ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 14 No 1 (1989)

QUELQUES RESULTATS DE CONVERGENCE DES SUITES ADAPTÉES

C. CASTAING

§0- INTRODUCTION

It existe dans la littérature de nombreux résultats de convergence des martingales et des amarts à valeurs dans les espaces de Banach. Cf. Castaing-Valadier-Touzani ([8]), Chatterji ([12]), Chacon-Sucheston ([11]), Egghe ([16], [17]) Luu ([23], [24], Edgar-Sucheston ([15]), Millet-Sucheston ([25]), Neveu ([27]). On renvoie à Egghe ([16]) pour une bibliographie complète sur ce sujet. En Economie mathématique, il y a des problèmes de convergence analogues. Cf. Artstein ([1]), Balder ([3], [4], [5]), Hildenbrand-Mertens ([20]), Khan-Majumdar ([21]).

Dans ce papier, on présente quelques résultats de convergence dans ces problèmes de convergence, via des théorèmes de compacité faible dûs à Castaing-Clauzure ([9]), Dunford ([14]), Assani-Klei ([22]), Radouanne ([28]). A notre avis, l'utilisation des théorèmes de compacité est plus rapide et permet d'obtenir des résultats plus forts et, en même temps, fait aparaître, des analogies entre les problèmes économiques et probabilistes.

§1 — NOTATIONS

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé complet, $(\mathcal{F}_n)_{n \geqq 1}$ est une suite croissante de sous σ-algèbres de J. On suppose que $\mathcal{F}$ soit la σ-algèbre engendrée par $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$, bien que cette condition ne soit pas nécessaire partout. Soit T l'ensemble des temps d'arrêt bornés; $(X_n)_{n \geqq 1}$ une suite adaptée intégrable (i. e. $X_n \in L^1_E(\mathcal{F}_n)$) où E est un espace de Banach séparable. Une suite adaptée $(X_n)_{n \geqq 1}$ est de classe (B) si $\sup_{T \in T} \int | X_T | < +\infty$. En ce qui concerne la mesurabilité des multifonctions, on renvoie à Castaing-Valadier ([7]) et à Hess ([19], [19 bis]) pour des résultats plus récents.

§ 2 — RAPPELS

On rappelle les résultats qui sont bien connus des Probabilistes ([11], [15]).

LEMME 2.1. *(a) Soit* $(X_n)_{n\geqq 1}$ *une suite adaptée de classe (B). Pour tout* $\lambda > 0$, *on a*

$$P[\sup_{n\geqq 1} |X_n| > \lambda] \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{\tau\in T} \int |X_\tau|$$

(b) Si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *est une martingale telle que* $\sup_{n\geqq 1} \int |X_n| < +\infty$, *alors l'inégalité précédente devient*

$$P[\sup_{n\geqq 1} |X_n| > \lambda] \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{n\geqq 1} \int |X_n| .$$

LEMME 2. 2. (a) *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite adaptée de classe* (B). *Soit* $\lambda > 0$. *Il existe un temps d'arrêt* σ_λ *tel que* $\sup_{n\geq 1} |X_{n\wedge\sigma_\lambda}| \in L^1_{\mathbf{R}}(\mathcal{F})$ *et tel que la suite* $(X_{n\wedge\sigma_\lambda})_{n\geqq 1}$ *coincide avec* $(X_n)_{n\geqq 1}$ *excepté sur l'ensemble* $A_\lambda = [\sigma_\lambda < +\infty]$, *de probabilité* $\leqq \frac{1}{\lambda} \sup_T \int |X_T|$.

(b) *Soit* $(X_n)_{n\geqq 1}$ *une martingale telle que* $\sup_{n\geqq 1} \int |X_n| < +\infty$. *Soit* $\lambda > 0$. *Il existe un temps d'arrêt* σ_λ *tel que la suite* $(X_{n\wedge\sigma_\lambda})_{n\geqq 1}$ *soit une martingale qui vérifie* $\sup_{n\geqq 1} |X_{n\wedge\sigma_\lambda}| \in L^1_{\mathbf{R}}(\mathcal{F})$ *et qui coïncide avec* $(X_n)_{n\geqq 1}$ *excepté sur l'ensemble* $A_\lambda = [\sigma_\lambda < +\infty]$, *de probabilité* $\leqq \frac{1}{\lambda} \sup_{s\geqq 1} \int |X_n|$.

§ 3 — CONVERGENCE DES AMARTS

DÉFINITION 3. 1. Un amart multivoque est une suite de multifonctions $\mathcal{F}_n$ - mesurables et intégralement bornées $(X_n)_{n\geq 1}$ de Ω à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{P}_{cfk}(E)$ des convexes faiblement compacts non vides de E telle que la suite généralisée $(\int X_T)_{T\in \mathbf{T}}$ converge pour la distance de Hausdorff h mise sur $\mathcal{P}_{cfk}(E)$.

Remarque. Il est bon de noter que

$$\int X_T = \sum_{\min T}^{\max T} \int_{[T=k]} X_k$$

pour tout $\tau \in T$, de sorte que $\int X_\tau$ appartienne à $\mathcal{P}_{cfk}(E)$ car chacune des $\int_{[t=k]} X_k$ est convexe faiblement compact, *cf.* Castaing—Valadier ([6], theor. 3).

THEORÈME 3.1. *On suppose E' fortement séparable et E RNP. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ un amart multivoque tel que* $\sup_{n \geq 1} |X_n| \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$ *avec* $|X_n|(\omega) = \sup\{\|x\| \mid x \in X_n(\omega)\}$ $(\omega \in \Omega)$. *Alors il existe $X_\infty : \Omega \to \mathcal{P}_{cfk}(E)$, $\mathcal{G}$-mesurable, intégrablement bornée et un négligeable N tel que*

$$\forall\ \omega \in \Omega \setminus N,\ \forall\ x' \in E',\ \lim_{n \to \infty} \delta^*(x', X_n(\omega)) = \delta^*(x', X_\infty(\omega))$$

Démonstration. Observons d'abord l'ensemble $P_{cfk}(E)$ muni de la distance de Hausdorff h est *complet* en vertu du lemme de Grothendieck ([18], p. 296). Ceci étant, on a, pour tout $A \in \mathcal{J}$, $\lim_{T \in T} \int_A x_T \in \mathcal{P}_{cfk}(E)$ comme dans le cas des amarts vectoriels, cf. ([8], [11], [23], [24]) compte tenu de la remarque qui suit la définition 3.1. Il résulte que l'ensemble $(\int_A x_n)_{n \geq 1}$ est relativement faiblement compact dans E pour tout $A \in \mathcal{G}$. Comme E'_b est séparable et E est RNP. la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est relativement faiblement compacte dans l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{cfk}(E)}(\Omega, \mathcal{J}, P)$ des multifonctions $\mathcal{G}$-mesurables et intégrablement bornées de Ω dans $\mathcal{P}_{cfk}(E)$ en vertu d'un résulta de Castaing-Clauzure ([9], théor. 4.1). Ceci implique qu'il existe un filtre $\mathcal{J}$ plus fin que le filtre de Fréchet et $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{P}_{cfk}(E)}(\Omega, \mathcal{J}, P)$ tel que pour tout $u \in L^\infty_{E'_b}(\mathcal{J})$, on ait

$$\lim_{\mathcal{F}} \int_\Omega \delta^*(u(\omega), X_n(\omega))\, P(d\omega) = \int_\Omega \delta^*(u(\omega), X_\infty(\omega))\, P(d\omega).$$

Soit (e'_k) une suite dense dans E'_b. Pour tout $k \geq 1$, et pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a, en vertu de ce qui précède et du fait que $(X_n)_{n \geq 1}$ est un amart,

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \delta^*(e'_k, X_n) = \int_A \delta^*(e'_k, X_\infty)$$

Comme chacune de $(\delta^*(e'_k, x_n))_{n \geq 1}$ est un amart réel borné, $\lim_{n \to \infty} \delta^*(e'_k, X_n)$ existe p.p. Mais la suite $(\delta^*(e'_k, X_n))_{n \geq 1}$ est latticiellement bornée, on en déduit que, pour tout $A \in \mathcal{G}$.

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \delta^*(e'_k, X_n) = \int_A \lim_{n \to \infty} \delta^*(e'_k, X_n) = \int_A \delta^*(e'_k, X_\infty)$$

par suite, it existe un négligeable N tel que

$$\forall\ (\omega, k) \in (\Omega \setminus N) \times \mathbb{N},\ \lim_{n \to \infty} \delta^*(e'_k, X_n(\omega)) = \delta^*(e'_k, X_\infty(\omega))$$

Ceci permet de conclure. En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $e' \in E'$, on a

$$\begin{aligned}
&| \delta^* (e', X_n(\omega)) - \delta^* (e', X_\infty (\omega))| \\
&\leq | \delta^* (e', X_n (\omega)) - \delta^* (e'_k, X_n (\omega)) | \\
&+ | \delta^* (e'_k, X_n (\omega)) - \delta^* (e'_k, X_\infty (\omega)) | \\
&+ | \delta^* (e'_k, X_\infty(\omega)) - \delta^* (e', X_\infty (\omega)) | \\
&\leq \max (\delta^* (e' - e'_k, X_n (\omega)), \delta^* (e'_k - e') X_n (\omega))) \\
&+ | \delta^* (e'_k, X_n (\omega)) - \delta^* (e'_k, X_\infty (\omega)) | \\
&+ \max (\delta^* (e'_k - e', X_\infty (\omega)), \delta^* (e' - e'_k, X_\infty (\omega))) \\
&\leq \|e' - e'_k\| \sup_n |X_n (\omega) | + | \delta^* (e'_k, X_n (\omega) - \delta^* (e'_k, X_\infty (\omega))| \\
&+ \|e' - e'_k\| \, |X_\infty (\omega) |
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$ et tout $e' \in E'$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \delta^*(e', X_n (\omega)) = \delta^*(e', X_\infty(\omega))$$

Remarques. 1) Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est un amart à valeurs vectorielles de classe *(B)*, i.e. $X_n \in L^1_E (\mathcal{L}_n)$, $\forall n \geqslant 1$, tel que $\lim_T \int X_T$ existe dans E et tel que $\sup_{T \in \mathrm{T}} \int | X_T | < + \infty$, le théorème précédent se réduit au cas étudié par Chacon-Sucheston ([11]), compte-tenu du lemme 2.2 cité en rappel. Dans ce cas, on peut utiliser le théorème de compacité faible dans $L^1_E (\mathcal{J})$ de Dunford-Pettis, cf. par exemple Diestel-Uhl ([9]). Cette remarque justifie bien l'utilisation des résultats de compacité dans la convergence des amarts.

2) Une inspection rapide de la fin de la démonstration du théorème précédent montre qu'il est possible de s'affranchir de la condition E'_b séparable et E RNP. Ceci fait l'objet des résultats suivants.

Voici d'abord des lemmes qui sont directement liés à la convergence des martingales à valeurs dans un Banach séparable non nécessairement RNP cf. Chatterji ([12]).

LEMME 3.2. *Soit $(X_n)_{n \in N^* \cup (+\infty)}$ une suite de multifonction $\mathcal{F}$-mesurables de Ω à valeurs dans $\mathcal{P}_{cfk}(E)$. On suppose qu'il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable, C, de Ω à valeurs dans $\mathcal{P}_{cfk} (E)$ telle que*

$$X_n (\omega) \subset C(\omega)$$

pour tout $n \in N^* \cup (+\infty)$ et tout $\omega \in \Omega$, *On suppose, en outre, que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\forall x' \in E'$, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n)$ *existe p.p.*

(ii) $\sup\limits_{n\in \mathbf{R}^* U(+\infty)} | X_u | \in L^1_{\mathbf{R}}(\mathcal{F})$

(iii) $\forall\ A \in \mathcal{G}, \forall\ x' \in E', \lim\limits_{n\to\infty} \int_A \delta^*(x', X_n) = \int_A \delta^*(x', X_\infty)$

Alors, il existe un négligeable N tel que

$$\forall\ \omega \in \Omega\setminus N,\ \forall\ x' \in E',\ \lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega)) = \delta^*(x', X_\infty(\omega)).$$

Démonstration. Soit $(e'_k)_{k\geq 1}$ une suite dans E', dense pour la topologie de Mackey. Il résulte de (i), (ii), (iii) qu'on a

$$\forall\ k \geq 1, \quad \lim_{n\to\infty} \delta^*\ (e'_k, x_n) = \delta^*(e'_k, x_\infty)$$

p. p. On termine la démonstration en écrivant, pour tourt $e' \in E'$, tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} &| \delta^*(e', X_n) - \delta^*(e', X_\infty) | \\ \leq\ &\max\ (\delta^*(e' - e'_k, X_n), \delta^*(e'_k - e', X_n)) \\ +\ &| \delta^*(e'_k, X_n) - \delta^*(e'_k, X_\infty) | \\ +\ &\max\ (\delta^*(e'_k - e', X_\infty), \delta^*(e' - e'_k, X_\infty)) \\ \leq\ &\max\ (\delta^*(e' - e'_k, C), \delta^*(e'_k - e', C) \\ +\ &| \delta^*(e'_k, X_n) - \delta^*(e'_k, X_\infty) | \\ +\ &\max\ (\delta^*(e'_k - e', X_\infty), \delta^*(e' - e'_k, X_\infty)). \end{aligned}$$

Remarque. Hess m'a fait remarquer que l'hypothèse (iii) peut être supprimée comme le montrent les deux lemmes suivants.

LEMME 3.3. (Hess). *On considère un espace de Banach séparable E et une partie D' de E' dénombrable partout dense pour T(E'. E).*

On considère aussi une suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{P}_{cfk}(E)$ vérifiant :

(1) $\begin{cases} \text{il existe } K \in \mathcal{P}_{cfk}(E) \text{ tel que} \\ \forall_n \geq 1 \quad F_n \subset K. \end{cases}$

(2) $\left\{ \forall\ x \in D' \lim\limits_{n\to\infty} \delta^*(x', F_n) \text{ existe.} \right.$

Dans ces conditions, il existe F_∞ dans $\mathcal{P}_{cfk}(E)$ tel que

$$\forall\ x' \in E',\ \delta^*(x', F_\infty) = \lim_{n\to\infty} \delta^*(x', F_n).$$

Démonstration. Il est bien connu que l'ensemble

$$\{C \in \mathcal{P}_{cfk}(E) \mid C \text{ est inclus dans } K\}$$

est compact pour la topologie de Hausdorff associée à la topologie faible (cf. par exemple Christensen [13]).

Cette topologie de Hausdorff correspond à celle de la convergence simple des fonctions d'appui sur D'. Si F_∞ est une point adhérent à la suite (F_n) pour cette topologie on voit, grâce à l'hypothèse (2) que

$$\forall x' \in D', \ \delta^*(x', F_\infty) = \lim_{n\to\infty} \delta^*(x', F_n).$$

Pour obtenir la convergence pour tout $x' \in E'$, on procède comme dans la preuve du lemme 3.2.

Voici maintenant une version améliorée du lemme 3.2.

LEMME 3.4 (Hess). *On considère un espace de Banach séparable E, un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de multifonctions $\mathcal{F}$-mesurables définies sur Ω à valeurs dans $\mathcal{P}_{cfk}(E)$.*

On suppose en outre que:

$$(3) \begin{cases} \textit{il existe une multifonction } \mathcal{F}\textit{-mesurable } C \textit{ définie sur } \Omega \textit{ à valeurs dans} \\ \mathcal{P}_{cfk}(E), \textit{ telle que} \\ \forall n \geq 1, \forall \omega \in \Omega \quad X_n(\omega) \subset C(\omega) \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \forall x' \in D', \ \lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n) \textit{ existe } \text{p.p.} \textit{ où } D' \textit{ est une suite dense pour} \\ T(E', E). \end{cases}$$

a) *Dans ces conditions, il existe une multifonction X_∞, $\mathcal{F}$-mesurable et à valeurs dans $\mathcal{P}_{cfk}(E)$, et un négligeable N, tels que*

$$\forall x' \in E', \ \forall \omega \in \Omega \setminus N$$
$$\delta^*(x', X_\infty(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega))$$

b) *Si, en outre, $\sup_{n\geq 1} |X_n|$ appartient à $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$, alors X_∞ est integralement bornée.*

Démonstration. Puisque D' est dénombrable, l'hypothèse (4) permet de construire un negligeable N (appartenant à $\mathcal{F}$) tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \ \forall x' \in D'$$
$$\lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega)) \text{ existe.}$$

On applique alors le lemme 3.3 pour tout ω dans $\Omega \setminus N$, en posant:

$$K = C(\omega) \text{ et, quelque soit } n \geq 1, \ F_n = X_n(\omega).$$

Ceci implique l'existence d'une multifonction X_∞ scalairement mesurable et même mesurable car E est séparable, vérifiant le point a). L'affirmation b) s'obtient en posant $g = \sup_{n \geqq 1} |X_n|$ et en observant que à cause de (3)

$$\forall \omega \in \Omega, X_\infty(\omega) \subset C(\omega) \cap g(\omega)B.$$

Puisque la multifonction $C(.) \cap g(.) B$ est intégralement bornée, on a bien la conclusion désirée.

THÉORÈME 3.5. *Soit $(X_n)_{n \geqq 1}$ une martingale à valeurs de E qui vérifie les deux propriétés suivantes:*

(i) $\sup_n \int |X_n| < +\infty$

(ii) *Il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable L de Ω à valeurs convexes fermées localement faiblement compactes et ne contenant pas de droites* (LCSD) *de E telle que $X_n(\omega) \in L(\omega)$ pourtout $n \geqq 1$ et tout $\omega \in \Omega$.*

Alors il existe $X_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$ telle que $(X_n)_{n \geqq 1}$ converge p.p. vers X_∞ pour la topologie de la norme E.

Démonstration. En vertu du lemme 2.2, on peut supposer $g = \sup_{n \geqq 1} |X_n| \in L^1_R(\mathcal{F})$. Par suite, on a avec les notations de l'énoncé,

$$X_n(\omega) \in L(\omega) \cap g(\omega) B$$

où B est la boule unité de E, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \geqq 1$. Posons pour tout $\omega \in \Omega$.

$$\Phi(\omega) = L(\omega) \cap g(\omega) B$$

Alors Φ est une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable, intégralement bornée, à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E. Par suite l'ensemble S_Φ des sélections intégrables de Φ est convexe, $\sigma(L^1_E(\mathcal{F}), L^\infty_{E'}(\mathcal{F}))$ compact. Cf. Klei-Assani ([22]), Radouanne [28]; la compacité faible S_Φ résultant très simplement du théorème de James-Pryce. Comme $X_n \in S_\Phi$ pour tout $n \geqq 1$, on peut supposer que $(X_n)_{n \geqq 1}$ converge vers X_∞ pour $\sigma(L^1_E(\mathcal{F}), L^\infty_{E'_s}(\mathcal{F}))$. Or $(X_n)_{n \geqq 1}$ est une martingale, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 1, \quad E^{\mathcal{F}_n}(X_\infty) = X_n.$$

Et, par suite

$$\lim_{n \to \infty} E^{\mathcal{F}_n}(X_\infty) = X_\infty \quad \text{p.p.},$$

en vertu du théorème de Lévy. Ceci termine la démonstration.

Remarque. Ce résultat a été démontré par Chatterji ([12]) avec une démonstration différente; Chatterji suppose que $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ est relativement faiblement compact dans E pour tout $\omega \in \Omega$. Par conséquent, on retrouve ainsi le résultat ([12]).

Le théorème suivant est un résultat de convergence des amarts.

THÉORÈME 3. 6. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un amart de classe* (B). *On suppose qu'il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable L de Ω à valeurs convexes fermées LCSD de E telle que $X_n(\omega) \in L(\omega)$ pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$. Alors il existe $X_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$ telle que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement presque partout vers X_∞.*

Démonstration. Grâce au lemme 2.2, on se ramène au cas où $g = \sup_n |X_n| \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. En reprenant les arguments et les notations de la démonstration du théorème 3.5, il existe $X_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \langle x', X_n\rangle = \int_A \langle x', X_\infty\rangle$$

pour tout $x' \in E'$ et tout $A \in (\mathcal{F})$. Comme $(X_n)_{n\geq 1}$ est un amart, on a $\lim_{n\to\infty} \langle x', X_n\rangle$ existe p.p. Ainsi on est dans les condition d'application du lemme 3.2. avec $X_n(\omega) \in \Phi(\omega)$, $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, \omega \in \Omega$. Ceci permet de conclure puisque $\Phi(\omega)$ est convexe faiblement pour tout $\omega \in \Omega$.

Remarque. La démonstration précédente est basée sur le lemme de réduction 2.2 qui *est valable pour les suites adaptées de classe* (B). En fait, on peut s'affranchir de l'hypothèse « (X_n) de classe (B) » dans l'énoncé précédent en utilisant le lemme 3,4, et il n'est pas nécessaire de faire appel ni au théorème de compacité faible dans $L^1_E(\mathcal{F})$, ni au lemme de réduction 2.2. De facon précise, le lemme 3. 4 admet des conséquences suivantes qui sont dues à Hess.

PROPOSITION 3. 7. (Hess). *On considère:*

— *un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*

— *un espace de Banach séparable E*

— *une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de L^1_E*

On note D' une partie dénombrable de E' dense pour la topologie de Mackey. On suppose aussi réalisées les trois hypothèses suivantes:

a) $\forall x' \in D'$, *la suite $(\langle x', f_n(\cdot)\rangle)_{n\geq 1}$ converge p.s.*

b) $\lim_{n\to\infty} \inf \int \| f_n \| \cdot dp$ *est finie*

c) *il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable C définie sur Ω, à valeurs dans $\mathcal{P}_{cfk}(E)$ telle que*

$\forall_n \geq 1$, $\forall\, \omega \in \Omega$, $f_n(\omega) \in C(\omega)$

Dans ces conditions, il existe $f \in L^1_E$ telle que (f_n) converge vers f p.s. pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Démonstration. D'après le lemme de Fatou, on a

$$\liminf_{n\to\infty} \int \| f_n \| \, dp \geq \int \liminf_{n\to\infty} \| f_n \| \, dp$$

Grâce à b) on voit que la fonction $\liminf_{n\to\infty} \| f_n \|$ est intégrable. Ceci étant, en vertu des hypothèses a) et c) on peut appliquer le lemme 3.4. Il existe alors une application $\mathcal{F}$-mesurable f de Ω dans E telle que

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ p.s.}$$

pour la topologie $\sigma(E, E')$. La semi continuité inférieure de la norme de E permet alors d'écrire

$$\| f(\omega) \| \leq \liminf_{n\to\infty} \| f_n(\omega) \| \text{ p.s.}$$

par suite, f appartient à $L^1_E(\mathcal{F})$.

Remarque. La proposition précédente permet de retrouver le théorème 3.6, sans supposer que (X_n) soit de classe (B). De façon précise, si (X_n) *est un amart à valeurs dans E vérifiant les conditions suivantes:*

(1) $\liminf_{n\to\infty} \int \| X_n \| \, dp < +\infty$

(2) *il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable, C, de Ω à valeurs dans $\mathcal{P}_{cfk}(E)$ telle que*

$$\forall\, n \geq 1, \forall \omega \in \Omega, X_n(\omega) \in C(\omega),$$

alors X_n converge p.s. pour $\sigma(E, E')$ vers $X_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$.

Cette assertion résulte immédiatement de la proposition 3.7. Hess m'a fait remarquer à tire d'exemple, que la proposition 3.7 permet aussi de fournir une démonstration différente de celle donnée dans le théorème 3.5, sans utiliser la compacité faible dans $L^1_E(\mathcal{F})$, ni le lemme de réduction 2.2. Bien entendu, il y a d'autres démonstrations possibles (cf. Egghe [17], th. I—2. 4. 3.). En effet, si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale vérifiant les hypothèses du théorème 3.5, alors (X_n) converge p.s. vers X_∞ dans $L^1_E(\mathcal{F})$ pour $\sigma(E, E')$ en vertu de la proposition 3.7 car, pour tout $x' \in E'$, la suite $(\langle x', X_n\rangle)_{n\geq 1}$ est une martingale convergente. Comme la suite $(|X_n|)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale positive convergente, on en conclut que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers X_∞ po r la norme de E grâce à un lemme de Neveu sur la convergence des sous martingales ([26], lemme V—2. 9 th. II. 2. 4. 5)

§ 4 — PROBLEME DE CONVERGENCE EN ECONOMIE MATHEMATIQUE : LEMME DE FATOU DANS LES BANACH SEPARABLES

THÉORÈME 4.1. *Soit $\mathcal{H}$ un ensemble borné uniformément intégrable dans $L^1_E(\mathcal{F})$ qui vérifie la propriété $(L_\varepsilon, \varepsilon)$ suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable, L_ε, de Ω à valeurs convexes fermées LCSD de E telle que pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe $\Omega^f_\varepsilon \in \mathcal{F}$ avec $P(\Omega \setminus \Omega^f_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tel que $f(\omega) \in L_\varepsilon(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega^f_\varepsilon$. Alors (a) $\mathcal{H}$ est relativement faiblement compact dans $L^1_E(\mathcal{F})$, (b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{H}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = a$ pour la topologie faible de E, on peut extraire de $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite (f_{n_k}) qui converge faiblement dans L^1_E vers f_∞ qui vérifie les propriétés suivantes*

$$\left\{\begin{array}{l} (i) \quad \lim\limits_{k\to\infty} \int f_{n_k} = \int f_\infty = a \\ (ii) \quad \text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } g^\varepsilon_\infty \text{ dans } L^1_E(\mathcal{F}) \text{ tel que} \\ \left\| f_\infty - g^\varepsilon_\infty \right\|_1 \leq \varepsilon \text{ avec } g^\varepsilon_\infty(\omega) \in \overline{co\ Ls\,(f_{n_k}(\omega))} \cup \{0\} \text{ p.p.} \end{array}\right.$$

où $Ls(x_k) = \overline{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=k}^{\infty} \{x_m\}}^{\sigma}$, $\overline{\cdot}^{\sigma}$ *désigne l'adhérence faible dans E et $\overline{\cdot}$ désigne l'adhérence dans E pour la topologie de la norme. En conséquence,* $f_\infty(\omega) \in \overline{co\ Ls(f_{n_k}(\omega))} \cup \{0\}$ *p.p.*

Démonstration. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} P(A) \leq \eta \Rightarrow \sup\limits_{f\in\mathcal{H}} \int_A |f| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \sup\limits_{f\in\mathcal{H}} \int_{[|f|>\alpha]} |f| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}\right.$$

grâce à l'uniforme intégrabilité de $\mathcal{H}$. En vertu de l'hypothèse, il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable L_η de Ω à valeurs convexes fermées LCSD telle que, pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe Ω^f_η avec $P(\Omega \setminus \Omega^f_\eta) \leq \eta$ tel que $f(\omega) \in L_\eta(\omega)$ pour $\omega \in \Omega^f_\eta$. Soit $f \in \mathcal{H}$. On a

$$f = \chi_{\Omega^f_\eta} \chi_{[|f|\leq\alpha]} f + \chi_{(\Omega^f_\eta)^c} \chi_{[|f|\leq\alpha]} f + \chi_{[|f|>\alpha]} f$$

Soit $\Phi_\eta(\omega) = L_\eta(\omega) \cap \alpha B$ où B est la boule unité de E. Sans perte de généralité, on peut supposer $0 \in L_\eta(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, de sorte que Φ_η est une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable de Ω, intégralement bornée, à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E. Vu le choix de α et η, il est clair qu'on a l'inclusion

$$\mathcal{H} \subset S_{\Phi_\eta} + \varepsilon U$$

où S_{Φ_η} est l'ensemble des sélections intégrable de S_{Φ_η} et U la boule unité de $L^1_E(\mathcal{F})$. En évoquant encore le lemme de Grothendieck et la compactié faible de S_{Φ_η} (cf. démonstration du théorème 3.5), on conclut que $\mathcal{H}$ est relativement faiblement compact des $L^1_E(\mathcal{F})$.

(b) En vertu du point (a), la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est relativement faiblement compacte dans $L^1_E(\mathcal{F})$, donc, on peut supposer, sans perte de généralité, que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers f_∞ dans $L^1_E(\mathcal{F})$. Alors les notations du point (a), on peut supposer que la suite $(\chi_{\Omega^{f_n}_\eta} \chi_{[\,|f_n| \leqslant \alpha]} f_n)_{n\geq 1}$ convergefaiblement vers g^ε_∞ dans $L^1_E(\mathcal{F})$ avec $g^\varepsilon_\infty \in S_{\phi_\eta}$, de sorte que

$$\| f_\infty - g^\varepsilon_\infty \| \leq \varepsilon.$$

En effet, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\| f_n - \chi_{\Omega^{f_n}_\eta} \chi_{[\,|f_n| \leq \alpha]} f_n \|_1 \leq \varepsilon.$$

D'où

$$\| f_\infty - g^\varepsilon_\infty \|_1 \leq \liminf_n \| f_n - \chi_{\Omega^{f_n}_\eta} \chi_{[\,|f_n| \leq \alpha]} f_n \|_1 \leq \varepsilon$$

Reste à vérifier la relation

$$g^\varepsilon_\infty(\omega) \in \overline{\overline{\text{co}}\ Ls\ (f_n\ (\omega))} \cup \{0\}$$

p.p. or cette relation résulte du théorème suivant. On a besoin auparavant d'un lemme.

LEMME 4.2. (Valadier). *Soit Y un e.v.t. et* (x_n) *une suite dans Y. On note Ls* $\{x_n\}$ *(ou couramment* Ls x_n*), l'ensemble* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_m | m \geq n\}}$.

1) *On a* $\bigcap_n \overline{\text{co}}\ \{x_m \mid m \geq n\} \supset \overline{\text{co}}\ \text{Ls}\ x_n$.

2) *Si* $Y = \mathbf{R}^d$ *et si la suite* (x_n) *est bornée, on a*

$$\bigcap_n \overline{\mathrm{co}}\,\{x_m \mid m \geq n\} = \overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{Ls}\,x_n = \mathrm{co}\,\mathrm{Ls}\,x_n.$$

Preuve. 1) $\bigcap_n \overline{\mathrm{co}}\,\{x_n \mid m \geq n\}$ est un convexe fermé contenant $\mathrm{Ls}\,x_n$ donc contenant $\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{Ls}\,x_n$.

2) Soit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}\{x_n \mid m \geq n\}}$. Pour tout $n \geq 1$ il existe $Y_n \in \mathrm{co}\,\{x_m \mid m \geq n\}$ tel que $\| x - y_n \| \leq \frac{1}{\mathbf{n}}$. Chaque y_n est de la forme $y_n = \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_n^i\, x_{\beta(i,n)}$ (cf. théorème de Carathéodory) avec $\alpha_n^i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_n^i = 1$, $\beta : \{1, \dots, \alpha+1\} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ et $\forall\ (i,n)$, $\beta\,(i,n) \geq n$. Il existe une suite strictement croissante (n_k) telle que $\forall\ i$, $x_{\beta\,(i,n_k)} \to \overline{x}_i$ et $\alpha_{nk}^i \to \overline{\alpha}^i$. Soit $x = \sum_{i=1}^{d+1} \overline{\alpha}^i\, \overline{x}^i$. Comme $\overline{x}_i \in \mathrm{Ls}\,x_n$, on a $x \in \mathrm{co}\,\mathrm{Ls}\,x_n$.

Remarque. L' argumentation du 2) est celle de Hildenbrand-Mertens ([20]).

Exemple (montrant que 2) est faux si (x_n) n'est pas bornée).

Soit $E = \mathbf{R}$, $x_{3n} = 0$, $x_{3n+1} = n$, $x_{3n+2} = -n$. On a $\mathrm{Ls}\,x_n = \{0\}$ et $\forall\ n$, $\overline{\mathrm{co}}\,\{x_m \mid m \geq n\} = \mathbf{R}$.

Exemple. (montrant que 2) peut être faux en dimension infinie.

Soit $E = l^2(\mathbf{N})$, $x_{2n} = e_1$, $x_{2n+1} = e_n$. On a $\mathrm{Ls}\,x_n = \{e_1\}$. Par contre, $\forall\ n$, $\overline{\mathrm{co}}\,\{x_m \mid m \geq n\}$ contient 0 (on peut le justifier de façon «savante» en disant 0 est faiblement adhérent à $\{x_m \mid m \geq n\}$, etc.., ou de façon élémentaire: $(0, \dots, 0, \frac{1}{k'}\frac{1}{k'}, \dots, \frac{1}{k'} 0, \dots) = \sum_{i=o}^{k-1} \frac{1}{k} e_{n+1}$ appartient à $\mathrm{co}\,\{x_m \mid m \geq n\}$ et converge, en norme, vers 0).

THÉORÈME 4. 3. *Soit Γ une multifonction scalairement intégrable de Ω à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de sélections scalairement intégrables de Γ. Soit f_∞ une application scalairement intégrable de Ω dans E telle que*

$$\forall\ A \in \mathcal{F},\ \forall\ x' \in E'.\ \lim_{n \to \infty} \int_A \langle x', f_n \rangle = \int_A \langle x', f_\infty \rangle$$

Alors $f_\infty(\omega) \in \overline{\mathrm{co}\ \mathrm{Ls}(f_n(\omega))}$ p.p.

Démonstration. Supposons provisoirement que la multifonction $Ls(f_n) : \omega \to Ls(f_n(\omega))$ de Ω à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E est de graphe mesurable, c'est-à-dire, son graphe appartient à $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(E)$. Alors la multifonction $\omega \to \overline{\text{co}\ Ls(f_n(\omega))}$ de Ω à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E est scalairement $\mathcal{F}$-mesurable, Soit $(e'_k)_{k\geq 1}$ une suite dense dans E' pour la topologie de Mackey. En vertu de l'hypothèse, chacune des $(\langle e'_k, f_n\rangle)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers $\langle e'_k, f_\infty\rangle$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. Or la suite $(\langle e'_k, f_n\rangle)_{n\geq 1}$ est latticiellement bornée car on a

$$-\delta^*(-e'_k; \Gamma) \leq \langle e'_k, f_n\rangle \leq \delta^*(e'_k, \Gamma).$$

En vertu du théorème de Mazur et du lemme 4.2, on a

$$\langle e'_k . f_\infty(\omega)\rangle \in \text{co}\ Ls\ (\langle e'_k, f_n(\omega)\rangle) \text{ p.p.}$$

D'où

$$\langle e'_k, f_\infty(\omega)\rangle \leq \delta^*(e'_k, \overline{\text{co}\ Ls(f_n(\omega))}) \text{ p.p.}$$

Comme cette inégalité est vraie, pour tout $k \geq 1$, on en déduit que

$$f_\infty(\omega) \in \overline{\text{co}\ Ls(f_n(\omega))} \text{ p.p.}$$

Reste à prouver que la multifonction $\omega \mapsto Ls(f_n)(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcap_{m=n} (f_m(\omega))}$ σ est de graphe mesurable. Quitte à remplacer $\Gamma(\omega)$ par son enveloppe convexe fermée équilibrée, on peut supposer que $\Gamma(\omega)$ est équilibré pour tout $\omega \in \Omega$. On pose

$$\varphi_\omega(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|\langle e'_k, x\rangle|}{1 + \delta^*(e'_k, \Gamma(\omega))} & \text{si } x \in \Gamma(\omega) \\ +\infty \quad \text{si } x \notin \Gamma(\omega) \end{cases}$$

où (e'_k) est une suite dans E' séparant les points E. Soit

$$d_\omega(x, y) = \varphi_\omega\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

pour x et y dans $\Gamma(\omega)$. Comme φ est $\mathcal{F}\otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable et, pour tout $\omega \in \Omega$, $\varphi(\omega,.)$ est sous additive, convexe, faiblement continue sur le compact faible $\Gamma(\omega)$ avec $\varphi(\omega, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, d_ω définit une distance sur $\Gamma(\omega)$ qui est compatible avec la topologie faible de $\Gamma(\omega)$. Cette construction a été donnée dans Castaing-Clauzure ([10], theor. 2) et permet de montrer que le graphe de $Ls(f_n)$ appartient à $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$. En effet, on a

$$\text{graphe } Ls(f_n) = \{(\omega, s) \in \text{graph } \Gamma \mid \liminf_{n\to\infty} d_\omega(x, f_n(\omega)) = 0\}$$

Puisque le graphe de Γ appartient à $\mathcal{F} \otimes B(E)$ et puisque les fonctions $(\omega, x) \mapsto d_\omega(x, f_n(\omega))$ sont $\mathcal{F} \otimes B(E)$-mesurables, on a bien

$$\text{graphe } \mathrm{Ls}(f_n) \in \mathcal{F} \otimes B(E):$$

Vérifions le dernier point de l'énoncé. De façon précise, la conclusion (ii) du théorème 4.1. implique.

$$f_\infty(\omega) \in \overline{\mathrm{co}\ \mathrm{Ls}(f_{n_k}(\omega))} \cup \{0\} \quad \text{p.p.}$$

En effet, posons, pour tout $\omega \in \Omega$, $R(\omega) = \overline{\mathrm{co}\ \mathrm{Ls}(f_{n_k}(\omega)} \cup \{0\}$. D'après la conclusion (ii) on sait que $\forall\ j \geqq 1$, $\exists g^j_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$ vérifiant

$$g^j_\infty(\omega) \in R(\omega) \text{ p. p. et} \left\| f_\infty - g^j_\infty \right\|_1 \leq 1/j,\ \forall\ j \geqq 1$$

par conséquent $f_\infty = \lim\limits_{j \to \infty} g^j_\infty$ dans L^1_E puis, par extraction de soussuite,

$$f_\infty = \lim_{j \to \infty} g^j_\infty \quad \text{p.p.}$$

Ce qui montre bien que

$$f_\infty(\omega) \in R(\omega) \text{ p.p.}$$

Remarques. 1) La mesurabilité de $\mathrm{Ls}(f_n)$ peut se démontrer de façon différente sans supposer que la tribu $\mathcal{F}$ soit complète. En fait, la mesurabilité de $\mathrm{Ls}(f_n)$ résulte de la proposition 6. 3. 9 de l'exposé n° 9 de Hess ([19]). Celle donnée ici est basée sur la construction due à Castaing-Clauzure ([10)], theor. 2).

2) Le théorème 4. 1 et 4.3 généralisent des récents résultats obtenus par Khan-Majumdar ([21]) et Balder ([5], theor. 2. 1).

Signalons que les théoremes 4. 1 et 4. 3 permettent d'obtenir la convergence au sens de Mosco des ensembles des sélections du type

$$\frac{S^1_{\mathcal{F}_n}}{E(X_n)} \xrightarrow{M} \frac{S^1_{\mathcal{F}_\infty}}{E(X_\infty)}$$

Ce type de convergence a été établi par Choukairi dans un récent travail à paraître.

3) Le point (a) de l'énoncé du théorème 4. 1 montre qu'une martingale bornée uniformément intégrable $(X_n)_{n \geqq 1}$ dans un Banach séparable et vérifiant la propriété $(L_\varepsilon, \varepsilon)$ de l'énoncé du théorème 4. 1, converge p.p., compte tenu de la démonstration du théorème 3.5.

4) Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est sans atomes et si Γ est une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable et intégralement bornée à valeurs convexes faiblement compactes non vides de E,

alors l'ensemble $S_{\ddot{\Gamma}} = \{f \in L_E^1(\mathcal{F}) \mid f(\omega) \in \ddot{\Gamma}(\omega)\}$ où $\ddot{\Gamma}(\omega)$ est l'ensemble des points extrémaux de $\Gamma(\omega)$, est non vide, dense dans S_Γ pour $\sigma(L_E^1(\mathcal{F}), L_{E'}^\infty(\mathcal{F}))$, de sorte qu'on puisse formuler le point (b) du théorème 4. 1 en faisant intervenir les éléments de $S^1_{\overline{\ddot{co}(\mathrm{Ls} f_n)}}$. La vérification de ce point est laissée au lecteur ; cf. aussi Khan-Majumdar ([21], theor. 2).

Je remercie Hess pour des remarques très pertinentes sur la rédaction de ce papier.

REFERENCES

[1] Artstein, Z., *A note on Fatou's lemma in several dimensions*, J. Math. Econom., 6 (1979) 277–282.

[2] Bagchi, S.. *On a. s. convergence of class of multivalued asymptotic martingales*, Ann. Inst. Henri Poincaré, t. 21, n⁰ 4, 1985, 313–321.

[3] Balder, E. J., *A unifying note on Fatou's lemma in several dimensions*, Math. Oper. Res. 9 (1984), 267–275.

[4] Balder, E.J., *More on Fatou's lemma in several dimensions*, Canadian Math. Bull. (to appear).

[5] Balder, E. J., *Fatou's lemma in infinite dimensions*, Math. Institute, University of Utrech, Netherlande. (Preprint), 1985.

[6] Castaing, C. Valadier. M., *Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes*, Revue Informatique et de Recherche Opérationnelle, 16, (1969), 3-16.

[7] Castaing, C., Valadier, M., *Convex analysis and Measurable multifunctions*, Lecture Notes in Math., t. 580, 1977, Springer.

[8] Castaing, C., Touzani, A., Valadier, M., *Théorèmes de Hoffmann–Jorgensen et application aux amarts multivoques* (à paraitre dans Journal Mat. Pura Applicata) et Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier (1985), Exposé n⁰ 8.

[9] Castaing, C., Clauzure, P., *Compacité faible dans l'espace L_E^1 et dans l'espace des multifonctions intégralement bornées et minimisation*, Annali di Matematica pura ed Applicata IV, vol. CXL, 1985, 345–364.

[10] Castaing, C., Clauzure, P., *Semi-continuité des fonctionnelles intégrales*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1981), Exposé n⁰ 15.

[11] Chacon, R.V. et Sucheston, L., *On convergence of vector-valued asymptotic martingales*, Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Geb. 33, 1975, 55-59.

[12] Chatterji, S.D., *Vector-valued martingales and their applications*, Proc. Conf. Measure theory Oberwolfach 1975, Lect. Notes in Math., 526, 1976, 33–51, Springer.

[13] Christensen, J.P.R., *Topology and Borel Structure*, North–Holland 1974.

[14] Diestel, J., Uhl, J.J.J.R., *Vector measures*, Math. Survey, n⁰ 15 American Math. Soc. 1977, Providence Rhode Island.

[15] Edgar, G., Sucheston, L., *A class of asymptotic martingales, A discrete parameter*; J. Multivariate analysis, t, 6, 1976, 193–221.

[16] Egghe, L., *Weak and strong convergence of amarts in Fréchet spaces*, J. Multivariate Anal., 12, n⁰ 2, 1982, 291–305.

[17] Égghe, L., *Stopping time techniques in Analysis Universiteil* Antwerpen, Universitaire instelling antwerpen, Departement wiskunde–informatica, wilrijk 1985.

[18] Grothendieck, A., *Espaces vectoriels topologiques*, Sao Paulo, 1954.

[19] Hess, C., *Mesurabilité, convergence et approximation des multifonctions à valeurs dans un e.l.c.s.*, Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier 1985, Exposé n° 9.

[19bis] Hess, C., *Quelques résultats sur la mesurabilité de multifonctions à valeurs dans un espace métrique séparable*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1986, Exposé n° 1.

[20] Hilddenbrand, W., et Mertens, J, F., *On Fatou's lemma in several dimensions*, *Z*, Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gab. 17, 1975. 151–155.

[21] Khan, M.A., Majumdar, M., *Weak sequential convergence in $L^1(\mu, X)$ and an approximate version of Fatou's lemma*, J. Math. Anal. App, 114, 1986, 569–573.

[22] Klei, H.A., Assani, I., *Parties décomposables de L_E^1*, C.R. Acad. Sc Paris, Série I, 294, 1982, n° 16, 553–536.

[23] Luu, D.Q., *Representations of multivalued (regular) uniform amarts Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier*, vol. 14, Exposé n° 9, 1984.

[24] Luu, D.Q., *Stability and convergence of multivalued amarts and dimension of Banach spaces*, Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier, vol. 14, Exposé n° 11, 1984.

[25] Millet, A., Sucheston, L., *Convergence of class of amarts indexed by directed sets*. Canadian J. of Math., t, 32, 1980, n° 1, 86–125.

[26] Neveu, J., *Martingales à temps discret*. Masson, Paris, (1972).

[27] Neveu, J., *Convergence presque sure de martingales multivoques*, Ann. Inst. Henri Poincaré, t. 8, n° 1, 1972, 1–7.

[28] Radouanne, M., *Quelques propriétés topologiques dans les espaces des fonctions Bochner et Pettis intégrables*, Thèse 3ème cycle, Université Montpellier, 1985,

[29] Saadoune, M., *Lemme de Fatou multivoque*. Ensemble tendus, Thèse de 3ème cycle, Université Montpellier, 1986.

Received March 21, 1988.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC, PLACE EUGÈNE BATAILLON, 34060 MONTPELLIER, FRANCE