ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Vol. 13 No. 1 (1988)

LES ESPACES ULTRANONEUCLIDIENS

NGUYỆN CANH TOAN et NGUYEN ĐANG PHAT

1. INTRODUCTION

1. 1. *Abreviations et notations.*

1. 1. 1. *Abreviations.* Le préfixe hyper dans hyperplan, hyperquadrique, hypersphere etc... sera supprimé. Quand il s'agira des variétés de dimension inférieure à $n-1$ (dans un espace à n dimensions), on precisera la dimension: un p-plan, une m-quadrique etc...

Les adjectifs euclidien, noneuclidien et ultranoneuclidien seront ecrits en abrégé respectivement E, NE et UNE.

1. 1. 2. *Notations.*

P_n designera l'espace projectif réel à n dimensions

P_n designera l'espace projectif complexe à n dimensions

$P_n^{(i)}$ designera l'espace projectif réel à n dimensions complété par les éléments imaginaires.

A moins d'indications contraires qui s'éclaïrciront dans le contexte, les lettres latines majuscules A, B, C... designeront les matrices carrées d'ordre $n+1$ dont les éléments sont des nombres réels (quand il y a des éléments complexes, on précisera dans le contexte).

La matrice transposée d'une matrice A sera designée par A^T.

La matrice nulle (dont tous les éléments sont nuls) sera désignée par la lettre majuscule 0 et la matrice — unité par la lettre majuscule I. On designera par I_m la matrice obtenue de la matrice I en enlevant les m premières ligne de I pour les placer d'emblée sous la dernière ligne. La matrice I_m^{-1} sera designée par I_{-m}.

Les lettres latines minuscules a, b, c, x, y,... designeront les points de $P_n^{(i)}$; les coordonnées projectives d'un point a seront $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Quand on veut désigner plusieurs points par une même lettre avec des indices, ces indices seront placés en haut et à droite de la lettre: a^1, a^2, ...

Les lettres latines minuscules désigneront aussi les matrices-lignes et les matrices-colonnes des coordonnées projectives des points designés par ces mêmes lettres. Par exemple a peut designer soit la matrice-ligne, soit la matrice — colonne des coordonnées $a_0, a_1, \ldots, a_n$ du point a.

L'interprétation (ligne ou colonne) qu'il faut adopter s'éclaircira suivant le contexte. Le produit aa (ou bb, xx, etc.) où la lettre à droite designe une matrice — ligne et celle à gauche une matrice — colonne sera designé par A (ou B, X, etc...).

1.2. Concept d'espace UNE

1.2.1. En 1963, Nguyen Canh Toan ([1] et [2]) a introduit un espace qui peut être construit projectivement au moyen de la métrique Cayley-Klein, tout comme un espace NE, avec la différence qu'ici l'absolu est mobile : à chaque point de P_n est associée une quadrique, fonction de ce point, appelée absolu local en ce point.

1.2.2. Cet espace a été ensuite étudié plus minutieusement par Nguyen Canh Toan dans [3] et [4]. Partant de ce cas particulier, en 1969, il a essayé d'élaborer une théorie [5] qui constitue une direction nouvelle dans la généralistaion des espaces NE et que nous appellerons dans le présent article, théorie des espaces UNE.

1.2.3. En 1970, dans [9], Nguyen Dang Phat a remarqué que la structure générale des équations des absolus locaux indiquée par Nguyen Canh Toan dans [5] n'épuise pas tous les cas possibles et a trouvé une structure plus générale qui a été ensuite améliorée par Nguyen Canh Toan dans [8].

Dans [7] Nguyen Canh Toan a introduit et étudié les espaces qui seront appelés dans cet article espaces UNE reguliers dont les absolus locaux sont des sphères d'un espace E ou NE. Nguyen Dang Phat a ensuite entamé la question des espaces UNE réguliers plongés dans un espace UNE donné. Il a aussi cherché à généraliser quelques autres cas particuliers des espaces UNE trouvés par Nguyen Canh Toan dans [3].

Le présent article est une synthèse condensée des principaux résultats dans les travaux cités ([1] – [11]).

2. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

2.1. Construction de l'espace.

2.1.1. Dans $P_n^{(i)}$, rapporté à un certain système de coordonnées projectives, associons à chaque point a une quadrique :

$$x\, Q(a)\, x = 0 \tag{1}$$

où la matrice $Q(a)$ est une fonction du point a, ayant la forme suivante :

$$Q(a) = (a\ P\ a)\ P + \sum_{i=1}^{m} U_i\, A U_i \tag{2}$$

où P est une matrice carrée symétrique donnée, d'ordre $n + 1$, différente de la matrice nulle, indépendante du point a et les U_i $(i = 1, \ldots, m)$ sont m matrices carrées antisymétriques données, d'ordre $n+1$, aussi indépendantes du point a (m est un nombre entier positif arbitraire), les éléments des matrices P et U_i étant tous des nombres réels, chacune de ces matrices pouvant être dotée, si c'est nécessaire, du coefficient $i(i^2=-1)$.

On peut remarquer tout de suite que $Q(a)=Q^T(a)$ $(P=P^T, A=A^T, U_i=-U_i^T)$ et on démontre aisément que la forme de $Q(a)$ ne change pas quand on passe à un autre système de coordonnées projectives.

2.1.2. Soientt a et b deux points (pris dans cet ordre) quelconques de $P_n^{(i)}$. Donnons-nous les matrices P et U_i. Alors au couple (a, b) on peut associer le nombre $d(a, b)$ défini par l'égalité:

$$d(a, b)=\frac{1}{2i}\ln(abuv) \tag{3}$$

où u, v sont les points où la droite projective ab coupe la quadrique $xQ(a)x=0$, $Q(a)$ étant donnée par (2) $(i^2=-1)$. Comme $\ln(abuv)$ n'est défini qu'à $2iK\pi$ près, la détermination de $d(a, b)$ ne sera univoque qu'avec des conventions convenables (voir par exemple [14]).

Parce que $d(a, b)$ s'exprime au moyen du rapport anharmonique $(abuv)$, il ne change pas quand on passe à un nouveau système de coordonnées projectives.

2.1.3. Un calcul facile nous donne:

$$\cos^2 d(a, b)=\frac{[aQ(a)b]^2}{[aQ(a)a]\,[bQ(a)b]}. \tag{4}$$

D'après (2), et, en tenant compte de ce que $aU_ia=0$ $(\forall a)$ (parce que $U_i^T=-U_i$), nous obtenons:

$$\cos^2 d(a,b)=\frac{(aPa)^2\,(aPb)^2}{(aPa)^2\left[(bPb)(aPa-\sum_{i=1}^{m}(aU_ib)^2\right]} \tag{5};$$

si $aPa\neq 0$, alors on aura:

$$\cos^2 d(a,b)=\frac{(aPb)^2}{(aPa)\,(bPb)-\sum_{i=1}^{m}(aU_ib)^2} \tag{6};$$

si aPa tend vers zéro, le deuxième membre de (5) tend vers une limite qui est le second membre de (6); nous pouvons donc adopter (6) pour tous les cas ($aPa\neq 0$ et $aPa=0$).

Parce que $aPb=bPa$ $(P=P^T)$, $aU_ib=bU_ia\,(U_i^T=-U_i)$, nous avons, d'après (6)

$$\cos^2 d(a, b)=\cos^2 d(b, a) \tag{7}$$

En prenant la valeur absolue $|d(a, b)|$ de $d(a, b)$, nous voyons qu'à chaque couple de points (a, b) de $P_n^{(i)}$, on peut faire correspondre un nombre $|d(a, b)|$ qui ne dépend pas du système de coordonnées projectives choisi et qui ne dépend pas aussi de l'ordre des points a et b.

2.1.4. Définition. L'espace projectif $P_n^{(i)}$ où l'on a donné les matrices P et U_i pour déterminer la famille de quadriques (1), où $Q(a)$ est exprimée par (2), s'appellera un espace *UNE* si $| d(a, b) |$, déterminé par (3), est pris comme distance entre deux points quelconques a, b de $P_n^{(i')}$.

2.1.5. Espaces à absolu mobile. $| d(a, b) |$, déterminé par (3) est justement la distance entre a et b dans l'espace *NE*(*) dont l'absolu est la quadrique (1). Si l'on calcule la distance entre a et b dans l'espace *NE*(*) dont l'absolu est la quadrique $xQ(b)x = 0$, obtenue à partir de la quadrique (1) en remplacant a par b, on arrivera au même résultat en vertu de (7). Un espace qui peut être construit ainsi à partir de $P_n^{(i)}$ au moyen de l'absolu variable (1) s'appellera *un espace à absolu mobile.* Ainsi, tout espace *UNE* est un espace à absolu mobile. Réciproquement tout espace à absolu mobile est-il un espace *UNE ?* Ce problème n'est pas encore résolu.

2.1.6. Définitions. La quadrique (1) s'appelle *absolu local* au point a.

L'espace *NE*(*) dont l'absolu est la quadrique (1) s'appelle *espace local* en a.

2.1.7. Remarque. Les espaces *NE*(*) constituent un cas particulier des espaces *UNE*
En effet, considérons un espace *UNE* où $U_i = 0$ $(\forall i)$.

Alors, d'après (5): $\cos^2 d(a, b) = \dfrac{(aPb)^2}{(aPa)\ (bPb)}$:

C'est bien la métrique dans l'espace *NE* dont l'absolu est la quadrique fixe $xPx = 0$.

2.2. Base, cônes NE et cônes isotropes. Points remarquables d'un espace UNE.

2.2.1. D'après (2) (2.1.1.), $Q(a)$ est, une fois le point a fixé, une combinaison linéaire des matrices P et $\sum_{i=l}^{m} U_i A U_i$. Donc, en chaque point a, l'absolu local appartient au faisceau de quadriques défini par la quadrique fixe $xPx = 0$ et la quadrique $x(\sum_{i=l}^{m} U_i A U_i)\, x = 0$. On démontre facilement que cette deuxième quadrique est un cône du second degré de sommet a.

2.2.2. Définitions. La quadrique fixe $xPx = 0$ s'appelle *base* de l'espace *UNE*. L'espace *NE* admettant la base comme absolu s'appelle *espace-base* de l'espace *UNE*.

(*) Nous considérerons toujours, dans ~~ce qui suit~~, l'espace *NE* étendu à tout l'espace $P_n^{(i)}$ même si l'absolu n'est pas une quadrique-nulle et que le coefficient placé devant le logarithme du rapport anharmonique est toujours $\frac{1}{2i}$.

Le cône $x(\sum_{i=l}^{m} U_i AU_i)x = 0$ s'appelle *cône NE* au point a. S'il existe un point a tel que $\sum_{i=l}^{m} U_i AU_i = 0$, alors ce point s'appellera un *point NE* de l'espace *UNE*. Ces terminologies se justifieront ci-dessous (2.2.3.)

2.2.3. THÉORÈME. *La métrique UNE induite sur chaque génératrice du cône NE en a est justement la métrique NE de l'espace-base.*

Démonstration. En effet, si b est un point du cône NE au point a (c'est à dire que ab est une génératrice du cône), alors $b\,(\sum_{i=l}^{m} U_i AU_i)\,b = 0$ ou $\sum_{i=l}^{m} (aU_i b)^2 = 0$ et la formule (6) (2.1.3.) nous donne:

$$\cos^2 d(a, b) = \frac{(aPb)^2}{(aPa)\ (bPb)},$$

c'est à dire que $d(a, b)$ est justement la distance NE entre les deux points a, b de l'espace-base.

2.2.4. **Remarques.**

1) le cône NE n'est pas iciun cône plongédans un espace NE mais un cône plongé dans un espace UNE et dont chaque génératrice porte une métrique induite qui est NE.

2) Si un point est NE, alors toutes les droites projectives passant par ce point portent une métrique UNE induite qui est NE (la métrique de l'espaces-base).

3) Deux espaces UNE différents construits sur $P_n^{(i)}$ peuvent avoir le même système de cônes NE. On peut facilement demontrer que ceci aura lieu si les deux espaces UNE ont la même base et que cette base apartient toujours au faisceau de quadriques défini en chaque point a par les deux absolus locaux en a.

2.2.5. La formule (6) (2.1.3.) peut s'écrire

$$\cos^2 d(a, b) = \frac{(aPb)^2}{bQ(a)b}$$

ou:
$$\sin^2 d(a, b) = \frac{b\,[Q(a) - PAP]\,b}{bQ(a)b}. \tag{1}$$

D'après (1), une fois donné le point a, le lieu des points b tels que $d(a, b) = 0$ est la quadrique

$$x[Q(a) - PAP]x = 0 \tag{2}$$

C'est un cône du second degré de sommet a.
C'est le lieu des droites projectives passant par a qui sont isotropes au point de vue de la métrique UNE induite.

2.2.6. **Définitions.** Le cône (4) s'appelle *cône isotrope* au point a.

S'il existe un point a tel que $Q(a) - PAP = 0$, alors ce point s'appellera *un point isotrope* de l'espace UNE. Toutes les droites projectives passant par un tel point sont isotropes.

2.2.7. **Définitions.** Un point a qui appartient à l'absolu local en a : $aQ(a)a = 0$, s'appelle un *point singulier* de l'espace UNE.

D'après (2) (2.1.1.), $aQ(a)a = 0$ est épuivalent à $aPa = 0$. Donc le lieu géométrique des points singuliers est la base. On voit de même que a sera singulier si et seulement si l'absolu local en a coïncide avec le cône NE en a.

Un point qui est à la fois NE et singulier s'appelle *un point absolu* de l'espace UNE.

2.2.8. **Propriétés des points remarquables dans un espace UNE.** On voit facilement que :

1. si un point a est NE, alors tous les cônes NE de l'espace passeront par a et l'absolu local en a coïncidera avec la base (et sera indéterminé si a est, en outre, singulier).

2. si un point a est isotrope, alors tous les cônes isotropes de l'espace passeront par a et l'absolu local en a dégénèrera en l'ensemble de deux plans confondus avec le plan polaire de a par rapport à la base.

3. si un point a est absolu, alors l'absolu local en a sera indéterminé et tous les absolus locaux passeront par a.

4. en un même point a, les trois cônes suivants appartiennent à un même faisceau :

— le cône NE

— le cône isotrope de l'espace UNE

— le cône isotrope de l'espace-base.

2.3. Exemples d'espaces UNE avec leurs points remarquables.

2.3.1. **Exemple 1.** Considérons dans le plan E rapporté aux axes de coordonnées cartésiennes Ox, Oy, la circonférence $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Introduisons une nouvelle métrique en convenant que la distance d'un point a à un point b est égale à l'angle E sous lequel on voit le segment ab du point a', inverse de a par rapport à la circonférence $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Nous avons ici un espace UNE où l'absolu local en a dégénére en l'ensemble de deux droites isotropes E passant par a; la base est la cironférence $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et le cône NE en a est l'ensemble des deux droites isotropes E passant par a. En passant aux coordonnées projectives $x_0 : x_1 : x_2 = x : y : 1$, nous avons ici :

$$xQ(a)x = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) - (a_0x_2 - a_2x_0)^2 - (a_1x_2 - a_2x_1)^2 = 0$$

$$\text{Ici,}\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m = 2.$$

Toute droite E passant par le point $(0, 0, 1)$ est isotrope au point de vue de la métrique UNE. Le point $(0, 0, 1)$ est donc un point isotrope. Les points cycliques $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$ du plan E sont les points NE (ils sont aussi des points singuliers et, par conséquent, sont des points absolus) du plan UNE.

Il est intéressant de remarquer, dans cet exemple, que toute droite E ne passant pas par le point $(0, 0, 1)$ est une circonférence UNE ayant une infinité de centres (dont le lieu est l'image de la droite E donnée dans l'inversion définie par la circonférence $x^2 + y^2 + 1 = 0$). Toutes les circonférences E orthoganles à la circonférence $x^2 + y^2 + 1 = 0$ sont des géodésiques UNE.

2.3.2. Exemple 2. C'est l'exemple 1 où la circonférence $x^2 + y^2 + 1 = 0$ est remplacée par la circonférence $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ou par une droite (dans ce cas l'inversion est remplacée par la symétrie par rapport à cette droite).

2.3.3. Exemple 3. Voir le premier exemple d'un espace UNE trouvé dans [3]. Ici, le lieu des points absolus est une courbe rationnelle normale de $P_n^{(i)}$, appellée *courbe absolue.*

2.4. Généralisation de la notion de cône isotrope.

2.4.1. THÉORÈME. *Toute droite projective qui n'est pas génératrice d'un cône NE, est en géneral une circonférence UNE à deux centres qui sont les deux points singuliers situés sur la droite projective donnée ; à ces deux centres correspond le même rayon qui est égal à la distance UNE entre les deux centres.*

Démonstration. Considérons une droite projective coupant la base en deux points singuliers a et b $(aPa = bPb = 0)$. Soit c un point quelconque de la droite ab:

$$c = a + \lambda b.$$

Alors, d'après (6) (2.1.3.), et, en tenant compte de ce que $aPa = bPb = 0$,

$$\cos^2 d(a,c) = \frac{[aP(a+\lambda b)]^2}{(aPa)(a+\lambda b)P(a+\lambda b) - \sum_{i=1}^{m} [aU_i(a+\lambda b)^2]}$$

$$= \frac{\lambda^2 (aPb)^2}{-\lambda^2 \sum_{i=1}^{m} (aU_i b)^2} = \frac{(aPb)^2}{-\sum_{i=1}^{m} (aU_i b)^2}.$$

La distance UNE ac ne dépend donc pas de λ ; il en est de même de la distance bc. Cette distance constante est bien juste, d'après (6) (2.1.3.) la distance UNE R entre les deux points a et b.

$$\cos^2 R = \frac{(aPb)^2}{-\sum_{i=1}^{m} (aU_i b)^2}. \tag{1}$$

Cas particuliers. On voit facilement que :

1) Tous les points d'une droite projective qui coupe la base en un point double sont, au point de vue de la métrique UNE, distants de ce point double d'une distance égale à $\frac{\pi}{2}$.

En particulier, si la base est dégénérée en un ensemble de deux plans confondus alors toute droite projective est une circonférence UNE de rayon $\frac{\pi}{2}$.

2) Deux points quelconqués d'une génératrice de la base sont distants de $\frac{\pi}{2}$.

3) Deux points quelconques d'une génératrice d'un cône NE sont séparés par une distance UNE infinie imaginaire.

4) Deux points quelconques d'une génératrice d'un cône isotrope, sont séparés par un distance UNE nulle.

2.4.2. THÉORÈME. *Le lieu des droites projectives passant par un point donné a, telles que chacune d'elles soit une circonférence UNE de rayon donné R (R fini et $\neq \frac{\pi}{2}$) est un cône du second degré de sommet a.*

Démonstration.. Prenons un point b de l'espace. La droite ab coupe la base en deuxpoints $a + \lambda_1 b$, $a + \lambda_2 b$ où λ_1, λ_2 sont les racines de l'équation:

$$(a + \lambda b)\, P\, (a + \lambda b) = 0. \tag{2}$$

Pour que cette droite soit une circonférence UNE de rayon R, il faut et il suffit que:

$$\cos^2 R = \frac{[(a + \lambda_1 b)\, P\, (a + \lambda_2 b)]^2}{-\sum_{i=1}^{m} [(a + \lambda_1 b)\, U_i\, (a + \lambda_2 b)]^2} = \frac{[(aPa + (\lambda_1 + \lambda_2)\, bPa + \lambda_1 \lambda_2\, bPb]^2}{-\sum_{i=1}^{m} [\lambda_2 - \lambda_1)\, aU_i\, b]^2} \qquad (3);$$

d'après (2), $$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\, \frac{bPa}{bPb}, \ \lambda_1 \lambda_2 = \frac{aPa}{bPb}$$

Donc, (3) s'écrit, tous calculs faits:

$$b \left[PAP - (aPa)P - \cos^2 R \sum_{i=1}^{m} U_i\, AU_i \right] b = 0 \tag{4}$$

Si b varie, la condition nécessaire et suffisante (4) montre que le lieu de b est un cône du second degré de sommet a.

Nous désignerons la matrice « entre crochets » dans (4) par $M_R(a)$.

2.4.3. **Définition.** Le cône (4) s'appelle le cône R-isotrope au point a.

Avec cette définition, le cône NE peut s'appeler le cône ∞-isotrope, le cône isotrope sera le cône O-isotrope, le cône isotrope de l'espace-base sera le cône $\frac{\pi}{2}$-isotrope.

2.4.4. **Définition.** Un point a sera dit R-isotrope si toutes les droites projectives passant par a sont des circonférences UNE de rayon R. Un tel point a vérifie l'équation:

$$PAP - (aPa)P - \cos^2 R \sum_{i=1}^{m} U_i A U_i = 0 \tag{5}$$

$$\text{ou}: PAP - (aPa)P - \cos^2 R Q(a) - [(aPa)P](\sin^2 R - 1) = 0$$

$$\text{ou}: Q(a) = \frac{PAP - \sin^2 R(aPa)P}{\cos^2 R}. \tag{6}$$

L'équation de l'absolu local en un point a R-isotrope est donc:

$$x\,[PAP - \sin^2 R(aPa)P]\,x = 0 \tag{7}$$

$$\text{ou}: \frac{(aPx)^2}{(aPa)\,(xPx)} = \sin^2 R = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - R\right) \tag{8}$$

L'absolu local est donc une sphère NE de centre a (de l'espace-base) et de rayon $\frac{\pi}{2} - R$. Réciproquenent, si l'absolu local en a est une sphère NE (de l'espace-base) de rayon $\frac{\pi}{2} - R$, alors a est un point R-isotrope parce que de (8) on peut remonter jusqu'à (5).

Dans le cas particulier où la base est dégénérée en un ensemble de deux plans confondus, alors, d'après 2.4.1., R doit être égal à $\frac{\pi}{2}$, et alors $\cos R = 0$; en même temps P peut alors être ramenée à la forme où tous les éléments sont nuls, sauf celui qui est situé sur la ligne 0 et la colonne 0. Alors $PAP = (aPa)P$ et comme $\sin R = 1$, $PAP - \sin^2 R(aPa)P = 0$ et $Q(a)$ dans (6) est indéterminée. Cette indétermination peut être concrétisée comme suit: introduisons dans $P_n^{(i)}$ une métrique E telle que la base (dégénérée) de l'espace UNE devienne le plan à l'infini de l'espace E. Alors, l'absolu local en a doit être une certaine quadrique centrée en a; le même fait doit aussi avoir lieu en tout autre point de l'espace et chaque point (y compris a) est $\frac{\pi}{2}$-isotrope. L'indétermination provient du fait que seul le centre de la quadrique (absolu local) est déterminé.

2.4.5. Propriétés descônes R-isotropes et des points R-isôtropes.

1) le cône R-isotrope en un point a appartient au faisceau de cônes défini par le cône $\frac{\pi}{2}$-isotrope et le cône NE en a.

2) le cône R-isotrope en un point a non singulier et la sphère UNE de centre a et de rayon R définissent un faisceau de quadriques auquel appartient la base.

3) le cône R-isotrope en un point a non singulier et la sphère NE (de l'espace-base) de centre a et de rayon $\frac{\pi}{2} - R$ définissent un faisceau de quadriques auquet appartienl l'absolu local en a.

4. pour qu'un point a soit R-isotrope, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit remplie:

a) tous les cônes R-isotropes passent par a,

b) l'absolu local en a est la sphère NE (de l'espace-base) de centre a et de rayon $\frac{\pi}{2} - R$,

c) la sphère UNE de centre a et de rayon R est confondue avec la base.

Démonstration:

1. la matrice au premier membre de (4) est une combinaison linéaire des matrices PAP-$(aPa)P$ (matrice du cône $\frac{\pi}{2}$- isotrope) et $\sum_{i=1}^{m} U_i AU_i$ (matrice du cône NE).

2) la sphère UNE de centre a et de rayon R contient l'intersection de la base et du cône R-isotrope en a,

3) la matrice au premier membre de (4) est une combinaison lineaire des matrices $Q(\mathrm{a}) = (aPa)P + \sum_{i=1}^{m} U_i AU_i$ et $Q'(a) = PAP - cos^2 (\frac{\pi}{2} - R)\ (aPa)P$.

Mais $xQ'(a)x = 0$ est l'équation de la sphère NE (de l'espace-base) de centre a et de rayon $\frac{\pi}{2} - R$ parce que cette équation peut être mise sous la forme:

$$\frac{(aPx)^2}{(aPa)\ (xPx)} = \cos^2 (\frac{\pi}{2} - R).$$

4. a) cette conclusion est évidente d'après la définition du cône R-isotrope et du point R-isotrope.

b) la condition (5) est nécessaire et suffisante pour que le point a soit R-isotrope; mais la condition (5) est équivalente à la condition (8) qui est l'équation de la sphère NE (dans l'espace-base) de centre a et de rayon $\frac{\pi}{2} - R$.

c) la condition (5) est équivalente à la condition:

$$PAP - (\mathrm{a}Pa)P - \cos^2 R\ [Q(a) - (aPa)P] = 0$$

ou: $$PAP - \cos^2 RQ(a) = \sin^2 R\ (aPa)P.$$

La matrice au premier membre est celle de la sphère UNE de centre a et de rayon R:

$x\ [PAP \cos^2 R\ Q(a)]x = 0 \leftrightarrow \frac{(aPx)^2}{xQ(a)x} = \cos^2 R$, et la matrice au second membre est, à un facteur numérique près, celle de la base.

2.4.6. Remarque. La propriété 1) (2.4.5.) nous fait voir que l'ensemble des droites projectives passant par un point donné d'un espace UNE se répartit en un faisceau de cônes du second degré qui sont les cônes R-isotropes au point donné, chaque cône du faisceau étant défini par le paramètre $\cos^2 R$ qui peut prendre toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$.

2.5. L'ampleur de la famille des espaces UNE.

2.5.1. THÉORÈME. *Soit donnée la quadrique $xPx = 0$; on peut construire une infinité à la puissance* $\frac{n(n+1)(n^2-n+6)}{12}$ *d'espaces UNE admettant la quadrique $xPx = 0$ comme base.*

La démonstration est donnée dans [8]. Rappelons que la première partie de la démonstration consiste à démontrer que toute combinaison linéaire des matrices de la forme UAU est une combinaison linéaire de C^4_{n+1} matrices $S^{ijkl} = T^{ijkl} - T^{kijl}$, de C^4_{n+1} matrices $S^{jkil} = T^{jkil} - T^{kijl}$, de C^3_{n+1} matrices $S^{ijil} = T^{ijil} - T^{jiil}$ et de C^2_{n+1} matrices $S^{ijij} = T^{ijij} - T^{jiij}$ et que ces matrices S sont linéairement indépendantes, les matrices T étant définies comme suit:

$T^{ijkl} = \frac{F^{ijkl} + F^{klij}}{2}$, F^{ijkl} étant le résultat de la symétrisation de la matrice $E^{ij}AE^{kl}$ où F^{ij} désigne la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j qui est égal à 1.

Améliorons la deuxième partie de la démonstration qui consiste à démontrer que toute combinaison linéaire de ces matrices S est une certaine combinaison linéaire des matrices de la forme UAU.

En effet: $4S^{ijkl} = 2(F^{ijkl} + F^{klij}) - 2(F^{kijl} + F^{jlki})$

$$= E^{ij}AE^{kl} + (E^{ij}AE^{kl})^T + E^{kl}AE^{ij} + (E^{kl}AE^{ij})^T$$
$$- E^{ki}AE^{jl} - (E^{ki}AE^{jl})^T - E^{jl}AE^{ki} - (E^{jl}AE^{ki})^T$$

ou, en permutant les indices moyens dans les quatre premiers termes du dernier membre:

$$4S^{ijkl} = (E^{ki} - E^{ik})\ A\ (E^{lj} - E^{jl}) + (E^{jl} - E^{lj})\ A\ (E^{ik} - E^{ki})$$

En posant $2R^{ki} = E^{ki} - E^{ik}$,

nous avons: $2S^{ijkl} = 2(R^{ki}AR^{lj} + R^{lj}AR^{ki}) =$

$$= (R^{ki} + R^{lj})\ A\ (R^{ki} + R^{lj}) - (R^{ki} - R^{lj})\ A\ (R^{ki} - R^{lj})$$

Ainsi S^{ijkl} est la différence de deux termes de la forme UAU $(U = -U)$.

Passons à S^{jkil};

nous avons : $4(S^{jkil} - S^{ijkl}) = 4(T^{jkil} - T^{ijkl})$

$$= E^{ij}AE^{lk} - E^{ij}AE^{kl} + E^{ji}AE^{kl} - E^{ji}AE^{lk} +$$
$$+ (E^{ij}AE^{ik} - E^{ij}AE^{kl} + E^{ji}AE^{kl} - E^{ji}AE^{lk})^T$$
$$= -(E^{ij} - E^{ji})\ A\ (E^{kl} - E^{lk}) - [(E^{ij} - E^{ji})\ A\ (E^{kl} - E^{lk})]^T$$

Donc: $S^{ijkl} - S^{jkil} =$

$$= \frac{(R^{ij} + R^{kl})\ A\ (R^{ij} + R^{kl}) - (R^{ij} - R^{kl})\ A\ (R^{ij} - R^{kl})}{2}$$

et S^{jkil} est bien une combinaison linéaire des termes de la forme UAU.

Quant à S^{ijil}, on peut l'obtenir à partir de S^{jkil} en faisant jouer aux indices j, k, i, l respectivement le rôle des indices i, j, k, l avec la valeur de l'indice k égale à la valeur de l'indice i:

$$\begin{array}{cccc} j & k & i & i \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ i & j & k=i & l \end{array}$$

Donc : $2S^{ijil} = (R^{ji} + R^{li})\, A\, (R^{ji} + R^{li}) - (R^{ji} - R^{li})\, A\, (R^{ji} - R^{li})$

Dans cette expression, si l'on remplace l par j, alors on obtiendra :

$$2S^{ijij} = 4R^{ij}\, AR^{ij}$$

Ainsi, toutes les matrices S sont chacune une combinaison linéaire des matrices de la forme UAU.

2. 5. 2. **Une autre forme de Q(a)**

Décomposons $(aPa)P$. Nous avons:

$P = p_{ji} E^{ij}$ (il y a ici la sommation suivant les indices i et j) et :

$$2(aPa)P = 2\,[a(p_{kl}E^{kl})\,a\,]\,(p_{ji}E^{ij}) = p_{ij}p_{kl}\,(aE^{kl}aE^{ij} + aE^{lk}aE^{ji})$$

$(aE^{kl}a)E^{ij}$ est une matrice carrée d'ordre $n+1$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui, situé sur la ligne i, et la colonne j, qui est égal à $a_k a_l$. Donc :

$$(aE^{kl}a)\,E^{ij} = E^{ik}AE^{lj} \text{ et,}$$

$$2(aPa)\,P = p_{ij}p_{kl}\,(E^{ik}AE^{lj} + E^{jl}AE^{ki}) = p_{ij}p_{kl}\,[E^{ik}AE^{lj} + (E^{ik}AE^{lj})^T] =$$

$$= 2_{p_{ij}p_{ki}}F^{iklj} = p_{ij}p_{kl}\,(F^{iklj} + F^{kijl}) = 2_{p_{ij}p_{kl}}T^{iklj}$$

Ainsi $(aPa)P$ s'exprime au moyen des matrices T et ne peut pas s'exprimer au moyen des matrices S. Décomposons maintenant PAP ; nous avons :

$$2\,PAP = 2_{p_{ij}p_{kl}}T^{ijkl}$$

et nous voyons que $(aPa)P - PAP$ peut s'exprimer au moyen des matrices S:

$$(aPa)P - PAP = -p_{ij}p_{kl}S^{ijkl}$$

ou $(aPa)\,\mathrm{P} = PAP$ + une combinaison linéaire des matrices de la forme UAU.

En revenant à la forme de $Q(a)$, nous voyons que $Q(a)$ peut se mettre sous la forme suivante:

$$Q\,(a) = PAP + \sum_{i=l}^{p} V_i\, AV_i \tag{1}$$

$(V_i = -V_i^T)$, ou, sous une forme plus générale: $Q\,(a) = \alpha\,(aPa)\,P + \beta\,PAP +$

$$+ \sum W_i\, AW_i \text{ avec } \alpha + \beta = l,\ W_i = -W_i^T \tag{2}$$

3. 1. Deux types d'espaces UNE réguliers

3. 1. 1. THEORÈME *1) L' ensemble des sphères de même rayon donné (différent de zéro) d'un espace E (ou pseudo-E ou semi-E — nous dirons plus tard simplement: E) est l'ensemble des absolus locaux d' un espace UNE tel que l'absolu local en un point quelconque est la sphère de rayon donné, centrée en ce point. Tous les points d'un tel espace UNE sont* $\frac{\pi}{2}$ *-isotropes.*

2) on arrive à la même conclusion avec l' ensemble des sphères de rayon donné R (différent de $K\pi$) d'un espace NE. Tous les points d'un tel espace UNE sont $\left(\frac{\pi}{2} - R\right)$ *— isotropes.*

DÉMONSTRATION

1) Supposons que l'espace $P_n^{(i)}$ porte une métrique E avec un système de coordonnées cartésiennes homogènes tel que $x_0 = 0$ soit l'équation du plan à l' infini. Alors, dans ce système de coordonnées, une sphère E de centre a et de rayon R a pour équation:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(\frac{x_i}{x_0} - \frac{a_i}{a_0}\right)^2 = R^2 \tag{1}$$

ε_i étant tous égaux à $+1$ dans le cas de l'espace euclidien R_n l, d'entre eux à -1 et les $n-l$ qui restent à $+1$ dans le cas de l'espace pseudo-euclidien ${}^lR_m$, d d'entre eux à 0, l des restants à -1 et les $n-l-d$ autres à $+1$ dans le cas de l' espace semi-euclidien ${}^{l+(d)}R_m$;

(1) peut s'écrire:

$$R^2 a_0^2 x_0^2 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (a_0 x_i - a_i x_0)^2 = 0 \tag{2}$$

ou:
$$x\, Q(a)\, x = x \left[PAP + \sum_{i=i}^{n} U_i\ AU_i \right] x = 0 \tag{3}$$

où P est la matrice carrée symétrique d'ordre $n+1$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé sur la ligne 0 et la colonne 0 qui est égal à R $(\neq 0)$ (si R est imaginaire, alors on prendra sa partie réelle et on dotera P du coefficient i) et U_i est la matrice carrée antisymétrique d'ordre $n+1$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé sur la ligne 0 et la colonne i et son symétrique qui sont égaux respectivement à $\sqrt{\varepsilon_i}$ et $-\sqrt{\varepsilon_i}$ (si $\varepsilon_i = -1$, alors on dotera U_i du coefficient i et l'on prendre $u_{0i} = 1$, $u_{i0} = -1$).

$Q(a)$ a bien la forme (1) indiquée dans 2.5.2. L'ensemble des sphères (1) est bien l' ensemble des absolus locaux d'un espace UNE. Remarquons que la base est ici le plan à l'infini (compté deux fois) et, d'après 2.4.4. tous les points de cet espace UNE sont $\frac{\pi}{2}$ -isotropes.

2) Supposons que l'espace $P_n^{(i)}$ porte une métrique NE avec la quadrique $xPx = 0$ comme absolu. Une sphère NE de centre a et de rayon R a pour équation :

$$\frac{(aPx)^2}{(aPa)\ (xPx)} = cos^2 R \tag{4}$$

ou $$x\,[\,PAP - cos^2 R\,(aPa)\,P]\,x = 0 \tag{5}$$

ou $$x\,[\,PAP - (aPa)P + sin^2 R\,(aPa)P]\,x = 0 \tag{6}$$

Comme $R \neq k\pi$, *alors* $sin^2 R \neq 0$, *et, en simplifiant par* $sin^2 R$, *nous avons* ;

$$x\left[(aPa)P + \frac{PAP - (aPa)P}{sin^2 R}\right] x = 0 \tag{7}$$

Comme $PAP - (aPa)P$, et par suite $\frac{PAP - (aPa)P}{\sin^2 R}$ a la forme $\sum_{i=1}^{m} U_i\,AU_i$ (2.5.2), nous voyons bien que la sphère(4) est bien l'absolu local au point a d'un espace UNE. D'après (2.4.4) tous les points de cet espace UNE sont $\left(\frac{\pi}{2} - R\right)$-isotropes.

3.1.2. Définitions.

1) un espace UNE dont l'absolu local en chaque point est une sphère E de rayon donné, centrée en ce point s'appelle un espace UNE régulier de type A.

2) un espace UNE dont l'absolu local en chaque point est une sphère NE de rayon donné, centrée en ce point, s'appelle un espace UNE régulier de type B.

Nous dirons plus tard brièvement « espace A », « espace B ».

3.1.3 Cas limite des espaces A et des espaces B.

1) Soit R le rayon donné des absolus locaux dans un espace A. Soit d la distance E entre deux points a et b de cet espace. Alors la distance UNE correspondante est :

$$|d(a,b)| = \left|\frac{R}{2}\, ln\, \frac{1 + \frac{d}{R}}{1 - \frac{d}{R}}\right| = \left|R\left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{3R^3} + \ldots\right)\right|$$

et $\lim\limits_{R \to \infty} |\, d(a,b)\, | = d$

Ainsi, un espace E peut être considéré comme le cas limite d'un espace A quand le rayon commun des absolus locaux tend vers l'infini.

2) Dans le cas d'un espace B, si le rayon commun des absolus locaux tend vers l'infini, alors tous les absolus locaux tendent vers une même limite qui est l'absolu de l'espace NE correspondant. Donc, un espace NE peut être considéré comme cas limite d'un espace B quand le rayon commun des absolus locaux tend vers l'infini.

3.1.4 THÉORÈME

Pour qu'un espace UNE soit un espace A (ou un espace B), il faut et il suffit qu'il possède un groupe de collinéations isométriques isomorphe au groupe de déplacements d'un espace E (ou NE).

Démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME. *Soit un espace UNE construit sur l'espace projéctif $P^{(i)}_n$. Pour qu'une collinéation de l'espace $P^{(i)}_n$ soit une transformation isométrique pour l'éspace UNE, il faut et il suffit que cette collinéation, tout en transformant un point quelconque a en un point a', transforme aussi l'absolu local en a en l'absolu local en a'.*

En effet, supposons qu'une certaine collinéation D de $P^{(i)}_n$ transforme le point a en le point a' et l'absolu local en a Q_a en la quadrique Q'_a, et soit $Q_{a'}$ l'absolu local en a.

La condition est nécessaire. Il faut démontrer que is D est isométrique pour l'espace *UNE*, alors $Q'_a \equiv Q_{a'}$

Soit b un point quelconque et b' son image dans la collinéation D. Soit (p, q) (p', q'), (p'', q'') respectivement les couples de points de rencontre de la droite projective ab avec Q_a et de la droite projective a' b' avec Q'_a et $Q_{a'}$.

Nous avons :

$(abpq) = (a'b'p'q')$ (D conserve le rapport anharmonique)

$(abpq) = (a'b'p''q'')$ (D est isométrique)

Donc $(a'b'p'q') = (a'b'p''q'')$

Sur la droite projective $a'b'$, en passant aux coordonnées affines et, en désignant l'abscisse affine de chaque point par la même lettre qui indique ce point, nous avons, en choisissant l'origine des abscisses en a' (alors $a' = 0$) :

$$\frac{p'}{p' - b'} : \frac{q'}{q' - b'} = \frac{p''}{p'' - b'} : \frac{q''}{q'' - b'}$$

ou : $$q''p' \, (q' - b') \, (p'' - b') = q'p'' \, (q'' - b') \, (p' - b') \tag{3}$$

Fixons a et la droite ab et faisons parcourir le point b sur cette droite fixe. Alors l'égalité précédente doit avoir lieu avec n'importe quelle valeur de b', ce qui exige tout d'abord

$$q'p' = q'p'' \text{ (coefficients de } b'^2 \text{ dans les deux membres).}$$

Supposons d'abord que a n'est pas singulier, c'est à dire que $a \,\overline{\in}\, Q_a$, alors $a' \,\overline{\in}\, Q'_a$. Nous devons avoir aussi $a' \,\overline{\in}\, Q_{a'}$, parce que si $a' \,\overline{\in}\, Q_{a'}$, alors a' sera singulier et $Q_{a'}$ sera le cône *NE* en a', ce qui est impossible parce que dans ce cas, $p'' \equiv q'' \equiv a'$ alors que $p' \neq a'$, $p' \neq q'$, $q' \neq a'$, ce qui fait que l'égalité $(a'b'p'q') = (a'b'p''q'')$ soit impossible. a' étant non singulier p', p'', q', q'' ne peuvent pas coïncider avec a'. Donc $p' \neq 0$, $p'' \neq 0$, $q' \neq 0$, $q'' \neq 0$. On peut alors simplifier (3) :

$$(q' - b') \, (p'' - b') = (q'' - b') \, (p' - b') \tag{4}$$

De là : $$\begin{cases} p'' + q' = p' + q'' \\ q'p'' = p'q'' \end{cases}$$

d'où : $p' = p''$, $q' = q''$.

Ainsi, toute droite passant par a' coupe Q'_a et $Q_{a'}$ aux mêmes points. Donc

$Q'_a \equiv Q_{a'}$

Si a est singulier, alors Q_a sera le cône NE en a et Q'_a sera aussi un cône du second degré de sommet a'. Si a' n'est pas singulier, c'est à dire que $a' \overline{\in} Q_{a'}$, alors $p'' \neq a'$, $q'' \neq a'$, $p'' \neq q''$, alors que $p' \equiv q' \equiv a'$, ce qui fait que l'égalité $(a'b'p'q') = (a'b'p''q'')$ soit impossible. Donc a' est singulier et $Q_{a'}$ est le cône NE en a'. Comme D est isométrique, il doit transformer un cône ∞-isotrope en un cône ∞-isotrope. Donc :

$$Q'_a \equiv Q_{a'}\ .$$

Remarque. Nous avons ainsi démontré aussi que D doit transformer un point singulier en un point singulier, c'est à dire que D transforme la base en elle-même. Donc D est nécessairement une transformation affine dans le cas d'un espace A et un déplacement dans le cas d'un espace B.

La condition est suffisante. Si $Q'_a \equiv Q_{a'}$, alors $p'' = p'$, $q'' = q'$ et $(abpq) = (a'b'p''q'')$; D est donc isométrique.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 3.1.4.

La condition est suffisante. Soit donné un espace A (ou B) construit sur $P_n^{(i)}$. Tout déplacement D de l'espace E (ou NE) correspondant, tout en transformant un point a en un point a', transforme la sphère E (ou NE) de centre a et de rayon R en la sphère de centre a' et de rayon R, c'est à dire transforme l'absolu local en a de l'espace UNE en l'absolu local en a' de cet espace. D est donc une transformation isométrique de l'espace UNE et le groupe de déplacements de l'espace E (ou NE) induit un groupe de transformations isométriques de l'espace UNE.

La condition est nécessaire. Supposons qu'un espace UNE et un espace E (ou NE) soient construits sur un même espace projectif $P_n^{(i)}$ et que le groupe de déplacements de l'espace E (ou NE) induit un groupe de transformations isométriques de l'espace UNE. Démontrons que cet espace UNE est un espace A (ou un espace B).

Soit a un point quelconque de l'espace UNE et D une rotation quelconque de centre a dans l'espace E (ou NE) correspondant. D'après l'hypothèse, D est une transformation isométrique pour l'espace UNE ; c'est pourquoi, d'après le lemme précédent, l'absolu local Q_a en a est transformé par D en l'absolu local $Q_{a'}$ en a'.

Mais $a' = D(a) = a$; par conséquent $Q_{a'} \equiv Q_a$. Donc D transforme Q_a en Q_a, et comme D est une rotation quelconque de centre a, Q_a doit être une sphère de centre a.

Considérons maintenant un deuxième point b et les symétries E (ou NE) S_{aa} et S_{ab} qui transforment a respectivement en a et en b : $S_{ab}(a) = a$, $S_{aa}(a) = b$.

Le déplacement $T = S_{ab} . S_{aa}$ transforme a en b. D'après l'hypothèse T est isométrique pour l'espace UNE et par suite, d'après le lemme précédent, $T(Q_a) = Q_b$. Donc Q_b est une sphère de centre b, égale à la sphère Q_a.

Ainsi, notre espace est bien un espace A(ou B).

3.2. Espaces A et B à une dimension.

3 2.1. THÉORÈME. *Tous les espaces UNE à une dimension dont la base n'est pas dégénérée, sont des espaces B. Si la base est dégénérée, on aura un espace A.*

Démonstration. Ici, P peut être toujours ramenée à l'une des trois formes

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

et U_i à la seule forme $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ (à un coefficient numérique près). Dans les trois cas, la base et l'absolu local ont pour équations respectives :

1) $x_0^2 + x_1^2 = 0$

$$(a_0^2 + a_1^2)\,(x_0^2 + x_1^2) + k(a_0 x_1 - a_1 x_0)^2 = 0$$

2) $x_0^2 - x_1^2 = 0$

$$(a_0^2 - x_1^2)\,(x_0^2 - x_1^2) + k\,(a_0 x_1 - a_1 x_0)^2 = 0$$

3) $x_0^2 = 0$

$$a_0^2 x_0^2 + k(a_0 x_1 - a_1 x_0)^2 = 0$$

Un déplacement de l'espace-base dans les deux premiers cas s'exprime respectivement par les systèmes d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_0 = a'_0 \cos\varphi - a'_1 \sin\varphi \\ a_1 = a'_0 \sin\varphi + a'_1 \cos\varphi \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x_0 = x'_0 \cos\varphi - x'_1 \sin\varphi \\ x_1 = x'_0 \sin\varphi + x'_1 \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = a'_0 \,ch\varphi - a'_1 \,sh\varphi \\ a_1 = -a'_0 \,sh\varphi + a'_1 \,ch\varphi \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x_0 = x'_0 \,ch\varphi - x'_1 \,sh\varphi \\ x_1 = -x'_0 \,sh\varphi + x'_1 \,ch\varphi \end{cases}$$

En mettant ces valeurs de a_0, a_1, x_0, x_1 dans les équations des absolus locaux, on trouve respectivement dans les deux premiers cas :

$$(a_0'^2 + a_1'^2)\,(x_0'^2 + x_1'^2) + k\,(a'_0 x'_1 - a'_1 x'_0)^2 = 0$$

$$(a_0'^2 - a_1'^2)\,(x_0'^2 - x_1'^2) + k\,(a'_0 x'_1 - a'_1 x'_0)^2 = 0\,;$$

Ainsi, le déplacement, tout en transformant le point a en le point a', transforme l'absolu local en a en l'absolu local en a'. Parce que la base n'est pas dégénérée, notre espace est un espace B. Dans le troisième cas, l'équation de l'absolu local s'écrit :

$$(a_0 x_1 - a_1 x_0)^2 = -\frac{1}{k}\, a_0^2 x_0^2$$

$$ou \left(\frac{x_1}{x_0} - \frac{a_1}{a_0}\right)^2 = -\frac{1}{k}$$

En considérant l'équation $x_0 = 0$ comme l'équation du point à l'infini sur une droite E et, en passant aux coordonnées cartésiennes :

$$y = \frac{x_1}{x_0}, \quad b = \frac{a_1}{a_0}, \text{ nous avons :}$$

$$(y - b)^2 = -\frac{1}{k}$$

L'absolu local est donc une circonférence (un ensemble de deux points) de centre b et de rayon $\sqrt{-\frac{1}{k}}$. Notre espace est bien un espace A.

3.2.2. **Remarque.** Ainsi, toutes les droites projectives de l'espace $P_n^{(i)}$ sont des espaces A ou B (ou des cas limites de ces espaces) à une dimension plongés dans l'espace *UNE*. Une question se pose : existe-t-il des espaces A et B de dimension supérieure à 1 plongés dans l'espace *UNE*? Cette question sera étudiée dans le chapitre 4.

4. ESPACES A ET B PLONGÉS DANS UN ESPACE UNE

4.1. Généralisation de la matrice Q(a)

4.1.1. *Matrices $Q(a, b)$ et $\overline{Q}(a, b)$.* Dans l'expression de Q(a) donnée dans 2.1., si nous remplaçons aPa par aPb et $A = aa$ par ab (a est la matrice-colonne et b la matrice-ligne), nous obtenons une matrice que nous désignerons par $Q(a, b)$. Il est facile de voir que $Q(a, b) = Q^T(b, a)$, et alors la matrice $\overline{Q}(a, b)$ définie comme la demi-somme de $Q(a, b)$ et de $Q(b, a)$ est une matrice symétrique.

On remarque tout de suite que $Q(a) = Q(a, a) = \overline{Q}(a, a)$.

4.1.2. THÉORÈME. *Si un point b dépend linéairement de p points a^i $(i = 1, 2, \ldots, p)$*

$b = \lambda_i a^i$ (il y a ici sommation suivant i),

alors : $\quad Q(b) = \overline{Q}(b,b) = \lambda_i \lambda_j \overline{Q}(a^i, a^j)$ *(sommation suivant i, j)*

Démonstration. Il suffit de remarquer que :

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda ab,$$

$$(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb$$

et de remplacer a par $\lambda_i a^i$ dans l'expression de $Q(a)$ (2.1.(2).) et ensuite de développer l'expression obtenue.

4.1.3. THÉORÈME. *$Q(a,b)$ et $\overline{Q}(a,b)$ ont les propriétés suivantes :*

$$aQ(b,c)d = dQ(c,b)a \tag{1}$$

$$aQ(b,c)d = bQ(a,d)c \tag{2}$$

$$a\overline{Q}(c,d)b + a\overline{Q}(b,d)c + a\overline{Q}(b,c)d = (aPb)(cPd) + (aPc)(bPd) + (aPd)(bPc) \tag{3}$$

Démonstration. $aQ(b,c)d$ est une matrice d'ordre 1. Donc :

$aQ(b,c)d = [aQ(b,c)d]^T = dQ(c,b)a$, ce qui nous donne (1).

Nous avons : $(cPb)(dPa) = (dPa)(cPb)$,

$a(\bigcup_i bc\bigcup_i)d = b(\bigcup_i ad\bigcup_i)c$ parce que $a\bigcup_i b = -b\bigcup_i a, c\bigcup_i d = -d\bigcup_i c$. De là, en faisant une combinaison linéaire des premiers membres analogue à celle obtenue dans l'expression de $Q(a)$, et une combinaison linéaire correspondante des seconds membres, on obtient (2).

Remarquons que (1) et (2) restent vraies dans le cas où Q est remplacé par $\overline{Q}$.

Enfin, nous avons:

$$a\overline{Q}(c,d)b = \frac{(cPd)(aPb) = (dPc)(aPb)}{2} + \sum_i \frac{a\bigcup_i cd\bigcup_i b + a\bigcup_i dc\bigcup_i b}{2};$$

en écrivant des expressions analogues pour $a\overline{Q}(b,d)c$ et $a\overline{Q}(b,c)d$ et en additionnant membre à membre, nous obtenons (3).

4.2. Sous-espaces réguliers.

4.2.1. Définitions.

1) un m-plan $(m > 1)$ de l'espace $P_n^{(i)}$ (où l'on a introduit une métrique UNE) sera dit R-isotrope (UNE) en l'un de ses points a si toutes les droites projectives du m-plan, passant par a sont R-isotropes (UNE). Le point a s'appellera alors un point R-isotrope d'ordre m de l'espace UNE.

2) un m-plan projectif sera dit R-régulier si tous ses points son R-isotropes d'ordre m.

4.2.2. Cherchons d'abord les m-plans $\frac{\pi}{2}$-réguliers. Cela revient, d'après (2.4.3.) à chercher les m-plans isotropes de l'espace-base.

Soit a, b deux points quelconques de l'espace-base et u, v les points où la droite ab coupe la base. Pour que la distance $NE\,ab$ (de l'espace-bace) soit égale toujours à zéro, il faut et il suffit que $(uvab) = 1$ $(\forall a, b)$, ou que $u \equiv v (\forall a,b)$.

Pour qu'un m-plan soit $\frac{\pi}{2}$-régulier, il faut et il suffit donc que ce m-plan coupe la base suivant une $(m-1)$ – quadrique dégénérée en l'ensemble de deux $(m-1)$-plans confondus. Cela arrivera si et seulement si l'une des conditions suivante est satisfaite:

1) le m-plan est tangent à la base le long d'un $(m-1)$-plan générateur (le cas où le m-plan est un plan générateur de la base y est aussi inclus).

2) le m-plan n'est pas tangent à la base mais contient le $(m-1)$-plan-sommet de la base (si la base a un tel plan-sommet).

Dans ce qui suit, nous supposerons toujours $R \neq \frac{\pi}{2}$.

4.2.3. THÉORÈME. *Pour qu'un m-plan projectif soit R-régulier* $\left(R \neq \frac{\pi}{2}\right)$, *il faut et it suffit qu'il possède l'une des propriétés suivantes:*

1. entre n'importe quels quatre de ses points a, b, c, d (distincts ou confondus) nous avons la relation:

$$xQ(y, z)t = -tg^2R(yPz)(xPt) + \frac{1}{2\cos^2 R}[(xPy)(zPt) + (xPz)(yPt)] \tag{1}$$

où x, y, z, t sont les quatre points a, b, c, d pris dans un ordre arbitraire,

2. toutes les sphères UNE de rayon R centrées dans le m-plan coupent celui-ci suivant son intersection avec la base.

3. l'absolu local en chaque point a du m-plan coupe celui-ci suivant une $(m-1)$*-sphère NE de rayon* $\frac{\pi}{2}$*-R et de centre a (de l'espace-base).*

Démonstration.

1. a) Condition nécessaire.

— Cas de quatre points confondus: a, a, a, a. La relation (1) s'écrit alors:

$$aQ(a, a)a = tg^2R(aPa)^2 + (1 + tg^2R)(aPa)^2$$

ou: $$aQ(a)a = (aPa)^2$$

— Cas de quatre points a, a, a, b. La relation (1) s'écrit alors (en tenant compte aussi de 4.1.3. (2)):

$$a\overline{Q}(a, a)b = a\overline{Q}(a, b)a = aQ(a)b = (aPa)(aPb)$$

— Cas de quatre points a, a, b, b:

Le m-plan étant R-régulier, la droite ab est R-isotrope. Donc, d'après (2.4.2. (4)):

$$bQ(a)b = b\left[\frac{1}{\cos^2 R}\left(-\sin^2 R(aPa)P + PAP\right)\right]b$$

ou: $$b\overline{Q}(a, a)b = -tg^2R(aPa)(bPb) + \frac{1}{\cos^2 R}(aPb)^2 .$$

C'est justement la relation (1). Remarquons que $a\overline{Q}(b, b)a = b\overline{Q}(a, a)b$. Il reste à calculer $a\overline{Q}(a, b)b$. Pour cela, faisons $c = a$, $d = b$ dans (4.1 3.(3)). Nous obtenons:

$$a\overline{Q}(a, b)b + a\overline{Q}(b, b)a + a\overline{Q}(b, a)b$$
$$= (aPb)^2 + (aPa)(bPb) + (aPb)^2$$

ou: $$2a\overline{Q}(a, b)b = [2(aPb)^2 + (aPa)(bPb)] - aQ(b)a$$
$$= [2(aPb)^2 + (aPa)(bPb)] + tg^2R(aPa)(bPb) - \frac{1}{\cos^2 R}(aPb)^2$$
$$= -2tg^2R(aPb)^2 + \frac{1}{\cos^2 R}\left[(aPa)(bPb) + (aPb)^2\right]$$

u: $a\bar{Q}(a, b)b = -\mathrm{tg}^2 R(aPb)^2 + \dfrac{1}{2\cos^2 R}\left[(aPa)(bPb) + (aPb)^2\right]$

La relation (1) est vérifiée.

— Cas de quatre points a, a, b, c. Nous avons:

$b\bar{Q}(a, a)c = a\bar{Q}(b, c)a$. Mais :

$2\bar{Q}(b, c) = Q(b + c, b + c) - Q(b, b) - Q(c, c)$. Alors

$$\begin{aligned} 2a\bar{Q}(b, c)a &= (b + c)Q(a, a)(b + c) - bQ(a, a)b - cQ(a, a)c \\ &= -\mathrm{tg}^2 R(aPa)[(b + c)P(b + c) - bPb - cPc] \\ &\quad + \frac{1}{\cos^2 R}\left[(aP(b + c))^2 - (aPb)^2 - (aPc)^2\right. \end{aligned}$$

ou $b\bar{Q}(a, a)c = a\bar{Q}(b, c)a = -\mathrm{tg}^2 R(aPa)(bPc) + \dfrac{1}{\cos^2 R}(aPb)(aPc)$.

Donc (1) est vérifiée dans les cas où x, y, z, t prennent les valeurs respectives a, b, c, a ou a, c, b, a ou b, a, a, c ou c, a, a, b.

Calculons ensuite $aQ(a,b)c = aQ(b,a)c = aQ(a,c)b$: d'après (4.1.3.(3)), nous avons:

$$\begin{aligned} 2a\bar{Q}(a,b)c &= [(aPa)(bPc) + 2(aPb)(aPc)] - b\bar{Q}(a,a)c \\ &\quad \frac{1}{\cos^2 R}(aPa)(bPc) + (1 - \mathrm{tg}^2 R)(aPb)(aPc) \end{aligned}$$

ou: $a\bar{Q}(a,b)c = -\mathrm{tg}^2 R(aPb)(aPc) + \dfrac{1}{2\cos^2 R}[(aPa)(bPc) + (aPb)(aPc)]$

Donc, (1) est vérifiée pour x, y, z, t prenant les valeurs respectives a, a, b, c ou a, a, c, b, ou a, b, a, c ou a, c, a, b.

En permutant a, b, c, on obtient encore quatre autres relations analogues.

— Cas de quatre points distincts a, b, c, d.

Nous avons:

$$\begin{aligned} 2a\bar{Q}(b, c)d &= a\bar{Q}(b + c, b + c)d - a\bar{Q}(b, b)d - a\bar{Q}(c, c)d \\ &= (b + c)\bar{Q}(a, d)(b + c) - b\bar{Q}(a, d)b - c\bar{Q}(a, d)c \\ &= -tg^2 R(aPd)[(b + c)P(b + c) - bPb - cPc] \\ &\quad + \frac{1}{\cos^2 R}[(b + c)Pa\,.\,(b + c)Pd - bPa\,.\,bPd - cPa\,.\,cPd] \\ &= -2tg^2 R(aPd)(bPc) + \frac{1}{\cos^2 R}[(aPb)(cPd) + (aPc)(bPd)] \end{aligned}$$

En permutant a,b,c,d, nous obtenons encore des relations analogues.

b) *Condition suffisante.* Si la relation (1) est vérifiée,, alors toute droite projective du m-plan sera R-isotrope. En effet, prenons deux points distincts quelconques a,b du m-plan et appliquons (1) aux points a,a,b,b:

$$b\bar{Q}(a, a)b = -tg^2 R(aPa)(bPb) + \frac{1}{\cos^2 R}(aPb)^2$$

ou $$bQ(a)b = -tg^2 R(aPa)(bPb) + \frac{1}{\cos^2 R}(aPb)^2,$$

c'est-à-dire que la droite ab est R-isotrope (d'après 2.4.2.(4)).

2) le m-plan donné est un espace UNE à m dimensions dont la base est l'intersection de ce m-plan avec la base de tout l'espace. Pour que ce m-plan soit R-régulier, il faut et il suffit que tous ses points soient R-isotropes d'ordre m. D'après (2.4.5.) cela veut dire que toute sphère UNE de rayon R centrée dans le m-plan coupe celui-ci suivant son intersection avec la base (de tout l'espace).

3) d'après (2.4.5), pour qu'un point a du m-plan soit R-isotrope, il faut et il suffit que l'absolu local en a coupe le m-plan suivant une $(m-1)$ — sphère (de l'espace-base) de rayon $\frac{\pi}{2}-R$, et de centre a.

4.2.4. THÉORÈME. *Un m-plan projectif π sera R-régulier si l'une des conditions suivantes est satisfaite:*

1) π contient un m-simplexe $(a^0\ a^1\ a^2 \dots a^m)$ tel qu'entre n'importe quatre de ses sommets a^i, a^j, a^k, a^l (distincts ou confondus) il y a relation (1) du théorème 4.2.3. dans laquelle x, y, z, t sont quatre sommets a^i, a^j, a^k, a^l pris dans un ordre arbitraire.

2) π est R-isotrope en C^2_{m+1} points distincts tels qu'il existe un certain $(m-1)$-cône du second degré passant par $C^2_{m+1}-1$ de ces points, mais ne passant pas par le point qui reste.

Démonstration:

1. soit u et v deux points quelconques de π:

$u=\lambda_i\, a^i$ (il y a sommation suivant $i=0, 1, \dots, m$)

$v=\mu_j\, a^j$ (il y a sommation suivant $j=0, 1, \dots, m$).

Alors: $$uQ(v,v)u = vQ(u,u)v = (\mu_k\, a^k)\, Q(\lambda_i a^i, \lambda_j a^j)\, (\mu_l a^l)$$
$$= \mu_k a^k\, [\lambda_i \lambda_j \overline{Q}(a^i, a^j)]\, (\mu_l a^l) = \lambda_i \lambda_j \mu_k \mu_l\, a^k\, \overline{Q}(a^i, a^j)\, a^l.$$
$$= \lambda_i \lambda_j \mu_k \mu_l\, a^i\, \overline{Q}(a^k, a^l)\, a^j$$

Mais, d'après l'hypothèse:
$$2a^k Q(a^i, a^j)\, a^l = -2tg^2 R(a^i P a^j)(a^k P a^l) + \frac{1}{cos^2 R}(a^i P a^k . a^j P a^l + a^j P a^k . a^i P a^l)$$

Par suite:
$$vQ(u,u)v = \lambda_i \lambda_j \mu_k \mu_l \Big[-tg^2 R a^i P a^j . a^k P a^l + \frac{1}{2cos^2 R}(a^i P a^k . a^j P a^l +$$
$$+ a^j P a^k . a^i P a^l)\Big] = -tg^2 R(\lambda_i a^i) P(\lambda_j a^j) . (\mu_k a^k) P(\mu_l a^l) +$$
$$+ \frac{1}{2cos^2 R}\Big[(\lambda_i a^i) P(\mu_k a^k) . (\lambda_j a^j) P(\mu_l a^l) + (\lambda_j a^j) P(\mu_k a^k) . (\lambda_i a^i) P(\mu_l a^l)\Big] =$$
$$= -tg^2 R(uPu)(vPv) + \frac{1}{cos^2 R}(uPv)^2,$$

Ce qui montre que la droite uv est R-isotrope. Comme u et v sont tout à fait quelconques, on peut conclure que le m-plan π est R-régulier.

2) soit a^i ($i = 1, 2, \ldots, C^2_{m+1}$) les C^2_{m+1} points donnés et soit φ le lieu géométrique des points a du m-plan π tels qu'il existe un $(m-1)$-cône du second degré de sommet a passant par tous ces points a^i. Ce lieu ne peut pas être π parce que, d'après l'hypothèse, il existe un certain $(m-1)$-cône du second degré passant par $C^2_{m+1} - 1$ de ces points a^i, mais ne passant pas par le point qui reste. φ contient toutes les droites joignant les C^2_{m+1} points donnés, deux à deux.

Considérons un point b, non situé sur φ. Les $C^2_{m+1} - 1$ droites ba_i ($i = 2, 3, \ldots, C^2_{m-1}$) doivent définir un $(m-1)$-cône du second degré de sommet b [parce que si ce $(m-1)$-cône est indéterminé, alors il y aura un $(m-1)$-cône du second degré de sommet b passant par tous les points a_i (a_l non excepté), ce qui est contraire à l'hypothèse que b n'est pas situé sur φ]. Ce $(m-1)$-cône bien défini doit être le $(m-1)$-cône R-isotrope au point b du m-plan parce que $C^2_{m+1} - 1$ de ses génératrices ba_i sont R-isotropes. Le point a_1 n'appartient pas à ce cône parce que $b \overline{\in} \varphi$. Donc, par le point b, outre les génératrices du $(m-1)$-cône R-isotrope du m-plan π, il existe encore la droite ba_1 qui est aussi R-isotrope. Ceci ne pourra avoir lieu que si b est R-isotrope (d'ordre m). Alors, si $c \in \varphi$, la droite bc sera R-isotrope, ce qui ne pourra avoir lieu que si c est R-isotrope (d'ordre m) parce que par c passent déjà C^2_{m+1} droites R-isotropes ca_i ($i = 1, 2, \ldots, C^2_{m+1}$). Ainsi tous les points de π sont R-isotropes d'ordre m. π est donc R-régulier.

4.2.5. **Remarques.**

1. D'après (2.4.5), dans la deuxième partie du théorème 4.2.4., on peut remplacer la condition imposée à π « d'être R-isotrope en C^2_{m+1} points... » par la condition : « d'avoir en chacun de ces C^2_{m+1} points une sphère *UNE* de rayon R, centrée en ce point, coupant π suivant son intersection avec la base », ou encore par la condition : « d'avoir en chacun de ces C^2_{m+1} points un absolu local coupant π suivant une $(m-1)$-sphère *NE* (de l'espace-base) de rayon $\frac{\pi}{2}$-R.

En particulier :

a) un espace *UNE* de dimension 2 sera R-régulier s'il contient trois points R-isotropes distincts non situés sur une même droite projective.

b) un espace *UNE* de dimension 3 sera R-régulier s'il contient six points R-isotropes non situé sur une même conique.

2. un espace *UNE* non régulier peut contenir ou bien un nombre fini (plus petit que C^2_{n+1}) de points R-isotropes, ou bien une infinité de tels points ; ce

dernier cas arrivera si notre espace contient C^2_{n+1} points R-isotropes tels que tout cône du second degré passant par $C^2_{n+1} - 1$ de ces points, passe aussi par le point qui reste; dans le cas où ces C^2_{n+1} points appartiennent à une même $(n-2)$-quadrique Q, alors tous les points de Q sont R-isotropes. En effet, soit a un point quelconque de l'espace non situé sur le plan de Q. Le cône (a, Q) est R-isotrope parce que C^2_{n+1} de ses génératrices sont R-isotropes. De là, toute génératrice ab (où b est un point quelconque de Q) de ce cône est R-isotrope. En fixant b et en faisant varier a dans l'espace, on voit que b est R-isotrope.

Dans ce cas, le plan contenant Q est R-régulier parce que toute droite projective de ce plan coupe Q en deux points (distincts ou confondus); comme ces deux points sont R-isotropes, la droite donnée qui les joint est R-isotrope.

Dans le cas où ces C^2_{n+1} points appartiennent à un même $(n-2$ -plan Q', alors tous les points de Q' sont R-isotropes. En effet, soit a un point de l'espace (non situé sur Q'. Alors le cône R-isotrope en a contient les C^2_{n+1} droites joingant a aux C^2_{n+1} points donnés; par suite. il contient tout le plan (a,Q')' c'est à dire qu'il dégénère en l'ensemble de deux plans dont l'un d'eux est (a, Q'). Soit b un point quelconque de Q'. La droite ab est R-isotrope. En fixant b et en faisant varier a, on voit que b est R-isotrope. Dans ce cas. tout plan passant par Q' est R-régulier parce que toute droite projective de ce plan coupe Q 'en un point qui est R-isotrope.

4.3. Cônes R-réguliers.

4.3.1. *Définition.* Un cône R-isotrope ayant des m-plans générateurs $(m \geqslant 2)$ sera dit R-régulier si tous ses plans générateurs sont R-réguliers.

4.3.2. THÉORÈME. *Deux points non R-isotropes a et b tous deux singuliers ou tous deux non singuliers auront un même cône R-isotrope, si et seulement si les deux sphères UNE de rayon R et de centre respectifs a et b sont confondues.*

Démonstration :

1) a et b sont singuliers. D'après (2.4.2. (4)), si un point a est singulier $(aPa = 0)$, alors le cône R-isotrope en a coïncide avec la sphère *UNE* de centre a et de rayon R. Donc si a et b sont singuliers, alors la coïncidence des cônes R-isotropes en a et b est aussi la coïncidence des sphères *UNE* de rayon R et de centres respectifs a et b.

2. a et b ne sont pas singuliers $(aPa \neq 0,\ bPb \neq 0)$. Supposons que a et b ont un même cône R-isotrope:

$$M_R(a) = \lambda M_R(b) \tag{1}$$

ou:

$$Q(a) + tg^2\, R(aPa)P - \frac{1}{\cos^2 R}\, PAP = \lambda \left[Q(b) + \mathrm{tg}^2\, R(bPb)P - \frac{1}{\cos^2 R}\, PBP \right]$$

où:

$$Q'(a) + tg^2 R(aPa)P = \lambda\, [Q'(b) + tg^2 R(bPb)P] \text{ en posant } Q'(a) - \frac{1}{\cos^2 R} PAP\,, \quad (2)$$

$Q'(a)$ étant la matrice correspondant à la sphère *UNE* de centre a et de rayon R (2.4.5.(4c)).

Comme $M_R(a)$ et $M_R(b)$ ne sont définis qu'à une fonction scalaire près, nous pouvons prendre $\lambda = \dfrac{aPa}{bPb}$; alors, toutes réductions faites, (2) nous donne:

$$Q'(a) = \frac{aPa}{bPb}\, Q'(b) \tag{3}$$

Réciproquement, si l'on a (3), alors en remontant le cours des calculs, on arrivera à (1).

4.3.3. **Remarque.** Les équations (1) et (3) peuvent s'écrire:

$$(bPb)M^R(a) = (aPa)\, M^R(b) \tag{4}$$

$$(bPb)Q'(a) \quad = (aPa)Q'(b) \tag{5}$$

Imaginons que $aPa \to 0$; pour que les égalités (4) et (5) subsistent, il est nécessaire que $bPb \to 0$. Donc, si l'un des points a et b est singulier et l'autre ne l'est pas, la coïncidence des cônes R-isotropes et des sphères énoncées dans le théorème 4.3.2. sera impossible.

4.3.4. THÉORÈME. *Pour qu'un cône R-isotrope ayant un r-plan sommet* $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ *soit R-régulier, il faut et il suffit qu'il possède une des propriétés suivantes:*

1) il est le cône R-isotrope commun à tous les points non R-isotropes du r-plan sommet

2) tous les points non R-isotropes du r-plan sommet ont une sphère UNE commune de rayon R centrée en ces points.

3) pour n'importe quelle paire de points a et b non singuliers et non R-isotropes (distincts ou confondus) appartenant au r-plan sommet, la matrice

$$\frac{\overline{Q}(a,b)}{aPb} - \frac{1}{2\cos^2 R}\,\frac{P(ab+ba)P}{aPb}$$

est indépendante de a et de b et est différente de $(-tg^2 R)P$

4) tout point singulier du r-plan sommet (qui n'est pas un plan générateur de la base) est R-isotrope et réciproquement, tout point R-isotrope du r-plan sommet est singulier.

Démonstration.

1) a) *Condition nécessaire.* Soit π_a le cône R-isotrope en un point non R-isotrope a et supposons qu'il soit R-régulier et qu'il possède un r-plan sommet Ω $(a \in \Omega)$. Soit b un autre point non R-isotrope de Ω $(b \neq a)$ et π_b le cône R-isotrope en b.

Démontrons que $\pi_a \equiv \pi_b$:

— tout plan générateur G de π_a est aussi plan générateur de π_b. En effet G contient Ω, donc contient b. π_a étant R-régulier, toute droite de G est R-isotrope; en particulier, toutes les droites de G passant par b sont R-isotropes. Donc $G \in \pi_b$ et, par suite $\pi_a \subset \pi_b$.

Mais deux cônes du second degré ou bien coïncident, ou bien ont une intersection de dimension inférieure à $n-1$, sauf au cas où l'un desdeux cônes et dégénéré en l'ensemble de deux plans P, P' et l'autre en l'ensemble de deux plans P, P'' (l'intersection contient alors le plan P, de dimension égale à $n-1$). Pour les deux cônes π_a et π_b, avec $\pi_a \subset \pi_b$, deux cas peuvent se présenter:

α) $\pi_a \equiv \pi_b$

β) π_a est l'intersection de π_a et de π_b. Comme π_a est de dimension $n-1$, cette intersection est de dimension $n-1$. Ceci ne pourra avoir lieu que si π_a dégénère en l'ensemble de deux plans P, P' et π_b en l'ensemble de deux plans P, P''. Mais P et P' sont alors des plans générateurs de π_a et, par suite, comme il a été démontré plus haut, P et P'' sont aussi des plans générateurs de π_b, ce qui exige $P' \equiv P''$, c'est à dire que $\pi_a \equiv \pi_b$. Dans le cas limite où P' coïncide avec P (alors toute droite projective de P sera une droite R-isotrope double), on doit avoir aussi $P'' \equiv P$ (parce que toute droite projective de P est une droite R-isotrope double), c'est-à-dire qu'on a toujours $\pi_a \equiv \pi_b$

b) *Condition suffisante.* Supposons que $\pi_a \equiv \pi_b$ $(\forall b \in -\Omega)$. Alors tout $r+1)$-plan générateur de π_a a la propriété d'être P-isotrope en b c'est-à-dire en tous les points de Ω. D'après un raisonnement analogue à celui donné dans a deuxième remarque (4. 2. 5.), ce $(r+1)$-plan générateur est R-régulier et, par suite π_a est R-régulier.

2) C'est une conséquence directe de la partie 1) et du théorème 2.4.5,

3) a) *Condition nécessaire.* D'après la partie 2), a et b sont des centres d'une même sphère UNE de rayon R.

Soit c un point non singulier et non R-isotrope de la droite $ab: c = a + \lambda b$. Alors, d'après (4.1.2.), nous avons:

$$\frac{Q'(c)}{cPc} = \frac{Q'(a) + 2\lambda \overline{Q}'(a,b) + \lambda^2 Q'(b)}{aPa + 2\lambda aPb + \lambda^2 bPb} \qquad (6)$$

Mais, d'après (4.3.2. (3):

$$\frac{Q'(c)}{cPc} = \frac{Q'(a)}{aPa} = \frac{Q'(b)}{bPb} = \frac{Q'(a) + \lambda^2 Q'(b)}{aPa + \lambda^2 bPb} \qquad (7);$$

en comparant (6) et (7), nous avons:

$$\frac{Q'(a)}{aPa} = \frac{Q'(b)}{bPb} = \frac{\overline{Q}'(a,b)}{aPb} \qquad (8).$$

En fixant successivement l'un des deux points a, b, et en faisant varier l'autre, on voit que $\dfrac{\overline{Q}'(a,b)}{aPb}$ est indépendante de a,b. Cette matrice indépendante de a,b ne peut pas être égale à $(-\mathrm{tg}^2 R)\, P$ parce que, dans ce cas, $Q'(a) =$ $= -\mathrm{tg}^2 R\,(aPa)P$ et nous aurons, d'après (4.3.2):

$$M_R(a) = 0$$

et le point a sera R-isotrope.

On peut remarquer en passant que si a est non singulier et non R-isotrope, alors tout autre point non-singulier b du r-plan sommet sera aussi non R-isotrope.

b) Condition suffisante. Supposons que $\dfrac{\overline{Q'}(a, b)}{aPb}$ soit constante quand a et b (non singuliers et non R-isotropes) varient dans Ω. Alors, en faisant $b = a$, puis $a = b$, nous avons:

$$\frac{\overline{Q'}(a, a)}{aPa} = \frac{\overline{Q'}(b, b)}{bPb}$$

ou:

$$Q'(a) = \frac{aPa}{bPb} Q'(b);$$

donc a et b sont les centres d'une même sphère *UNE* de rayon R, et d'après la partie 2), π_a est R-régulier.

4) a). *Condition nécessaire.* Soit c un point singulier du r-plan sommet Ω $(r \geqslant 1)$ d'un cône R-régulier π. Prenons deux points a et b de Ω, non singuliers, non R-isotropes et alignés avec c: $c = a + \lambda b$. Ces deux points existent toujours parce que, d'après l'hypothèse, Ω n'est pas un plan générateur de la base et nous pouvons toujours choisir sur Ω deux points non singuliers alignés avec c. D'autre part, on peut choisir ces points tels qu'ils soient non R-isotropes parce que dans le cas contraire, Ω sera R-régulier et tous les $(r + 1)$ -plans passant par Ω seront R-réguliers (4. 2. 5. remarque 2), ce qui est contraire à l'existence du cône π. D'après la partie 3), nous avons la relation (8). D'autre part, nous avons encore (7) et, par conséquent (6). Mais $cPc = 0$, d'où $Q'(c) = 0$ et par suite $M_R(c) = 0$, c'est-à-dire que c est R-isotrope.

Reciproquement, supposons que c soit R-isotrope, c'est.à.dire que:

$$Q'(c) = -tg^2 R(cPc)\, P \tag{9}$$

prenons encore deux points non R-isotropes a et b de Ω, alignés avec c: $c = a + \lambda b$; alors, d'après la partie 3) nous avons (6) et (8). Si $cPc \neq 0$, alors (9) nous donnera. $\dfrac{Q'(c)}{cPc} = (-\mathrm{tg}^2 R)\, P$ et ensuite, en tenant compte de (6) et (8):

$\dfrac{\overline{Q'}(a, b)}{aPb} = (-\mathrm{tg}^2 R)\, P$, ce qui est contraire à la partie 3) de ce théorème. Cette contradiction ne peut être enlevée que si $cPc = 0$. Donc c'est singulier.

b) *Condition suffisante.* Supposons que tout point singulier c du r-plan sommet Ω (qui n'est pas un plan générateur de la base) d'un cône R-isotrope π soit R-isotrope. Démontrons que π est R-régulier. Pour cela, démontrons que Ω est le lieu des centres d'une même sphère *UNE* de rayon R: soit a et b deux points non singuliers distincts de Ω et t_1, t_2 les deux points singuliers sur la droite ab; alors $a = t_1 + \lambda t_2$, $b = t_1 + \mu t_2$.

D'après l'hypothèse, t_1 et t_2 sont R-isotropes:

$$M_R(t_1) = M_R(t_2) = 0; \text{ de là:}$$
$$Q'(t_1) = Q'(t_2) = 0$$

et alors :

$$\overline{Q'}(a) = \overline{Q'}(a, a) = \overline{Q'}(t_1 + \lambda\, t_2\, ,\; t_1 + \lambda\, t_2) = 2\lambda \overline{Q'}\,(t_1\, ,\; t_2)$$

$$Q'(b) = \overline{Q'}(b, b) = Q'(t_1 + \mu\, t_2\, ,\; t_1 + \mu\, t_2) = 2\mu\, \overline{Q'}\,(t_1\, ,\; t_2)$$

Donc : $Q'(a) = \dfrac{\lambda}{\mu}\, Q'(b)$, et d'après la partie 2) de ce théorème, π est R-régulier.

4.3.5. **Remarque.** La propriété 4) (4.3.4.) n'est pas vraie dans le cas où Ω est situé sur la base. Dans l'exemple 3 (2.3.3), toute tangente à la courbe $x_i = t^i$ est l'arête-sommet d'un cône ∞ — régulier parce que les absolus locaux en les différents points d'une telle tangente coincident. Tous les points de la tangente sont singuliers, mais seul le point de contact est NE parce que la tangente est une génératrice de la base [3].

4.3.6. LEMME 1. *Si un m-plan projectif $(m > 1)$ est R-isotrope en $C^2_{m+1} - 1$ de ses points a^i définissant une $(m - 2)$-quadrique unique, alors il sera R-isotrope en tous les points de cette $(m - 2)$-quadrique.*

Démonstration. Le raisonnement est analogue à celui donné dans la remarque 4) (4.2.5.).

LEMME 2. *Si un cône R-isotrope possédant u r-plan sommet Ω $(1 \leqslant r \leqslant n - 1)$ est commun à $C^2_{r+2} - 1$ points non R-isotropes de Ω définissant une $(r - 1)$-quadrique unique du r-plan Ω, alors il sera aussi commun à tout autre point de cette $(r - 1)$-quadrique.*

Démonstration. Ce lemme est une conséquence directe du lemme 1 (4.3.6.).

4.3.7. THÉORÈME. *Une cône R-isotrope π possédant un r-plan sommet Ω $(1 \leqslant r \leqslant n - 1)$ sera R-régulier si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1) Ω contient un r-simplexe $a^0\, a^1 \dots a^r$ tel que la matrice $\dfrac{\overline{Q}'(a^i, a^j)}{a^i P a^j}$ soit indépendante des indices i, j et différente de $(- tg^2 R)P$.

2) il existe C^2_{r+2} points b^i $(i = 1, 2, \dots, C^2_{r+2})$ non R-isotropes de Ω, n'appartenant pas à une même $(r-1)$ - quadrique, qui ont le même cône R-isotrope π, ou bien qui ont une même sphère UNE de rayon R centrée en ces points.

3) Ω contient $C^2_{r+2} - 1$ points singuliers R-isotropes définissant une $(r - 1)$-quadrique unique confondue avec l'intersection de Ω avec la base.

Démonstration.

1) Soit b un point non R-isotrope quelconque de Ω :

$b = \lambda_i\, a^i$ (il y a sommation suivant i de 0, 1,... jusqu'à r)

$Q'(b, b) = \lambda_i\, \lambda_j\, \overline{Q'}\,(a^i, a^j) = (\lambda_i\, \lambda_j\; a^i\, P a^j)\mu$, où μ désigne la matrice indiquée dans la partie 1) de ce théorème.

$$bPb = (\lambda_i\, a^i)P\,(\lambda_j\, a^j) = \lambda_i\, \lambda_j\, (a^i\, P a^j)\, ;$$

$$\text{donc } \frac{Q'(b)}{bPb} M[\mu \neq (-\mathrm{tg}^2 R)P]$$

En appliquant le théorème 4.3.5., on voit que π est R-régulier.

2) Considérons un $(r+1)$-plan générateur φ de π. Soit x un point de φ tel que $x \bar{\in} \Omega$. Écartons l'un des points b^i, par exemple le dernier. Alors, avec les points b^i qui restent, on a $C^2_{r+2} - 1$ droites xb^i $(i=1,2,..., C^2_{r+2} - 1)$ qui définissent un r-cône du second degré ayant $C^2_{r+2} - 1$ génératrices R-isotropes. Ce r-cône est donc R-isotrope. En écartant successivement chaque point b^i, nous avons en tout C^2_{r+2} r-cônes R-isotropes de même sommet x. Ces r-cônes ne sont pas confondus parce que les C^2_{n+2} points donnés n'appartiennet pas à une même $(r-1)$-quadrique. Ceci ne pourra avoir lieu que si x est R-isotrope (d'ordre $r+1$) dans le plan φ. Comme x est un point quelconque de φ, en dehors de Ω, on conclut que φ est R-isotrope en chacun de ses points situés en dehors de Ω. Soit y un point fixe quelconque de Ω. La droite yx est R-isotrope, ce qui ne pourra arriver qui si y est un point R-isotrope (d'ordre $r+1$) de φ. Donc π est R-régulier.

Il reste à appliquer le théorème 4.3.2. pour achever la démonstration de cette partie du théorème 4.3.7.

3) prenons un point x de l'espace non situé sur Ω. D'après le lemme 1 (4.3.6.), le $(r+1)$—plan (x, Ω) est R-isotrope en tout point de la $(r-1)$-quadrique mentionnée. En faisant varier x, on voit que tout point de la (r—1)-quadrique est R-isotrope; en outre, ce point est singulier parce que la $(r-1)$-quadrique est située sur la base. Donc, d'appès le théorème 4.3.4., π est R-régulier

4.3.8. COROLLAIRE. *Si un r-plan Ω contient $C^2_{r+2}-1$ points singuliers R-isotropes définissant une (r—1)-quadrique unique confondue avec l'intersection de Ω avec la base, il sera le r-plan sommet d'un cône R-régulier.*

Démonstration. En effet, un raisonnement analogue à celui donné dans la démonstration de la troisième partie du théorème 4.3.7. montre que tous les points de la (r—1)-quadrique sont à la fois R-isotropes et singuliers. Soit a un point non singulier de Ω. Le cône R-isotrope en a doit contenir Ω parce que toute droite située dans Ω et passant par a contient deux points singuliers qui sont R-isotropes d'après le lemme 1 (4.3.6.). Soit b un autre point non singulier de Ω. La sphère *UNE* de centre b et de rayon R est confondue avec la sphère *UNE* de centre a et de rayon R (d'après la partie 2) du théorème 4.3.4.). Par suite, d'après le théorème 4.3.2., le cône R-isptrope en b coïncide aussi avec le cône R-isotrope en a. Comme b est un point arbitraire, non singulier de Ω, on voit que Ω est le lieu des points qui ont en commun un cône R-isotrope π et une sphère *UNE* de rayon R centrée en ces points. Cela veut dire que le r-plan donné Ω est le plan-sommet d'un cône R-régulier qui est justement π.

4.4. Exemples d'espaces UNE possédant des sous-espaces A et B:

4.4.1. Considérons les espaces *UNE* dont $Q(a)$ a la forme suivante:

$$Q(a) = \alpha(aPa)P + \beta PAP + \sum_{i=1}^{n} k_i U_i AU_i \tag{1}$$

10—2289

où $\alpha + \beta = 1$ et $U_i = u^0 u^i - u^i u^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $u^0, u^1, \ldots, u^n$ étant $n+1$ matrices-lignes (si la matrice donnée est placée à droite *dans un produit de deux telles matrices*) ou matrices-colones (si la matrice donnée est placée à gauche) donées.

Cherchons le lieu géométrique des points R-isotropes dans un tel espace UNE. D'après 2.4.4. (6), ce lieu est défini par l'équation suivante (où a est considéré comme inconnue):

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cup_i A \cup_i = 0 \tag{2}$$

ou
$$\sum_{i=1}^{n} k_i (a \cup_i x)^2 = 0 \ (\forall x) \tag{3}$$

ou
$$\sum_{i=1}^{n} k_i [a(u^0 u^i - u^i u^0 x]^2 = 0$$

ou
$$(au^0)^2 \sum_{i=1}^{n} k_i (u^i x)^2 + (u^0 x)^2 \sum_{i=1}^{n} k_i (au^i)^2 -$$
$$-2(au^0)(u^0 x) \sum_{i=1}^{n} k_i (u^i x)(au^i)] = 0 \tag{4}$$;

(4) doit être vérifiée par n'importe quel point x, ce qui exige que tous les coefficients de l'équation (4) soient nuls :

$$au^0 = 0$$
$$\sum_{i=1}^{m} k_i (au^i)^2 = 0 \tag{5}$$

Le système (5) montre que le lieu des points R-isotropes est une $(n-2)$ quadrique située dans le plan $xu^0 = 0$.

D'après la remarque 2) (4.2.5,), le plan $xu^0 = 0$ est un espace B à $n-1$ dimensions plongé dans notre espace UNE. Si $\beta = 0$, l'espace B précédent sera un espace NE.

4.4.2. L'exemple 3(2.3.3.) montre l'intérêt que présente une courbe rationnelle normale absolue. Cela nous suggère l'idée de construire des espaces UNE possédant une ou même plusieurs courbes absolues. Pour cela, étudions d'abord les conditions d'appartenance d'une courbe rationnelle normale à une quadrique. Les résultats de cette étude s'exprimeront par les lemmes 4.4.3. que nous nous bornons ici à les énoncer sans démonstration (on peut voir les démonstrations dans [11]).

Ci-dessous, nous écrirons les équations de la courbe rationnelle normale $x_i = t^i$ sous la forme matricielle $x = It$, x étant la matrice-colonne des coordonnées projectives du point x et t la matrice-colonne des puissances du paramètre t, de $t^0 = 1$, $t^1 = t, \ldots$ jusqu'à t^n.

Suivant le contexte, on reconnaîtra facilement le paramètre t et la matrice t.

4.4.3. **Lemme 1.** *Pour que la quadrique $xQx = 0$ de l'espace $P_n^{(i)}$ contienne la courbe $x = It$, il faut et il suffit que dans la matrice Q, la somme des éléments sur toute diagonale parallèle à la seconde diagonale (y compris celle-ci) soit nulle.*

Lemme 2. *Pour que la quadrique $xQx = 0$ contienne la courbe $x = It$, il faut et il suffit que Q soit décomposable en la demi-somme de deux matrices transposées S et S^T telles que $I_{-1}S$ soit une matrice antisymétrique bordée en haut (et par suite, à gauche) de zéros.*

Lemme 3. *Pour qu'une quadrique $xQx = 0$ contienne la courbe rationnelle normale $x = I_m t$, il faut et il suffit que Q soit décomposable d'une manière unique en la demi-somme de deux matrices transposées S et S^T telles que $I_{-1}S$ soit une matrice antisymétrique dans laquelle la ligne $n+1-m$ et la colonne $n+1-m$ sont remplies de zéros (les lignes et les colonnes étant numérotées de 0, 1, 2,..., jusqu'à n).*

Lemme 4. *Si une quadrique contient p courbes rationnelles normales:*

$$x = I_{m_q} t \quad (q = 1, 2, \ldots, p)$$

où

$$0 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_p \leqslant n,$$

alors elle contiendra une famille de génératrices curvilignes engendrant une p-surface degré $n+1-p$ ayant des $(p-1)$-plans générateurs. Chaque $(p-1)$-plan générateur est défini par p points correspondant à une même valeur du paramètre t (différente d'une racine $(n+1)$—ième de l'unité) sur les courbes $x = Im_q t$.

Lemme 5. *Pour qu'une quadrique $xQx = 0$ contienne $n+1$ (points de la courbe $x = It$ correspondant aux $n+1$) valeurs du paramètre t, égales respectivement aux racines $(n+1)$-ièmes de l'unité, il faut et il suffit que Q soit la demi-somme de deux matrices transposées S et S^T où S a la forme $I_1 U$ avec $U = -U^T$.*

Construisons maintenant une classe d'espaces UNE dans lesquels sont plongés des espaces R-isotropes de dimension m $(2 \leqslant m \leqslant n-1)$.

4.4.4. Considérons la classe d'espaces UNE définie par la matrice $Q(a)$ comme suit:

$$Q(a) = (-tg^2R - 1)(aPa)P + \frac{1}{\cos^2 R} PAP + \frac{1}{2}(SAS + S^T AS^T + UAV + VAU) \quad (6)$$

où R est un nombre réel ou imaginaire donné tel que $\mathrm{tg}^2 R$ soit réel, U-une matrice anti-symétrique d'ordre $n+1$ donnée et S, P, V des matrices définies à partir de U par les relations suivantes:

$$S = I_1 U$$

$$2P = S + S^T$$

$$V = I_1 S^T$$

On reconnaît ici la forme (2.5.2. (2)) en écrivant:

$$2(SAS + S^T AS^T) = (S + S^T) A (S + S^T) + (S - S^T) A (S - S^T)$$
$$2(UAV + VAU) = (U + V) A (U + V) - (U - V) A (U - V)$$

Posons: $$Q(a) = (-tg^2 R - 1)(aPa)P + \frac{1}{\cos^2 R} PAP + Q_o(a). \quad (6')$$

Cherchons le lieu géométrique des points R-isotropes de l'espace UNE défini par (6) et (6').

D'après (4) (2.4.2.), nous avons:

$$M_R(a) = -\sin^2 R\,(aPa)\,P - \cos^2 R \left[Q(a) - \frac{1}{\cos^2 R} PAP \right];$$

en remplacant ici $Q(a) - \dfrac{1}{\cos^2 R} PAP$ par $Q_0(a) - (1 + tg^2 R)(aPa)P$,

nous avons: $M_R(a) = -\cos^2 R\,[Q_0(a) - (aPa)P]$

Posons: $S'(a) = (SAS + VAU) - (aPa)S$

Alors: $S'^T(a) = (S^T A S^T + UAV) - (aPa)S^T$

et: $2M_R(a) = -\cos^2 R\,[S'(a) + S'^T(a)]$

Mais: $S = I_1 U$, $V = I_1 S^T$. Donc:

$$\begin{aligned} S'(a) &= (I_1 U)\,A\,(I_1 U) - (I_1 U I_{-1})\,AU - (aPa)\,I_1 U \\ &= I_1\,[U\,(AI_1 - I_{-1}A)\,U - (aPa)\,U] \\ &= I_1\,U'(a) \end{aligned}$$

avec: $U'(a) = U\,(AI_1 - I_{-1}A)\,U - (aPa)\,U$ **(7)**

On voit facilement que $U'^T(a) = -U'(a)$

et, par suite $I_{-1} S'(a) = U'(a) = -U'^T(a)$

Donc, d'après le lemme 5 (4.4.3.), appliqué à $-\dfrac{2}{\cos^2 R} M_R(a)$, on peut conclure que le cône R-isotrope en a passe par $n+1$ points de la courbe rationnelle normale $x = It$, correspondant aux $n+1$ valeurs du paramètre t, égales respectivement aux racines $(n+1)$ — ièmes de l'unité.

En appliquant ensuite la partie 4a) du théorème 2.4.5., on voit que ces $n+1$ points sont bien des points R-isotropes de notre espace. Comme

$$P = \frac{S + S^T}{2} \text{ et que } I_{-1} S = U$$

est antisymétrique, d'après aussi le lemme 5 (4.4.3.), la base $xPx = 0$ contient aussi les $n+1$ points précédents. Donc ces points sont à la fois R-isotropes et singuliers. De là résulte, d'après le corollaire 4.3.8., que toute droite joignant deux de ces points est l'arête — sommet d'un cône R-régulier. Notre espace possède donc C^2_{n+1} cônes R-réguliers ayant des arêtes — sommets joignant ces $n+1$ points deux à deux. Tous les 2-plans générateurs de ces cônes sont des 2-plans R-réguliers, c'est-à-dire des espaces B à deux dimensions plongés dans notre espace UNE.

Si $n = 2$, notre espace est un espace B parce qu'il contient $n + 1 = 3$ trois points R-isotropes singuliers.

Si $\cos^2 R = \infty$ ou $tg^2 R = -1$, alors les 2-plans totalement R-isotropes deviennent des 2-plans NE.

4.4.5. Revenons à l'exemple 4.4.4. et cherchons la condition nécessaire et suffisante qu'il faut imposer à U pour que tous les points de la courbe rationnelle normale $x=I_m t$ soient R-isotropes (et d'ailleurs singuliers). Il est démontré [11] que cette condition est la suivante: la ligne $n-m+1$ et la colonne $n-m+1$ de la matrice U sont remplies de zéros.

Maintenant pour que p courbes rationnelles normales $x=I_m t$ (q 1, 2,..., p) soient p courbes pleines des points R-isotropes singuliers (ou p courbes absolues dans le cas où R est infini imaginaire), il faut et il suffit que dans U il y ait p lignes (et par suite p colonnes) remplies de zéro.

D'après le lemme 4 (4.4.3.), dans ce cas, la base et tous les cônes R-isotropes contiennent une p-surface réglée $\mathcal{S}$ de degré $n+1-p$ et ayant des $(p-1)$ — plans générateurs.

Tout $(n-p)$ — plan coupe $\mathcal{S}$ en $n+1-p$ points. Donc si $n-p=2$ ou $p=n-2$, alors tout 2 — plan coupe $\mathcal{S}$ en trois points et, par conséquent tout 2 — plan sera un espace B à deux dimensions. Par suite, toute droite sera R-isotrope et tout l'espace sera un espace B (NE si R est infini imaginaire). Si $n-p=1$ ou $p=n-1$, alors $\mathcal{S}$ coupera toute droite projective en deux points (R—isotropes singuliers) et par suite la droite est R-isotrope. Donc l'espace est aussi un espace B ($\mathcal{S}$ est alors confondue avec la base).

4.4.6. **Remarque.** Cependant, p n'est pas le nombre maximum atteint par la dimension d'un sous-espace B plongé dans notre espace UNL, Ci-dessous est un exemple où cette dimension maximum est $p+1$:

$$U=-U^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2P=I_1U-UI_{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base est la quadrique: $xPx=x_0x_5-3x_1x_4+2x_2x_3=0$

Parce que dans U il y a deux lignes (et deux colonnes) remplies de zéros, la base et tous les cônes R-isotropes contiennent deux courbes rationnelles normales $x=It$ et $x=I_3t$. Cependant notre espace contient encore une infinité de sous-espaces A ou B à trois dimensions. En effet, ici la surface $\mathcal{S}$ dont l'équation s'écrit $x=uIt+vI_3t$ contient encore deux coniques non dégénérées:

$$x_0:x_1:x_2:x_3:x_4=1:t:t^2:0:0:0$$

$$\text{et } x_0:x_1:x_2:x_3:x_4=0:0:0:1:t:t^2$$

obtenues en faisant respectivement:

$$u:v=-1:t^3 \text{ et } u:v=t^3:-1.$$

Ces deux coniques sont situées respectivement dans les 2-plans

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0 \text{ et } x_0 = x_1 = x_2 = 0.$$

D'après le corollaire 4.3.8., ces 2-plans sont les 2-plans-sommets de deux cônes R-réguliers ayant des 3-plans générateurs R-géguliers.

Dans le cas général, si la p-surface $\mathcal{S}$ contient une (p—1)-quadrique non dégénérée, alors le p-plan de cette quadrique est le p-plan sommet d'un cône R-régulier et les $(p + 1)$-plans générateurs de ce cône sont des sous-espaces A ou B.

4.4.7. **Remarque.** Pour un cône, le fait d'être R-régulier n'est pas lié avec la dimension du plan-sommet mais est lié avec le nombre et la position des points R-isotropes singuliers sur ce plan-sommet. On peut donner des exemples où tout cône NE est ∞-régulier et des exemples où des cônes NE ayant un p-plan sommet ($p \geqslant 1$) ne sont pas ∞-réguliers.

Premier exemple.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} S = I_1 U,\ 2P = S + S^T \\ V = I_1 S^T \\ 2Q(a) = SAS - UAV + (SAS - UAV)^T \end{array}$$

Ici, le lieu des points absolus se compose de deux droites d $(x_0 = x_2 = 0)$ et d' $(x_1 = x_3 = 0)$. Par chaque point a de l'espace, il passe au moins une droite ab s'appuyant sur d et d'. Cette droite ab est l'arête-sommet d'un cône ∞-régulier (dégénéré en un ensemble de deux plans). Ainsi tout cône NE est ∞-régulier.

Deuxième exemple. La même matrice U que dans l'exemple précédent.

$$S = I_1 U,\ 2P = S + S^T,\ 2Q(a) = SAS + S^T A S^T + 2UAU$$

Le lieu des points absolus est la droite $d(x_1 = x^3 = 0)$. Le cône ∞-régulier ayant d comme arête-sommet dégénère en le faisceau de plans d'axe d. Tout autre cône NE est un ensemble de deux plans dont l'un d'eux contient d; ce plan est ∞-régulier mais l'autre ne l'est pas.

Troisième exemple. On reprend le deuxième exemple et ajoute $2VAV$ $(V = I_1 S^T)$ à l'expression de $Q(a)$. Cet espace n'a pas de points absolus et par suite n'a pas de cônes ∞-réguliers. Mais tout cône NE a une arête-sommet.

*
**

Pour terminer, signalons que dans cet article nous avons laissé de côté la question des espaces UNE où l'absolu local et le cône NE en chaque point sont permutables. Le premier exemple d'un tel espace UNE a été trouvé par Nguyễn-Cảnh-Toàn dans [3]. Dans [11], Nguyễn-Đăng-Phất a obtenu les premiers pas de généralisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] НГУЕН-КАНЬ-ТОАН (Nguyễn Cảnh Toàn), *Теория n-арных инволюций (автореферат докторской диссертации*. Москва 1963)

[2] NGUYEN CANH TOAN, *Les involutions n-aires*. Acta Scientiarum Vietnamicarum (Sectio Math. et Phys.). 1, (1964). 167-252.

[3] NGUYEN CANH TOAN, *Sur un espace riemannien à absolus locaux*, Acta Scient. Vietnam. (Sectio Math. et Phys.), 2 (1963), 5-42.

[4] NGUYEN CANH TOAN, *Sur quelques plans riemanniens à absolus locaux*, Acta Scient. Vietnam. (Sectio Math. et Phys.), 4-5 (1969), 27-39.

[5] NGUYEN CANH TOAN, *Les espaces riemanniens à absolu mobile et à hypercône géodésique*, Acta Scient. Vietnam. (Sectio Math. et Phys.), 4-5 (1969), 98-108.

[6] NGUYEN CANH TOAN, *Théorie des espaces riemanniens à absolu mobile*. « Communications individuelles » publié par le Congrès international des mathématiciens à Nice (France), Paris, 1971.

[7] NGUYEN CANH TOAN, *Sur les espaces riemanniens semisymétriques à absolu mobile*, Acta Scient. Vietnam. (Sectio Math. et Phys.), 6 (1970), 98-106.

[8] NGUYEN CANH TOAN, *Sur la structure d'espace projectif de l'ensemble des espaces à absolu mobile construits à partir d'une base donnée*, Acta Mathematica Vietnamica, 1, N^0 2, (1976), 75-88.

[9] NGUYEN DANG PHAT, *Compléments à la théorie des espaces riemanniens à absolu mobile* Acta Scient. Vietnam. (Sectio Math. et Phys.), 6 (1970), 111-119.

[10] НГУЕН ДАНГ ФАТ (NGUYEN DANG PHAT), *О симметрических пространствах с., переменный абсолютом* (препринт, Ханой, 1975).

[11] NGUYEN DANG PHAT, *Sur les espaces symétriques à absolu mobile* (Contribution à la théorie des espaces riemanniens à métrique projective définie par un absolu mobile). Prépublication, Institut Pedagogique Hanoi 1975.

[12] Яснсказ Е.У., *Полунеевклидовые и полуевклидовые пространства*. ДАН, СССР, 137 (1961), 1327-1330.

[13] Яглом И.М., Розенфельд Б.А.. Ясинская Е.У., *Проективные метрики* УМН. 19, вып 5 (119) (1964), 51-113.

[14] Б.А, Розенфельд, *Неэвклидовые пространства*. Москва, 1955.

Manuscrit reçu le 8 Août 1986

INSTITUT PÉDAGOGIQUE DE HANOI