $x^* \in E^*$ et $K \in C(E)$, posons

$$\|x^*\|_K = \sup\{|(x, x^*)| : x \in K\}.$$

Pour chaque seminorme continue ρ sur E, on note E_ρ l´espace de Banach associé à ρ, c´est à dire E_ρ est complété de $E/Ker\ \rho$ pour la seminorme ρ. Une fonction f sur un sous-ensemble ouvert G de E à valeurs dans un espace localement convexe F est appelée holomorphe si f est continue et Gateaux holomorphe, c´ est à dire $f \mid E_0 \cap G$ est holomorphe pour tout sous-espace E_0 de dimension finie. On désigne par $\mathcal{O}(G, F)$ l´espace des fonctions holomorphes sur G à valeurs dans F, muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts de G.

2. Les représentations exponentielles des fonctions holomorphes

Dans cette section, nous montrons d´abord le Théorème suivant

THÉORÈME 1. *Soit E un espace de Fréchet. Alors E est nucléaire si et seulement si chaque fonction $f \in \mathcal{O}(E^*, F)$ peut être écrite sous la forme*

$$(\mathrm{Exp})_F \qquad \begin{cases} f(x^*) = \sum\limits_{k\geq 1} \xi_k \exp(x^*, x_k) \\ \sum\limits_{k\geq 1} \|\xi_k\| \exp \|x_k\|_K < \infty, \forall K \in C(E^*) \end{cases}$$

pour tout espace de Banach F.

Nous allons utiliser le

LEMME 2. *Pour chaque $B \in C(E)$, il existe $C \in C(E)$ tel que l'application canonique $e(B, C)$ de $E(B)$ dans $E(C)$ est compacte.*

DÉMONSTRATION: Considérons un sous-espace fermé séparable H de E contenant B. D'après un théorème de Gejler [5], nous trouvons une application continue η de l'espace de Fréchet-Montel Q sur H. Puisque B est compact, il existe $K \in C(Q)$ tel que $\eta(K) = B$. Observons que l'application $\tilde{\eta} : Q(K) \to E(B)$ induite par η est ouverte. Ainsi il suffit de montrer qu'il existe $L \in C(Q)$ tel que $K \subseteq L$ et l'injection canonique $Q(K) \to Q(L)$ est compacte. Puisque Q est reflexive, Q^* est bornologique [9]. Ainsi $Q^* = \operatorname{limind} Q_n^*$, où Q_n est la complété de $Q/Ker\ p_n$, $\{p_n\}$ est une suite croissante de seminormes definissant la topologie de Q. Posons $P = \bigoplus\limits_n Q_n^*$. Soit α l'application canonique de P sur Q^*. Puisque α est ouverte, il ne reste qu'à verifier qu'il existe une seminorme continue q sur P telle que l'application $\tilde{\alpha} : P_q \to Q^*_{p(K)}$ est compacte, où $p(K)$ est la sup-norme sur K.

Prenons une suite $\lambda_j \downarrow 0$ telle que pour la boule unité U_j dans Q_j on a

$$\sum_{j\geq 1} \lambda_j \leq 1 \text{ et } \lambda_j K \subseteq U_j \text{ pour } j \geq 1.$$

Considérons une seminorme q sur P donnée par

$$q(\{u_j\}) = \sum_{j\geq 1} \|u_j\|_{j/\lambda_j^2}$$

où $u_j \in Q_j^*$ et $\|.\|_j$ est la sup-norme sur U_j. Évidemment α induit une application linéaire continue $\tilde{\alpha} : P_q \to Q^*_{p(K)}$. Nous montrons que $\tilde{\alpha}$ est compacte.

Soit $\{u^{(n)}\}$ une suite dans P telle que

$$\sup\left\{q(u^{(n)}) : n \geq 1\right\} = M < \infty.$$

Par conséquence, pour tout $m \geq 1$ et $x \in K$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{j>m} |u_j^{(n)}(x)| &= \sum_{j>m} \lambda_j |u_j^{(n)}(\lambda_j x)|/\lambda_j^2 \\ &\leq M \sum_{j>m} \lambda_j\end{aligned}$$

Cette inégalité montre que $\{\tilde{\alpha}(u^{(n)})\}$ est bornée et équicontinue sur K. Selon la compacité de K, nous pouvons conclure que $\{\tilde{\alpha}(u^{(n)})\}$ est relativement compacte dans $Q^*_{p(K)}$.

Le Lemme est démontré.

LEMME 3. *Soit E un espace de Fréchet tel que l'application canonique $\pi_{\rho,B}$ de $E(B)$ dans E_ρ est absolument sommable pour chaque $B \in C(E)$ et chaque semi-norme continue ρ sur E. Alors E est nucléaire.*

DÉMONSTRATION: Considérons $\sum_{k\geq 1} x_k$ une série inconditionnellement convergente dans E. Désignons par $\mathcal{B}(N)$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Considérons l'ensemble

$$B = \overline{conv}\left\{\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} : \sigma \in \mathcal{B}(N)\right\}.$$

Il est claire que $B \in C(E)$. En vertu du Lemme 2 nous pouvons choisir $C \in C(E)$ de sorte que l'application canonique $e(B,C)$ de $E(B)$ dans $E(C)$ soit compacte. Ceci implique que la série est inconditionnellement convergente dans $E(C)$. Compte tenu de la sommabilité absolue de $\pi_{\rho,B}$, on déduit que la série est aussi absolument convergente dans E pour toute semi-norme continue ρ sur E. Selon le Théorème de Grothendieck [8] E est nucléaire.

Le Lemme 3 est démontré.

Supposons que E est un espace localement convexe. Désignons par $\mathcal{F}$ la transformation de Borel de $(\mathcal{O}(E), \tau_0)^*$ dans $\mathcal{O}(E^*)$, où τ_0 est la topologie de convergence uniforme sur les compacts de $\mathcal{O}(E)$, donnée par

$$\hat{\mu}(x^*) = (\mathcal{F}\mu)(x^*) = (\mu, \exp(x, x^*)).$$

Donc $\mathcal{F}$ est une application linéaire de $(\mathcal{O}(E), \tau_0)^*$ dans

$$\mathrm{Exp(E)} = \{f \in \mathcal{O}(E^*) : \exists B \in C(E), A > 0 : |f(x^*)| \leq A \exp \|x^*\| B\}.$$

$\mathrm{Exp}(E)$ est muni de la topologie limite inductive

$$\mathrm{Exp}(E) = \mathrm{limind}\,\{\mathrm{Exp}(B) : B \in C(E)\},$$

où

$$\mathrm{Exp}(B) = \{f \in \mathcal{O}(E^*) : \exists A > 0; |f(x^*)| \leq A \exp \|x^*\|_B\}.$$

On a d'après [9] le résultat suivant

LEMME 4. *Soit E un espace de Fréchet nucléaire. Alors $\mathcal{F}$ est un isomorphisme entre $(\mathcal{O}(E^*), \tau_0)^*$ et $\mathrm{Exp}(E)$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1:

Supposons maintenant que toute $f \in \mathcal{O}(E^*, F)$, où F est un espace de Banach arbitraire, peut être écrite sous la forme $(\mathrm{Exp})_F$. Étant donné $B^0 \in C(E)$, l'application canonique $S : E^* \to E^*(B^0)$ peut être écrite sous la forme

$$S(x^*) = \sum_{k\geq 1} \xi_k \exp(x^*, x_k) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k\geq 1} \xi_k (x^*, x_k)^n$$

telle que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k\geq 1} \|\xi_k\| \; \|x_k\|^n_{K^0} = \sum_{k\geq 1} \|\xi_k\| \exp \|x_k\|_{K^0} < \infty, \forall K^0 \in C(E^*).$$

Donc

$$S(x^*) = dS(0)(x^*) = \sum_{k\geq 1} \xi_k (x^*, x_k)$$

et

$$\sum_{k\geq 1} \|\xi_k\| \; \|x_k\|_{K^0} < \infty, \forall K^0 \in C(E^*).$$

Ainsi S est nucléaire et donc $S^* : (E^*(B^0))^* \to (E(K^0))^{**}$ est nucléaire. Puisque $E(B^0) \subseteq (E^*(B^0))^*, E(K^0) \subseteq (E(K^0))^{**}$ et $S^* \mid E(B^0) = \pi_{B^0,\hat{K}^0}$, il entraine que π_{B^0,K^0} est absolument sommable. D´après le Lemme 3, nous déduisons la nucléarité de E.

Inversement, supposons que $\{x_k\}$ est un ensemble dénombrablement dense dans E et que $\{K_n\}$ est une suite croissante des ensembles compacts dans E^* telle que $E^* = \bigcup_{n\geq 1} K_n$. Évidemment

$$\sup\left\{\frac{|f(x)|}{\exp\|x\|_{K_n}} : x \in E\right\} = \sup\left\{\frac{|f(x_k)|}{\exp\|x_k\|_{K_n}}\right\}, \forall f \in \operatorname{Exp}(K_n)$$

et donc l´application

$$\eta^* : (\mathcal{O}(E^*), \tau_0)^* \cong \operatorname{Exp}(E^*) \to \left(l^1\{\exp\|x_k\|_{K_n}\}\right)^*$$

est un plongement, où

$$\eta : l^1\{\exp\|x_k\|_{K_n}\} \to \mathcal{O}(E^*)$$

donnée par

$$\eta(\{\xi_k\}) = \sum_{k\geq 1} \xi_k \exp(.,x_k).$$

Ceci implique que η est surjective [9].

Supposons maintenant que F est un espace de Banach. D´après les relations

$$l^1\{\exp\|x_k\|_{K_n}\}\hat{\otimes}_\Pi F \cong l^1\{\exp\|x_k\|_{K_n}, F\},$$

$$\mathcal{O}(E^*)\hat{\otimes}_\Pi F \cong \mathcal{O}(E^*)\hat{\otimes}_\epsilon F \cong \mathcal{O}(E^*, F)$$

et d´après la surjectivité de

$$\eta\hat{\otimes}_\Pi \mathrm{id}_F : l^1\{\exp\|x_k\|_{K_n}\}\hat{\oplus}_\Pi F \to \mathcal{O}(E^*)\hat{\odot}_\Pi F$$

il résulte que toute $f \in \mathcal{O}(E^*, F)$ peut être écrite sous la forme $(\operatorname{Exp})_F$.

Le Théorème 1 est démontré.

3. Le prolongement des fonctions entières

THÉORÈME 5. *Soient F un DF-espace et E un DFM-sous espace de F tels que toute fonction holomorphe sur E puisse être écrite sous la forme $(\operatorname{Exp})_{\mathbb{C}}$. Alors* *toute fonction holomorphe sur E peut être holomorphiquement prolongée sur F.*

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du

LEMME 6. *Soit η une application linéaire continue d'un espace de Fréchet F sur un espace de Fréchet séparable E. Alors il existe un sous espace fermé séparable F_0 de F tel que $\eta(F_0) = E$.*

DÉMONSTRATION: Soit $\{U_j\}$ une base de voisinages absolument convexes de $0 \in F$. Puisque η est ouverte, $\{\eta U_j\}$ est aussi une base de voisinages de $0 \in E$. Sous l'hypothèse du lemme pour chaque j il existe une suite $\{y_k^j\}_{k\geq 1} \subset \eta U_j$ telle que $\overline{\{y_k^j\}_{k\geq 1}} \supseteq \eta U_j$. Considérons $x_k^j \in U_j, x_k^j = \eta y_k^j$ et $F_0 = \overline{\text{span}}\{x_k^j\}_{k,j\geq 1}$. Il est facile de voir que

$$\overline{\eta(U_j \cap F_0)} \supseteq \{y_k^j\}_{k\geq 1} \supseteq \eta U_j, \forall j \geq 1.$$

Par conséquence l'application $\eta \mid F_0 : F_0 \to E$ est presque ouverte. D'après le théorème de l'application ouverte on obtient que $\eta(F_0) = E$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5:

(i) En vertu du Lemme 6, sans perte de la généralité, on peut admettre que F^* est séparable. D'après un résultat de Gejler [5], nous trouvons une application linéaire continue η de l'espace de Fréchet Montel $\tilde{F}$ sur F^*.

Ainsi on a la suite des surjections linénaires continues $\tilde{F} \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} F^* \overset{R}{\twoheadrightarrow} E$ et donc la suite des prolongements $E \hookrightarrow F^{**} \hookrightarrow \tilde{F}^*$.

Donc sans restreindre la généralité on peut admettre que F est un espace dual de Fréchet Montel.

(ii) Soit $\{K_n\}$ une suite croissante des ensembles compacts dans F telle que $F = \bigcup_{n\geq 1} K_n$. Puisque l'application restrictive $R : F^* \to E^*$ est ouverte, il existe une suite croissante $\{L_n\}$ des ensembles compacts dans E telle que $E = \bigcup_{n\geq 1} L_n$ et

$$\forall n \geq 1, \exists C_n > 0, \forall x^* \in E^*, \exists \tilde{x}^* \in F^* :$$

$$\tilde{x}^* \mid E = x^*, \|\tilde{x}^*\|_{K_n} \leq C_n \|x^*\| L_n = \|x^*\| \tilde{L}_n,$$

où $\tilde{L}_n = C_n L_n$.

Pour chaque $n, \epsilon > 0$, posons

$$W_n(\epsilon) = \{g \in \mathcal{O}(E) : |||g|||L_n \leq \epsilon\},$$

où

$$|||g|||L_n = \inf\left\{\sum_{k\geq 1} |\xi_k| \exp \|x^*\|L_n : \ g(x) = \sum_{k\geq 1} \xi_k \exp(x, x_k^*)\right\}.$$

Par l´hypothèse, $\{W_n(\epsilon)\}$ définit la topologie de $\mathcal{O}(E)$. Puisque $\mathcal{O}(F)$ et $\mathcal{O}(E)$ sont les espaces de Fréchet [7] pour compléter la démonstration du Théorème 5, il suffit de montrer que $R : \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}(E)$ est presque ouverte.

(iii) Étant donné $W_n(E)$ un voisinage de $0 \in \mathcal{O}(E), g \in W_n(\epsilon)$ et $\delta > 0$, prenons k_0 tel que

$$\sum_{k>k_0} |\xi_k| \exp \|x_k^*\|L_n < \delta,$$

Pour chaque $1 \leq k \leq k_0$, prenons $\tilde{x}_k^* \in F^*$ tel que

$$\tilde{x}_k^* \mid E = x_k^*, \ \|\tilde{x}_k^*\|K_n \leq \|x_k^*\|\tilde{L}_n.$$

Considérons $f \in \mathcal{O}(F)$ donnée par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k_0} \xi_k \exp(x, x_k^*).$$

Alors

$$\|f\|K_n \leq \sum_{k=1}^{k_0} |\xi_k| \exp \|\tilde{x}_k^*\|K_n \leq \sum_{k=1}^{k_0} |\xi_k| \exp \|x_k^*\|\tilde{L}_n,$$

$$|||g|||_{\tilde{L}_n} \leq \epsilon,$$

et

$$|||f - g|||_{\tilde{L}_n} \leq \sum_{k>k_0} |\xi_k| \exp \|x_k^*\|\tilde{L}_n < \delta.$$

Ainsi

$$\overline{R(\tilde{W}_n(\epsilon))} \supseteq W_n(\epsilon),$$

où

$$\tilde{W}_n(\epsilon) = \{f \in \mathcal{O}(F) : \|f\|K_n \leq \epsilon\}.$$

Donc R est presque ouverte.

Le Théorème est démontré.

REMARQUE. *En utilisant les Théorèmes 1 et 5 il résulte que toute fonction holomorphe sur un sous espace fermé dans un DFN-espace F peut être holomorphiquement prolongée sur F. Ce résultat a été démontré pour la première fois par Boland dans [1].*

REFERENCES

[1]. P. J. Boland, *Holomorphic functions on nuclear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **209** (1975), 275-281.
[2]. P. J. Boland, *Malgrange Theorem for entire functions on nuclear spaces*, Lecture Notes in Math. **364** (1974), 135-144.
[3]. P. J. Boland, *An example of a nuclear space in infinite dimensional holomorphy*, Ark. Math. **15** (1977), 87-91.
[4]. L. Bungart, *Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 317-344.
[5]. W. Gejler, *Extending and lifting continuous linear mappings in topological vector spaces*, Studia Math. **62** (1978), 295-303.
[6]. Yu. Korobeinik, *Les systèmes de représentation*, Uspekhi Math. Nauk **36** (1981), 73-126.
[7]. J. Mujica, *Domains of holomorphy in (DFC)-spaces Functional Analysis Holomorphy and Approximation Theory*, Lecture Notes in Math. **843** (1981), 500-533.
[8]. A. Pietsch, "Nuclear Locally Convex Spaces," Akademie Verlag, Berlin, 1972.
[9]. H. Schaefer, "Topological Vector Spaces," Macmillan New York, 1966.

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES,
INSTITUT DE PÉDAGOGIE HANOI 1