СРЕДНИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ ЛЯПУНОВА P-ОГО ПОРЯДКА ПРАВИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С БЕЛЫМ ШУМОМ

Н.К. ЛАН

Мы рассматриваем правильную систему дифференциальных уравнений (см.[3,8])

$$\dot{X} = A(t) X \tag{1}$$

где $A(t)$ —непрерывная ограниченная матрица, $t \in R^+$, $X \in R^n$ Наряду с системой (I) будем рассматривать возмущенную систему

$$dX = A(t) X\, dt + dW(t) \tag{2}$$

где $W(t)$ — n -мерный стандартный винеровский процесс на вероятном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см [6,7] с $p = 1$ и [5,I] с $p \in R$). Пусть $\{\xi(t)\}_{t \geqslant 0}$ — случайный процесс, принимающий значение в $\mathbf{R}^n$. Число (или символ $\pm\infty$) $g_p[\xi]$, определяемое формулой

$$g_p[\xi] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln M \|\xi(t)\|^p$$

называется *средним показателем Ляпунова р-ого порядка* или, короче, *р-казателем* процесса $\{\xi(t)\}_{t \geqslant 0}$. Если существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln M \|\xi(t)\|^p$, то этот показатель называется точным. Здесь $\|.\|$ обозначает норму в $\mathbf{R}_n$ и M математическое ожидание. В этой статье мы рассмотрим только случай $p \geqslant 0$.

Замечание I. Так как $g_p[\xi] = \chi[M\|\xi\|^p]$ где $\chi[f]$ является характеристическим показателем Ляпунова детерминированной функции $f(t)$, $g_p(.)$ имеет обычные свойства показателей Ляпунова:

I) Если $\xi(t, \omega)$, $\eta(t, \omega)$ — случайные процессы на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ такие что

$$M\|\xi(t)\|^p \leqslant M\|\eta(t)\|^p \qquad (\forall t \geqslant T \geqslant 0,$$

то

$$g_p[\xi] \leqslant g_p[\eta].$$

2) Если $\xi(t) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $(\forall\, t \geqslant T \geqslant 0)$ и $c \in \mathbf{R}$,

то

$$g_p[c\xi] = g_p[\xi].$$

3) Если $\xi(t) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $(\forall\, t \geqslant T \geqslant 0)$, то

$$g_p[\xi] = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} g_p[\xi_i],$$

где $$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)).$$

Пусть правильная система (I) имеет полный спектр Ляпунова $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Положим $B = diag\ [\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n]$. Пусть $X(t)$ есть нормальная фундаментальная система решений правильной системы (I) (см [3,8]). Положим

$$L(t) = X(t)\ exp\ (-tB). \tag{3}$$

Тогда преобразование $X(t) = L(t)\, y\,(t)$ переводит систему (2) в систему

$$dy = By\, dt + L^{-1}(t)\, dW(t).$$

Лемма 1. (см. [2]) *Для матричной функции $L(t)$, определяемой формулой (3), имеются следующие равенства*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \| l_i(t) \| = 0,$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \| l_k^{-1}(t) \| = 0,$$

где $l_i(t)$ — i -ый столбец матрицы $L(t)$ и $l_k^{-1}(t)$ к-ая строка матрицы $L^{-1}(t)$

Лемма 2. *Если $X(t) = L(t)y(t)$, где $L(t)$ определяется формулой* (3), *то*

$$g_p[X] = g_p[y].$$

Доказательство. Из равенства $X(t) = L(t)\, y\,(t)$ имеем

$$\| X(t) \|^p \leqslant \| L(t)^p \| \, \| y(t) \|^p \quad \text{и}$$

$$M \| X(t) \|^p \leqslant \| L(t) \|^p M \| y(t) \|^p.$$

По лемме I имеет местое неравенство $g_p[x] \leqslant g_p[y]$. Аналогичным образом, из $y(t) = L^{-1}(t)x(t)$ имеем $g_p[y] \geqslant g_p[x]$. Следовательно, $g_p[X] = g_p[y]$.

Обозначаем через $X(t, \omega, t_0, x_0)$ решение системы (2) с начальным условием x_0, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, т.е. $X(t_0, \omega, t_0 X_0) = x_0$. Ясно, что $X(t, \omega, t_0 x_0) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, p)$ $P \geqslant 0$ для люыбого $t \geqslant t_0$

Теорема 1. *Для любого решения системы (2) $X(t, \omega, t_0, x_0)$ его средний показатель Ляпунова p-ого порядка удовлетворяет равенству $g_p[X] = max(0, p\lambda_n)$, где λ_n — старший показатель системы* (I).

Доказательство. Пусть $X(t, \omega, t_0, x_0)$ —некоторое решение системы (2). Ясно, что $y(t) = L^{-1}(t)X(t)$ является решением системы (4). Согласно лемме 2 нам достаточно проверить теорему I для решения $y(t, \omega, t_0, y_0)$ системы (4) с начальным условием $y(t_0) = y_0 = L^{-1}(t_0)x_0$. Решение $y(t)$ системы (4) имеет следующий вид

$$y(t) = \exp\,(tB)\ [y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\,(-SB)\, L^{-1}(S)\, dW(S)]$$

или в координатной форме

$$y_k(t) = \exp(\lambda_k t)\,[y_{0k} + \int_{t_0}^{t} \exp(-\lambda_k S)\, l_k^{-1}(S)\, dW(S)],\ k = \overline{1, n},$$

где $l_k^{-}(S)$ — k-ая строка матрицы $L^{-1}(S)$. Если полагаем

$$\eta_k(t) = y_{0k} + \int_{t_0}^{t} \exp(-\lambda_k S)\, l_k^{-1}(S)\, dW(S),\ k = \overline{1, n},$$

то для каждых фиксированных k и t, $\eta_k(t)$ есть гауссовская случайная величина, имеющая нормальное распределение $N(y_{0k}, б_k(t))$, где

$$б_k(t) = \int_{t_0}^{t} \exp(-2\lambda_k S)\, \|l_k^{-1}(S)\|^2\, dS,\ k = \overline{1, n}.$$

Поэтому гауссовские случайные величины $\eta_k(t) \Big/ \sqrt{б_k(t)}$, $k = \overline{1, n}$. имеют нормальные распределения $N(y_{0k}/\sqrt{б_k(t)}, 1)$. Следовательно,

$$M\left|\frac{\eta_k(t)}{\sqrt{б_k(t)}}\right|^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{+\infty} |x|^p \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{y_{0k}}{\sqrt{б_k(t)}}\right)^2\right\} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^p \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{y_{0k}}{\sqrt{б_k(t)}}\right)^2\right\} dx$$

Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$\lim\limits_{t \to +\infty} M\left|\frac{\eta_k(t)}{\sqrt{б_k(t)}}\right|^p = M_0 > 0$, причём M_0 — конечное число. Отсюда следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln M \left|\frac{\eta_k(t)}{\sqrt{б_k(t)}}\right|^p = 0.$$

С другой стороны

$$\chi\,[б_k(t)] = \max(0, -2\lambda_k). \tag{4}$$

Действительно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует по лемме 1 число $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $t \geqslant T$ имеем

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} t\right) \leqslant \|l_k^{-1}(t)\| \leqslant \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} t\right).$$

Поэтому

$$\text{б}_k(t) = \int_{t_0}^{t} \exp(-2\lambda_k S) \|l_k^{-1}(S)\|^2 ds$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{T(\varepsilon)} \exp(-2\lambda_k S) C_1 dS + \int_{T(\varepsilon)}^{t} \exp(-2\lambda_k S) \exp(\varepsilon S) dS$$

$$\leqslant \widetilde{C}_1(\varepsilon) + \frac{1}{-2\lambda_k + \varepsilon} \exp\{(-2\lambda_k + \varepsilon) t\}$$

Отсюда следует, что

$$\chi[\text{б}_k(t)] \leqslant \max(0, -2\lambda_k)$$

Так как $\varepsilon > 0$ любое, имеем

$$\chi[\text{б}_k(t)] \leqslant \max(0, -2\lambda_k) \tag{5}$$

Аналогично, из оценки

$$\text{б}_k(t) = \int_{t_0}^{t} \exp(-2\lambda_k S) \| l_k^{-1}(S) \|^2 dS$$

$$= \int_{t_0}^{T(\varepsilon)} \exp(-2\lambda_k S) \| l_k^{-1}(S) \|^2 dS + \int_{T(\varepsilon)}^{t} \exp(-2\lambda_k S) \cdot \| l_k^{-1}(S) \|^2 dS$$

$$\geqslant \widetilde{C}_2(\varepsilon) + \frac{1}{-2\lambda_k - \varepsilon} \exp(-2\lambda_k - \varepsilon) t$$

получаем

$$\chi[\text{б}_k(t)] \geqslant \max(0, -2\lambda_k). \tag{6}$$

Очевдно, что из условий (5) и (6) следует равенство (4).
Заметим теперь, что

$$g_p[y_k(t)] = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln(tp\lambda_k) M.$$

$$\left| y_{0k} + \int_{t_0}^{t} \exp(-S\lambda_k) l_k^{-1}(S) d\omega(S) \right|^p \Big\}$$

$$= p\lambda_k + \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \left\{ (\text{б}_k(t))^{p/2} M \left| \frac{\eta_k(t)}{\text{б}_k(t)} \right|^p \right\}$$

$$= p\lambda_k + \frac{p}{2} \max(0, -2\lambda_k) + 0,$$

$$g_p[y_k] = \begin{cases} p\lambda_k & \lambda_k > 0 \\ 0 & \lambda_k \leqslant 0 \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что

$$g_p[y] = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} g_p[y_k] = \max(0,\ p\lambda_n).$$

Замечание 2. 1) Из теоремы 1 следует, что если старший показатель Ляпунова λ_n правильной системы (1) положителен, то тривиальное решение $X \equiv 0$ этой системы никогда не устойчиво в среднем p-ого порядка под действием гауссовского «белого шума».

2) Как обычно, случайный характеристический показатель Ляпунова решения $X(t,\ \omega,\ t_0,\ x_0)$ системы (2) определяется следующей формулой

$$\chi_\omega[X] = \overline{\lim_{t \to +\infty}}\ \frac{1}{t} \ln \| X(t,\ \omega) \|.$$

Тогда $\chi_\omega[x] = \max(0,\ \lambda_n)$ для всех решений $X(t,\ \omega,\ t_0,\ x_0)$ системы (2) (см. [4]). Поэтому теорема I вместе с результатом работы [4]). показывает, что связь между средним показателем Ляпунова р-ого порядка и случайным характеристическим показателем Ляпунова системы (2) аналогичная связи, установленной для случая эргодических стационарных систем, в работах С. А. Молчанова [5] при $n = 2$ и Л. Арнольда [I] при любом n. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим систему (2) с вышеуказ (2) анными предположениями. Тогда*

1) $g_p[x]$ *существует и не зависит от начального условия* $x_0 \in \mathbf{R}^n$

2) $g(p)$ *дифференцируема ио* $p(p > 0)$ *и имеется равенство*

$$g'_+(0) = \chi := \max(0,\ \lambda_n) \qquad n.\ B.)$$

где $$g_p(x) = g(p).$$

Автор выражает глубокую благодарность Чан Ван Ньюнгу за постановку задач и ценные указания и Нгуен Хыу Зы за помощь в обобщении полученных результатов на случай $p \in \mathbf{R}^+$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Arnold, *A formula connecting sample and moment stability of linear stochastic systems*, SIAM J. on Applied Math. 44 (1984), 793—802.

[2] Н.Д. Конг, *Характеритические показатели Ляпунова правильной системы с нелинейным возмущением и случайной неоднородностью*, Дифф. Урав. 21 (1985), 962—974.

[3] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Москва : Наука, 1967. 472 с.

[4] N. H. Du and T. V. Nhung, *On Lyapunov exponents of regular systems perturbed by a white noise*. Rep. 1987. Institut für Dynamische Systeme, Univ. Bremen (FRG).

[5] С. А. Молчанов, Изв. АН СССР : Сер. Мат, 42 (1978), 70–103.

[6] T. V. Nhung, *Lyapunov's exponents and random stability*, Proc. 2nd Vietnam. Math. Conf. Hanoi Aug. 1977 (in Vietnamese).

[7] T. V. Nhung, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie 23 (1979), 313–321.

[8] Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград Д.М. Гробман, В. В. Немыцкий *Теория показателей Ляпунова*, М: Наука, 1966, 576 с.

Поступила в редакцию 4 Августа 1987 г.

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАУК И КИБЕРНЕТИКИ, ХАНОЙ, ВЬЕТНАМ

PRINTED IN HANOI, JULY 1989

In tại Nhà máy in Tiến Bộ, Hà Nội. Khổ 19 × 27 — Số in 1463
Số XB XBBC. — In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 1989.