ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ol. 13 No 2 (1988)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ ЕСТЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ (1)

ДАНГ ХАНЬ ХОЙ и ФАМ НГОК ТХАО

Авторы посвяшают эту статью профессору Ле В- Тхиему, по слулаю его $70^{ого}$ дня рождения.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Будем называть « эволюционной системой естественных уравнений » на римановом многообразни M систему вида :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = AW \qquad (L)$$

где A — естественный дифференциальный оператор на M (в смысле 6а).

Цель настояшей работы — изучение структуры множества всех периодических решений (п.р) уравнения (L) для простейшего оператора $A = i(d + \delta)$. Тогда уравнение (L) представляет собой как « половина » обобщенного вольного уравнения. Действительно при $M = R^n$ (с обычной эвклидовой метрикой) имеем :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + A\right]$$

где $\Delta = -\Sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_e^i}\right)^2$ — оператор Лапласа.

Вопрос об отыскании п. р. уравнений вида (L) представляет безусловно большой интерес и ещё мало изучен. (Однако, см. [1] , для одномерного квазилинейного вольного уравнения).

Содержание настоящей работы таково : в §1 мы постановим нашу основную задачу о п. р. уравнения (L) и изложим обшую схему для их исследования на обших римановых многообразиях M.

Абстрактный критерий существования п. р. с данным периодом получается лёгким обобшением метода и результатов А. А. Дезина [3].

Для описания всех возможных периодов и соответствующих им п. р., как нам кажется, задача Коши для (L) более пригодится, Требуется, однако, конкретное знание о множестве всех собственных значений оператора A, которое неизвестно и, быть может безнадежно для случая произвольного многообразия M.

Однако, для некоторого конкретного многообразия M, всё это возможно действительно.

Именно это осуществляется в §2 и в §3 для тора T^n. Мы опишем все возможные периоды и соответствующие п. р. уравнения (L) на T^n. Результаты этих параграфов принадлежат первому автору статьи.

Картина намного усложняется и, поэтому, оказывается более интересной, когда мы переходим к случаю S^n. Это было рассматрено первым автором и будет публиковаться в ближайщем будущем. Пользуясь случаем первый автор выражаем свою искренную благодарность Фам Нгок Тхао, под руководством которого была выполнена эта работа.

§I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О П. Р. УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе M будет обозначать C^∞-Риманово многообразие, которое всегда предполагается ориентированным и замкнутым (т. е. компактным, без границы),

$\xi = \bigoplus_{p=0}^{n} \xi^p = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p (T^*(M)) \otimes C$ — комплексифицированное кокасательное расслоение многообразия M; $C^\infty(\xi)$ и $H^k(\xi)$ пространство гладких дифференциальных форм и пространство Соболева дифференциальных форм над M, соотвественно.

Оператор A в уравнении (L) всегда будет $i(d+\sigma)$, где d — внешний дифференциальный оператор, а $\sigma = d^*$ — его формально сопряженный относительно скалярного произведения в $C^\infty(\xi)$, индуцированного римановой структурой M.

Известно (см. [4], [6а]), что $d+\sigma$ — эллиптический дифференциальный оператор $I^{\text{ого}}$порядка на M. Из основных результатов теории эллиптических операторов на замкнутых многообразиях (см. например, [4]) главным для нас будет следующая

ТЕОРЕМА I.I. *В гильбертовом пространстве $H^0(\xi)$, существует ортонормированный базис $\{f\lambda_k;\ k=0, \pm 1 \dots\}$, состоящий из собственных векторов $f\lambda_k$ оператора A, соответствующих собственным значениям λ_k. Причём $\lambda_k = i\mu_k$;* $\mu_k \in R$; $\lambda_{-k} = -\lambda_k$ и $\frac{1}{|\lambda_k|} \to 0$ при $k \to \infty$. Доказательство этой теоремы имеется в [6б].

Подчеркиваем также, что расматриваемый в $H^0(\xi)$ оператор A нормален, а $d+\sigma$ самосопряжен; $AA^* = A^*A = \Delta$ (-оператор Лапласа).

Наша ближающая цель это указать, что для нашего оператора A и, поэтому, для нашего уравнения (L) можно применить схему Дезина [3ь] для определенных им Π-операторов при изучении соответствующей граничной задачи для уравнения (L), в частности при изучении его п.р... Заметим впрочем, что при столь общих метриках оператор A, даже на R^n, является оператором с переменными коэффициентами. А именно рассуждение Дезина [3а], применительное без всяких существенных изменений к нашему оператору A и уравнению (L), позволяет нам сформулировать следующие результаты.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k ; k = 0, \pm 1,...\}$ (множество собственных значений оператора $A^{(+)}$. Для всякой голоморфной функции на $\Lambda : F(z)$, $z \in \Lambda$, впольне опеределенный в $H^0(\xi)$ оператор

$$F = F(A);\ Fu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(\lambda_k) u_{\lambda_k} f\lambda_k, \qquad (1.1)$$

если $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{\lambda_k} f\lambda_k \in H^0(\xi)$. По определению $u \in \mathcal{D}_F$ (область определения оператора A) тогда и только когда, когда ряд (1.I) сходится (в $H^0(\xi)$, конечно)

Как обычно, обозначим соотственно через SL, $бL$, $PбL$ и $CбL$ — резолвент, спектр, точечный спектр и непрерывный спектр оператора (L), для каждого линейного оператора (L) в H^0 (ξ). Тогда имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Спектр $бF$ оператора $F : H^0(\xi) \to H^0(\xi)$ является замыканием в комплексной плоскости множества*

$$PбF = F(\Lambda) = \{F(\lambda_k),\ \lambda_k \in \Lambda\}$$

а его непрерывный спектр является множеством

$$CбF = \overline{PбF} - PбF$$

Рассмотрим теперь, как и в [3б], граничную задачу:

$$Lu = (D_t - A)u = h,\ t \in [0,\ b] \qquad (L)$$

$$\mu\, u|_{t=0} - u|_{t=b} = 0 \qquad (Г)$$

где $\quad h \in H = H^0(\xi) \otimes H_t\ , \quad H_t = H^0([0,\ b]),\ D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}.$

Элемент $u \in H$ будем принимать за решением задачи (L)—$(Г)$ тогда и только тогда, когда существуют такие последовательности $\{h_j\}$ и $\{u_j\}$ $(j = 1,2,...) \subset C^\infty(\xi)\otimes C^\infty([0, b])$, что $\lim u_j = u$ в H ; где u_j является решением задачи

$$Lu_j = h_j$$

$$|\mu u_j|_{t=0} - u_j|_{t=b} = 0,\ \forall\ j,$$

причём $\quad \lim h_j = h$ в H.

(+) В настоящей работе везде мы условимся, что каждое собственное значение повторяется столько раз, сколько его кратность. Так что, каждому k отвечает один и только один собственный вектор

Таким образом, определяется задаче $(\dot{L}) - (\Gamma)$, соответствующий оператор в $\dot{H}$, который ради простоты мы снова обозначим через (L) положив e^{bA}, из предложения I. 2 вытекаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 3. *Точка* 0 $(\in C)$ *принадлежит множествам* SL *или* P б L *тогда и только тогда, когда* μ *принадлежит* ST *или* PбT *соответственно.*

Доказательства предложений 1.2 и 1.3 повторяют доказательства соответствующих результатов в [3б], глав. V, §I и мы здесь их опускаем.

Переходим теперь к нашей задаче о п. р. уравнения (L). Она представляет собой, конечно, частный случай задачи $(L)-(\Gamma)$ когда $\mu = 1$.

Очевидно, что Ker $A \neq \{0\}$ и если $f_0 \in$ Ker A $(\subset H^0(\zeta))$ то f_0 является решением задачи:

$$Lu = 0 \qquad (\mathrm{L})$$

$$u|_{t=0} = u|_{t=b}, \quad (\pi)$$

которое не зависит от t.

Итак $0 \in P\partial L$. Из предложения 1.3 вытекаем, что $1 \in P\partial T = e^{bA}$. Это первоначальная информация о существовании п. р. Наша задача состоит, однако, в описании множества всех п. р. уравнения (L). Она переходит таким образом к следующей задаче: (a) при каких b существует нетривиальное (т. е. действительно зависящее от t) п. р. уравнения (L) с периодом b ? (б) каковы они, «сколько» их и т. д.

В следующем мы дадим некоторые сведения об этих решениях в случае произвольного многообразия M.

ТЕОРЕМА 1. 4. *Нетривиальное п. р. уравнения* (L) *существует тогда и только тогда, когда* b *имеет вид:*

$$b = 2l\pi / |\lambda_k|, \quad 0 \neq \lambda_k \in \Lambda, \; l \in N$$

для некоторого $k \in Z$

Доказательство. Из $b = \dfrac{2l\pi}{|\lambda_k|}$ следует, что $e^{\lambda_k t} f_{\lambda_k}$ является требуемым решением. Остаётся только доказать обратное утверждение теоремы. Итак, пусть $u \in H$— нетривиальное п. р. с периодом b уравнения (L). Тогда, в силу $(L) - (\pi)$ и единственности раздожения Фурье, u может быть единственным образом представлен в виде:

$$u = \sum_{k \in Z} u_{\lambda_k}(t) f_{\lambda_k} \tag{1. 2}$$

где $u_{\lambda_k}(t)$ — решения задачи:

$$(D_t - \lambda_k) u_{\lambda_k}(t) = 0 \qquad (L_k)$$

$$u_{\lambda_k}(0) - u_{\lambda_k}(b) = 0 \qquad (\pi_k)$$

$k = 0, \pm 1, \dots$

Отсюда следует, что $u_{\lambda_k} = C_k e^{\lambda_k t}$, где $C_k = \text{const}$, и $C_k\,(1 - e^{\lambda_k b}) = 0$. Поэтому

если $C_k \neq 0$, то $e^{\lambda_k b} = 1$, или $b = \dfrac{2 l_k \pi}{|\lambda_k|}$ $\quad \forall\, k : \lambda_k \neq 0,\ l_k \in N$.

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Опишем теперь общий вид п. р. с данным периодом b. Для этого рассмотрим задачу Коши для (L):

$$(D_t - A)\, u = 0\ ,\ t \in (0, \infty) \qquad (L)$$

$$u\,|_{t=0} = \varphi\ , \qquad (C)$$

где $\varphi \in H^0(\xi)$, $u \in H$

Решения задачм $(L) - (C)$ понимаются аналогично решениям задачи $(L) - (\Gamma)$. Разложив u, φ в ряд Фурье по $\{f_{\lambda_k},\ k \in Z\}$

$$u = \sum_{k \in Z} u_{\lambda_k}(t)\, f_{\lambda_k}\ ;\ \varphi = \sum_{k \in Z} \varphi_{\lambda_k} f_{\lambda_k}$$

непосредственно увидим, что u_{λ_k} является решением задачи :

$$(D_t - \lambda_k)\, u_{\lambda_k} = 0 \qquad (L_k)$$

$$u_{\lambda_k}(0) = \varphi_{\lambda_k} \qquad (C_k)$$

т. е. $\qquad u_{\lambda_k}(t) = \varphi_{\lambda_k} e^{\lambda_k t}$

Из определения решений задачи $(L) - (C)$ сразу вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 5. *Задача $(L) - (C)$ разрешима тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет условию:*

$$\sum_{k \in Z} |\lambda_k|^2\, |\varphi_{\lambda_k}|^2 < \infty$$

Решение задачи единственно.

ТЕОРЕМА 1.6. *Пусть в задаче $(L)-(C)$, $\varphi \in H^0(\xi)$ удовлетворяет условию предложения 1.5. Тогда решение $u \in H$ периодично с периодом $b\ (> 0)$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие : (P) b является наименьшим общим целым кратным множества $\left\{ \dfrac{2i\pi}{\lambda_k} ;\ \Lambda \ni \lambda_k \neq 0,\ \varphi_{\lambda_k} \neq 0 \right\}$ (т.е. b является наименьшим целым кратным каждому из этих $\dfrac{2i\pi}{\lambda_k}$).*

Доказательство. Из равенства $u|_{t=b} = \varphi$ вытекает $e^{\lambda_k b} = 1$, $\forall \lambda_k : \varphi_{\lambda_k} \neq 0$.
Таким образом:

$$b = \frac{2 l_k \pi}{|\lambda_k|}, \; l_k \in N, \; \forall \lambda_k : \lambda_k \neq 0, \; \varphi \lambda_k \neq 0,$$

т.е. b является целым кратным каждому из этих $2i\pi/\lambda_k$. Из определения периода b должно быть наименьшим кратным.

Обратное проверяется непосредственно. Теорема доказана. Итак для описания множества п.р. уравнения (L) необходимо (и достаточно!) узнать множество Λ, т.е. спектр оператора A. Это, конечно, неизвестно и трудно в общем случае многообразия M. В дальнейшем мы сделаем это для двух частного случая, когда M – тор и сфера в R^n. Оказывается, что картина распределения множества п.р. уравнения (L) в этих случаях допускает полное описание и довольно интересна

§ 2. П.Р. (L) НА ТОРЕ

Пусть теперь $M = T^n = R^n/(2Z)^n$ – n -мерный тор, со стандартной римановой структурой. Прежде всего найдем собственные векторы и значения оператора A на T^n. Обозначим через E оператор $d + \delta = \frac{1}{i} A$.

Рассмотрим сначала случай $n = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Будем обозначать через x – координату на T^1. Тогда дифференциальные формы $W_k = e^{\pm ik\pi x}(1 \pm i\, dx)$ являются собственными векторами оператора E на T^1, соответствующими собственным значениям $\mu_k = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Боле того, при $\mu_0 = 0$ имеем $W_0 = C_1 + C_2\, dx$, где C_1, C_2 – константы.*

Доказательство. Собственные векторы оператора E на T^1 можно написать в виде:

$$W(x) = f_0(x) + f_1(x)\, dx$$

где f_i $(i = 0{,}1)$ – периодические C^∞ функции на R, с периодом 2. Если μ – соответствующее W собственное значение, то равенство $EW = \mu W$ принимает вид:

$$\mu(f_0 + f_1\, dx) = -\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial x} dx \tag{2.1}$$

Пусть $f_0(x) = \sum_{m\in Z} a_m e^{i\pi mx}$; $f_1(x) = \sum_{m\in Z} b_m e^{i\pi mx}$

разложения Фурье функций f_i $(i = 0, 1)$. Тогда из (2.1) следует

$$\mu b_m = i\pi m a_m$$

$$\mu a_m = -i\pi m b_m, \ \forall m \in Z$$

Отсюда при условии $W \neq 0$ вытекает, что $\mu = \mu_{\pm k} = \pm k\pi$, $k \in Z$ являются собственными значениями оператора E. Соответствующие собственные формы являются $W_{\mu_{\pm k}} = e^{ik\pi}(1 \pm idx)$. Заменяя $k = -(-k)$ мы получим еще другие собственные формы $W_{\mu_{\pm k}} = e^{-ik\pi x}(1 \mp idx)$. Отсюда вытекает утверждение теоремы при $k \neq 0$. Для случая $\mu_0 = 0$ утверждение очевидно. Предложение доказано.

Теперь, для каждой формы $W = \overset{0}{W} + \overset{1}{W}$ на T^1 положим :

$$\widetilde{W} = \overset{0}{W} - \overset{1}{W}$$

($\overset{i}{W}$ — однородная форма степени « i », $i = 0, 1$)

Рассмотрим любые две формы W_1, W_2 на T^1. Отождествляя $T^2 \equiv T^1 \times T^1$ и рассматривая $W_1 \otimes W_2$ как форма на T^2, мы имеем следующую лемму.

ЛЕММА 2.2. *Для любых двух гладких форм W_1, W_2 на T^1, на T^2 имеет место равенство*

$$E(W_1 \otimes W_2) = E W_1 \otimes W_2 + \widetilde{W}_1 \otimes E W_2$$

Доказательство. Пусть $W_1 = \overset{0}{W}_1 + \overset{1}{W}_1$. Тогда

$$d(W_1 \otimes W_2) = d(\overset{0}{W}_1 \otimes W_2) + d(\overset{1}{W}_1 \otimes W_2)$$

$$= d\overset{0}{W}_1 \otimes W_2 + \overset{0}{W}_1 d W_2 + d\overset{1}{W}_1 \otimes W_2 - \overset{1}{W}_1 \otimes dW_2$$

$$= d(\overset{0}{W}_1 + \overset{1}{W}_1) \otimes W_2 + (\overset{0}{W} - \overset{1}{W}_1) \otimes dW_2$$

$$= dW_1 \otimes W_2 + \widetilde{W}_1 \otimes dW_2$$

$$\delta(W_1 \otimes W_2) = \delta(\overset{0}{W}_1 \otimes W_2) + \delta(\overset{1}{W}_1 \otimes W_2)$$

$$= \delta\overset{0}{W} \otimes W_2 + \overset{0}{W}_1 \otimes \delta W_2 + \delta\overset{1}{W}_1 \otimes W_2 - \overset{1}{W}_1 \otimes \delta W_2$$

$$= \delta(\overset{0}{W}_1 + \overset{1}{W}_1) \otimes W_2 + (\overset{0}{W}_1 - \overset{1}{W}_1) \otimes \delta W_2$$

$$= \delta W_1 \otimes W_2 + \widetilde{W}_1 \otimes \delta W_2,$$

Отсюда $\quad E(W_1 \otimes W_2) = EW_1 \otimes W_2 + \widetilde{W}_1 \otimes EW_2$, что и требует доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть W_k, W_l — собственные формы (см. предложение 2.1) на T^1. Тогда если $l^2 + k^2 \neq 0$, то*

$$W_k \otimes W_l + \frac{k + \sqrt{k^2+l^2}}{l} \widetilde{W}_k \otimes W_l$$

и

$$W_k \otimes W_l + \frac{-k - \sqrt{k^2+l^2}}{l} \widetilde{W}_k \otimes W_l$$

являются собственнымн формами оператора E на T^2, соответствующими собственным значениям $\mu = \pm\ \pi \sqrt{k^2+l^2}$ и $-\pi \sqrt{k^2+l^2}$ соответственно (предлагается для определенности что $l \neq 0$).

Собственные формы, соответствующие собственному значенню $\mu = 0$ для T^2 имеют вид $(C_{10} + C_{11} dx_1) \wedge (C_{20} + C_{21} dx_2)$, где C_{ij} *— константы.*

Доказательство. Пусть α, β — любые константы, отличные от 0. Применяя предложение 2.1 и лемму 2.2, имеем:

$$\alpha E(W_k \otimes W_l) = \alpha k\pi W_k \otimes W_l + \alpha l\pi \widetilde{W}_k \otimes W_l$$

$$\beta E(\widetilde{W}_k \otimes W_l) = -\beta k\pi \widetilde{W}_k \otimes W_l + \beta l\pi W_k \otimes W_l$$

отсюда

$$E(\alpha W_k \otimes W_l + \beta \widetilde{W}_k \otimes W_l) = \frac{\alpha k\pi + \beta k\pi}{\alpha} \alpha W_k \otimes W_l + \frac{\alpha l\pi - \beta k\pi}{\beta} \beta \widetilde{W}_k \otimes W_l \quad (2.2)$$

Пусть теперь α, β таковы что

$$\frac{\alpha k + \beta l}{\alpha} = \frac{\alpha l - \beta k}{\beta} \neq 0 \qquad \text{и} \qquad x = \frac{\alpha}{\beta}\ (\neq 0)$$

Тогда имеем:

$\dfrac{\alpha}{\beta} = x_\pm = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2+l^2}}{l}$ ($l \neq 0$, по предположению) При $\dfrac{\alpha}{\beta} = x_+$, из (2.2) следует, что $\mu = \mu_{kl} = \pi\sqrt{k^2+l^2}$ является собственным значением. Соответствующей собственной формой является

$$f\mu_{kl} = W_k \otimes W_l + \frac{-k+\sqrt{k^2+l^2}}{l}\widetilde{W}_k \otimes W_l$$

А при $\frac{\alpha}{\beta} = x_-$, $\mu = -\mu_{kl}$

$$f-\mu_{kl} = W_k \otimes W_l + \frac{-k-\sqrt{k^2+l^2}}{l}\widetilde{W}_k \otimes W_l$$

Случай $l = k = 0$ очевиден. Предложение доказано.

Наконец по индукцией получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.4. *Множеством собственных значений оператора A на T^n является:*

$$\left\{\pm i\pi\sqrt{k_1^2+\ldots+k_n^2};\ (k_1,\ldots,k_n)\in \mathbf{Z}^n\right\}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы при $n = 1, 2$ вытекает из предложений 2.1, 2.3. Пусть утверждение теоремы справедливо при $n-1$. W_{n-1} и W_1 —собственные формы операторов E на T^{n-1} и T^n, соответствующие собственным значениям $\varepsilon\pi\sqrt{k_1^2+\ldots+k_n^2}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ и $k_n\pi$, соответственно. Утверждение типа леммы 2.2, справедливое и для $T^n = T^1 \times T^{n-1}$ показывает, что на T^n формы

$$W_1 \otimes W_{n-1} + \frac{-k_n+\sqrt{k_1^2+\ldots+k_n^2}}{\varepsilon\sqrt{k_1^2+\ldots+k_{n-2}^2}}\widetilde{W}_1 \otimes W_{n-1}$$

$$W_1 \otimes W_{n-1} + \frac{-k_n-\sqrt{k_1^2+\ldots+k_n^2}}{\varepsilon\sqrt{k_1^2+\ldots+k_{n-1}^2}}\widetilde{W}_1 \otimes W_{n-1}$$

при $k_1^2+\ldots+k_{n-1}^2 \neq 0$, и $W_1 \otimes W_{n-1}$ при $k_1^2+\ldots+k_{n-1}^2 = 0$ являются собственными формами оператора E, соответствующими собственным значениям $\pm\pi\sqrt{k_1^2+\ldots+k_n^2}$ (при $k_1^2+\ldots+k_{n-1}^2 \neq 0$) и πk_n (при $k_1^2+\ldots+k_{n-1}^2 = 0$) соответственно. Теорема доказана.

Заметим также, что собственные формы, соответствующие собственному значению $\eta_n \pi \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2}$, определяются формулой:

$$e^{i\pi \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu k_\nu x_\nu} (1 + i\varepsilon_1 dx_1) \wedge \Bigg[(1 + i\varepsilon_2 dx_2) + \\ + \frac{-k_2 + \eta_2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\eta_1 k_1} (1 - i\varepsilon_2 dx_2) \Bigg] \wedge \dots \\ \dots \wedge \Bigg[1 + i\varepsilon_\nu dx_\nu + \frac{-k_\nu + \eta_2 \sqrt{k_1^2 + \dots + k_\nu^2}}{\eta_{\nu-1} \sqrt{k_1^2 + \dots + k_{\nu-1}^2}} (1 - i\varepsilon_\nu dx_\nu) \Bigg] \wedge \dots \\ \dots \Bigg[(1 + i\varepsilon_n dx_n + \frac{-k_n - \eta_n \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2}}{\eta_{n-1} \sqrt{k_1^2 + \dots + k_{n-1}^2}} (1 - i\varepsilon_n dx_n) \Bigg]$$

если $k_1 \neq 0$ и

$$(C_{10} + C_{11} dx_1) \wedge \dots \wedge (C_{n0} + C_{n1} dx_1, \quad \text{если} \quad \sum_i k_i^2 = 0.$$

Здесь ε_ν, $\eta_\nu = \pm 1$ и C_{ij} —константы для любых i, j. Благодаря этой теореме и результатам §I, мы сможем теперь ответить на основные вопросы настоящей работы для случая тора T^n

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 *На T^n нетривиальное п. р. периода b уравнения (L) существует тогда и только тогда, когда b имеет вид*

$$b = \frac{2l}{\sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2}} \quad \text{при} \quad k_l^2 + \dots + k_n^2 \neq 0, (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, l \in N$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 6. *Пусть форма* $\varphi = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda f_\lambda \in H^0(\xi)$ *такова, что*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\varphi_\lambda|^2 |\lambda|^2 < \infty$$

Тогда решение задачи (L)-(C) на торе T^n периодично с периодом b тогда и только тогда, когда выполняется следущее условие:

(р) *(условие (р) для T^n):* $\forall \lambda = \pm i\pi \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2} \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$, *для которого* $\varphi_\lambda \neq 0$, *b является целым кратным*

$$2/\sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2}$$

Предыдущие предложения 2. 5 и 2. 7 являются просто частными случаями теорем 1. 4 и 1.6, с помощью которых мы будем описывать в следующем параграфе множество п. р. на T^n.

§3. МНОЖЕСТВО П.Р НА T^n

Теперь, чтобы описать распределение множества п,р. (L), для каждого $d \in N$ такого, что простые множители которого появляются в его разложении со степенью не больше 1, введём множество $B(d) = \{\lambda \in \Lambda;\ \lambda = \pm\, i\, \pi \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_n^2} = i\pi m_\lambda \sqrt{d};$ $m_\lambda \in \mathbf{Z}\}$, т.е множество всех $\lambda \in \Lambda$ целых кратных $i\pi\sqrt{d}$,

Как мы увидим в дальнейшем, множество п. р. уравнения (L) будут описыватся именно этими множествами $B(d)$.

Рассмотрим сперва каждое множество $B(d)$. Оно совпадает со множеством целых решений Диофантова уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \mathrm{d}y^2 \tag{3.1}$$

Результаты об этом уравнении дают следующее основное для нас предложение;

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3, 1, *(а) При* $n = 1$, $B(d) = \{0\}$ *если* $d \neq 1$ *и* $B(1) = \Lambda$

(б) При $n = 2$, $(Bd) = \{0\}$ *если* d *содержает простой множитель вида* $4k+3$ *и* $B(d)$ *равняется*

$$\{\, i\pi m \sqrt{d}\,;\ m \in \mathbf{Z}\,\}$$

для противного случая

(в) При $n = 3$, $B(d) = \{0\}$ *если* d *имеет вид* $8\beta - 1$, $\beta \in \mathbf{Z}$, *и* $B(d)$ *равняется*

$$\{\, i\pi m \sqrt{d},\ m \in \mathbf{Z}\,\}$$

если наоборот.

(г) *При* $n \geqslant 4$, $B(d) = \{\, i\pi m \sqrt{d}\,;\ m \in Z\,\}$
для всех выбранных выше d).

Для доказательства этого предложения, нам требуются следующие леммы (см. [5], [2]).

ЛЕММА 3.2. (а) (*Теорема Гаусса*). *Для того, чтобы целое положительное число* η *было суммой трех квадратов целых чисел необходимо и достаточно, чтобы оно было числом вида* $4^\alpha(8\beta - 1)$ *где* $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$.

(б) (*Лагранж*) *каждое целое положительное число представляет собой сумму четырех квадратов* (в) *уравнение $x^2+y^2=\eta$, $\eta\in N$, имеет целое решение (x, y), $(x, y)=1$ тогда и только тогда, когда разложение n не содержит простых множителей p вида $4k+3$ и $m\not\equiv 0 \pmod 4$.*

Доказательство предложения 3.1.

(а) Очевидно

(в) $n=3$. Пусть $d=2d'$ и d' нечётно. Согласно выбору d, имеем $d\neq 4^\alpha(8\beta-1)$. Поэтому уравнение

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=d$$

разрешимо. Если (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — одно из его решений, то $(x_1\ x_2, x_3, y)=(\xi_1 m, \xi_2 m, \xi_3 m, m)$, $\forall m\in Z$ является решением уравнения

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=dy^2.$$

Пусть теперь d нечётно и $d\neq 8\beta-1$, $\beta\in Z$. Тогда $d\neq 4^\alpha(8\beta-1)$ (по выбору). Поэтому уравнение

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=d$$

разрешимо. Пусть (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — одно из его решений. Тогда $(\xi_1 m, \xi_2 m, \xi_3 m, m)$, $\forall m\in Z$ будет решением уравнения

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=d$$

Наконец, если $d=8\beta-1$, $\beta\in Z$, то $\tilde{m}d$ имеет вид $4^\alpha(8\beta-4)$, $\alpha, \beta\in Z$. Действительно, представляя m в виде $m=2^\alpha(2k+1)$ легко проверяется, что $\tilde{m}d=4^\alpha(8\beta-1)$, $\beta\in Z$. Поэтому уравнение $x_1^2+x_2^2+x_3^2=dy^2$ имеет единственное решение $(0,0,0,0)$. Из этих утверждений непосредственно вытекает (в).

(б) $n=2$. Пусть d не содержит простого множителя вида $4k+3$. Тогда существует решение (ξ_1, ξ_2) уравнения $x_1^2+x_2^2=d$ такое, что $(\xi_1, \xi_2)=1$. Из этого следует, что $(\xi_1 m, \xi_2 m, m)$ является решением уравнения

$$x_1^2+x_2^2=dy^2,\ \forall\ m\in Z.$$

Наоборот, докажем, что если это уравнение обладает нетривиальным решением, то d не содержит простого множителя вида $4k+3$. Действительно, если $(x_1, x_2)=1$ и $x_1^2+x_2^2=dy^2$, то dy^2 также как и d не содержит простого множителя вида $4k+3$, Если же $(x_1, x_2)=m\neq 1$, то $x_1=mt_1$, $x_2=mt_2$, $(t_1, t_2)=1$ для некоторого $m\in Z$, $t_1^2+t_2^2$ не содержит простого множителя вида $4k+3$ и, имеет место равенство

$$(t_1^2+t_2^2)\,m^2=dy^2.$$

Тогда, если y содержит простой множитель p вида $4k+3$ то из (3.2) следует, что m^2 содержит p^2. Таким образом мы сможем сократить некоторую кратную степень p, чтобы получить равенство, в котором уже нет множителя p. Итак можно предположить, что в (3.2) нет множителя вида $4k+3$ в разложении y. Тогда если d содержит множитель p вида $4k+3$, то обязательно m^2 содержит его квадратное. Сокращая p несколько раз, по необходимости, приходим к противоречию. Это показывает что d не может содержать такого множителя. Отсюда вытекает (б).

(г) $n \geqslant 4$. Для всякого выбранного d, всегда можно найти целое решение $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ уравнения $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = dy^2$. Как всегда, отсюда вытекает, что $(x_1, \dots, x_n, y) = (\xi_1 m, \dots, \xi_n m, m)$ суть решение уравнения $x_1^2 + \dots + x_n^2 = dy^2$, $\forall m \in \mathbf{Z}$. Доказательство предложения 3.1 закончено.

Из этого предложения следует, что множество $B(d)$, если оно не равно $\{0\}$, всегда имеет вид

$$B(d) = \{\, i\pi k\sqrt{d}\ ;\ k \in \mathbf{Z}\,\}.$$

Более того, как легко доказать, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 3. (*а*) $\bigcup\limits_{d} B(d) = \Lambda$

(б) Если $d_1 \neq d_2$ *то* $B(d_1) \cap B(d_2) = \{0\}$. *Наоборот если существует* $\lambda \neq 0$ *такое, что* $\lambda \in B(d_1) \cap B(d_2)$ *то* $B(d_1) = B(d_2)$. *Иначе говоря, если исключить* 0, *то числа* d *разделяют множества* $\{B(d)\}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 4. *Пусть* $\varphi = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda f_\lambda \in H^0(\xi)$ *такова, что* $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} |\varphi_\lambda|^2 |\lambda|^2 < \infty$.

Тогда решение задачи Коши (L)-(C) периодично тогда и только тогда, когда существует d такое, что выпольняется условие (условие(ρ) в данном случае);

(ρ) Если $\varphi_\lambda \neq 0$, *то* $\lambda \in B(d)$

При этом условии, его период b будет наименьщим целым кратным числам:

$$\left\{ \frac{2i\pi}{\lambda} = \frac{2}{m_\lambda \sqrt{d}}\ ;\ \lambda = i\pi m_\lambda \sqrt{d} \in B(d) - \{0\} \right\}.$$

В итоге, следующая теорема даёт полное описание множества п. р. уравнения (L) и их периодов.

ТЕОРЕМА 3. 5. (а) *На* T^1 *всякое нетривиальное п. р. уравнения* (L) *имеет вид:*

$$u = \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} \varphi_{i\nu m} e^{i\nu m t} f_{i\nu m}\ ,\ m \in N,\ \varphi_{i\nu m} = \text{const}$$

это п. р. периода $\dfrac{2}{m}$

(б) *На T^n, $n \geqslant 2$, всякое нетривиальное п.р. уравнения имеет вид:*

$$u = \sum_{\lambda \in B(d)} \varphi_\lambda e^{\lambda t} f_\lambda : \varphi_\lambda = \text{const}, \ \forall \lambda$$

это п. р. общего периода $\frac{2}{\sqrt{a}}$ *(т. е. его период, собственно говоря, может быть* $2/m\sqrt{d}$, $m \in N$).

Пространство всех п.р. уравнения (L) разделяется множеством $\{B(d)\}$ (и, поэтому множеством $\{d\}$), где $d \in N$ удовлетворяет следующим условиям:

(d) d не содержит никакого простого множителя со степенью > 1

(dd) При $n = 2$, d не содержит простого множителя вида $4k + 3$ а при $n = 3$, $d \neq 8\nu - 1$, $\nu \in N$.

Это значит, что во-первых, каждое множество $B(d)$ определяет единственным образом подпространство п. р. общего периода $2/\sqrt{a}$. Эти подпространства имеют только тривиальные (т. е. независящее от « t » п. р. в качестве обших точек и, во вторых, кроме этих нет других п. р.

Примеры. (а) На T^2 и T^3 нет нетривиального п. р. общего периода $\frac{2}{\sqrt{7}}$ поэтому, что 7 имеет вид $4k + 3$ и одновременно

(в) Наоборот на T^n, $n \geqslant 4$ оно всегда существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brezis N. *Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principles*, Bull. Amer. Math. Sci. (NS) 8 (1983), 409 — 426.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел «Просвещение», М. 1966.
3. Дёзин А.А. (а) *К теории операторов вида* $\frac{d}{dt} - A$, ДАН СССР 164, №5 (1965), 963-966.

   (б) Общие вопросы теории граничных задач «Наука» М. 1980.
4. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе «Мир» М. 1970.
5. Серр Ж. П. Курс арифметики. Мир. М. 1972.
6. Фам Нгок Тхао. (а) *Естественные дифференциальные операторы на компактных много образиях* Дифференц. Уравн. 5 (1969), 186 — 198.

   (б) «*Boundary value problems for natural differential operators on Riemannian manifolds*», Inst. of Math., Polish Acad. of Sci. Preprint N. 240, May 1981.

Поступила в редакцию 26 сентября 1987г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ХАНОЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ.