ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
vol. 13 No 1 (1988)

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИГРАХ СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ. II.

ФАН ЗУЙ ХАЙ

В [1,2] были изучены дискретные игры преследования одного убегающего несколькими преследователями с геометрическими на управления.

В настоящей работе рассматривается новые эффективные методы поимка в линейных дискретных играх многих лиц с интегральными ограничениями на управления. Получаются достаточные условия завершения игры за конечное число шагов. Статья примыкает к статьям [1—3].

1. Пусть движения векторов $z_i \in R^n$, $i = 1,2,..., m$ описываются системами разностных уравнений

$$z_i(k+1) = A_i z_i(k) + B_i u_i(k) - C_i v(k);\ z_i(0) = z_i^o, \tag{1}$$

где $k = 0,1,...$ — номер шага; A_i, B_i, C_i — соответственно постоянные матрицы размерности $n \times n$, $p \times n$, $q \times n$. Управления $u_i(k) \in R^p$, $v(k) \in R^q$ удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| u_i(k) \|^2 \leqslant \rho_i^2;\ \sum_{k=0}^{\infty} \| v(k) \|^2 \leqslant б^2, \tag{2}$$

где $б > 0$, $\rho_i > 0$, $i = 1, 2,..., m$. В R^n заданы терминальные множеств $M_i ,..., M_m$, где $M_i = M_i^1 + M_i^2$, M_i^1 — линейное подпространство пространства R^n, M_i^2 — выпуклый компакт в L_i^1, L_i^1 — ортогоналное дополнение к подпространству M_i^1 в R^n.

Пусть $N_i(s)$, $i = 1,2,..., m$, $s = 0,1,...$ — данные множества такие что $N_i(s) \subset \{0,1,..., S\}$

Пусть $\dim L_i = \tau_i$. В L_i возьмём некоторый базис. Тогда оператору ортогонального проектирования из R^n на L_i соответствует некоторая матрица размера $\tau_i \times n$, которая обозначается через π_i.

$i = 1..., m$. При каждый $K = 0, 1,..,$ положим

$$\Delta_1^i(K) = \{k : 0 \leqslant k \leqslant K,\ N_i(k) \neq \phi\} : \Delta_2^i(K) = \{0, 1..., K\} \setminus \Delta_1^i(K),$$

$$\Delta_3^i(K) = \bigcup_{s \in \Delta_1^i(K)} N_i(S_i)\,;\ \Delta_4^i(K) = \{0,\ 1,\dots,\ K\} \setminus \Delta_3^i(K).$$

Пусть $\Delta_1^i(K) \neq \phi$. Тогда упорядочим элементы множеств $\Delta_1^i(K)$ и $\Delta_3^i(K)$ по возрастанию

$$\Delta_1^i(K) = \{S_1^i, S_2^i, \dots, S^i_{|\Delta_1^i(K)|}\};\quad \Delta_3^i(K) = \{\tau_1^i, \tau_2^i, \dots, \tau^i_{\Delta_3^i(K)}\},$$

причем $S_1^i < S_2^i < \dots < S^i_{|\Delta_1^i(K)|}$; $\tau_1^i < \dots \tau_2^i < \dots < \tau^i_{|\Delta_3^i(K)|}$,

где через $|\Delta^i(K)|$, $|\Delta_3^i(K)|$ соответственно обозначим количество элементов множеств $\Delta_1^i(K)$ и $\Delta_3^i(K)$.

Будем говорить, что игра преследования с многими участниками (1), (2) из начального состояния $Z_0 = (Z_1^0, \dots, Z_m^0)$ заканчивается за K_1 шагов, если при любом управлении $\overline{v}(i)$, $i = 0,1, \dots, K_1 - 1$

$$\sum_{i=0}^{K_1-1} \|\overline{v}(i)\|^2 \leqslant б^2,$$

можно построить управления $u_i(k)$, $i = 1, \dots, m$, $k = 0,1, \dots, K_1 - 1$

$$\sum_{k=0}^{1-1} \|\overline{u}_i(k)\|^2 \leqslant \rho_i^2,\ i = 1, \dots, m,$$

такие, что существует такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что

$$Z_j(K_1) = A_j^{K_1} Z_j^0 - \sum_{k=0}^{K_1-1} A_j^{K_1-1-k} B_j(k)\overline{u}_j(k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{K_1-1} A_j^{K_1-1-k} C_j(k)\overline{v}(k) \in M_j.$$

При этом для нахождения значения $u_i(k)$ параметра u_i в каждый шаг k, $k = 0,1, \dots, K_1 - 1$ разрешается использовать значения Z_i^0 и $v(s)$ при всех s таких, что $s \in N_i(k)$, $i = 1, \dots, m$.

Пусть $K > 0$ — целое число, $\Omega(K) \subset \{0,1, \dots, K-1\}$ — подмножество множества $\{0,1, \dots, K-1\}$ и ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant б$ — данное число. Тогда введем в рассмотрение множество

$$L(K, \Omega(K), \varepsilon) = \left\{ (v(0),\ v(1), \dots, v(K-1)) : \begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{K-1} \|v(i)\|^2 \leqslant б^2 \\ \sum\limits_{s \in \Omega(K)} \|v(s)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \end{array} \right\} \qquad (3)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Существуют положительные целые числа* K_i, *управления* i *-ого преследователя* $u_i^*(k)$, $k \in \Delta_1^i(K)$ *и векторы* $\omega_i(k)$, $k \in \Delta_1^i(K_i)$, $i = 1,\dots,m$, *такие, что*

$$\text{а)} \quad \sum_{k \in \Delta_2^i(K_i)} \| u_i^*(k) \|^2 \leqslant \rho_i^2,\ i = 1,\dots, m,$$

$$\text{б)} \quad \sum_{k \in \Delta_1^i(K_i)} \| \omega_i(k) \|^2 \leqslant \tilde{\rho}_i^2 = \rho_i^2 - \sum_{k \in \Delta_2^i(K_i)} \| u_i^*(k) \|^2,\ i = 1,\dots, m,$$

$$b)\ \pi_i A_i^{K_i} Z_i^0 - \sum_{k \in \Delta_2^i(K)} \pi_i A_i^{K_i - 1 - k} B_i(k)\, u_i^*(k) -$$

$$- \sum_{k \in \Delta_2^i(K_i)} \pi_i A_i^{K_i - 1 - k} B_i(k)\, \omega_i(k) \in M_i^2 \underline{\ *\ } H_i(K_i);\ i = 1,\dots, m.$$

где

$$H_i(K) = \left\{ \sum_{k \in \Delta_4^i(k)} \pi_i A_i^{K-1-k} C_i(k) v(k) : \sum_{k \in \Delta_4^i(K)} \| v(k) \|^2 \leqslant б^2 \right\},\ i = 1,\dots, m.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. *Существуют матрицы* $\varphi_i(K_i)$, $i = 1,\dots, m$

$$\varphi_i(K_i) = \begin{pmatrix} \gamma_{K_i}(S_1^i, \tau_1^i)\ \gamma_{K_i}(S_2^i, \tau_1^i) \dots \gamma_{K_i}(S^i_{|\Delta_1^i(K_i)|}, \tau_1^i) \\ \gamma_{K_i}(S_1^i, \tau_2^i)\ \gamma_{K_i}(S_2^i, \tau_2^i) \dots \gamma_{K_i}(S^i_{|\Delta_1^i(K_i)|}, \tau_2^i) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{K_i}(S_1^i, \tau^i_{|\Delta_3^i(K_i)|})\ \gamma_{K_i}(S_2^i, \tau^i_{|\Delta_3^i(K_i)|}) \dots \gamma_{K_i}(S^i_{|\Delta_1^i(K_i)|}, \tau^i_{|\Delta_3^i(K_i)|}) \end{pmatrix}$$

размера $|\Delta_3^i(K_i)| \times |\Delta_1^i(K_i)|$ *со свойствами* :

а) $\gamma_{K_i}(S_k^i, \tau_j^i) = 0$ *если* $\tau_j^i \notin N(S_k^i)$, $k = 1,\dots,|\Delta_1^i(K_i)|$,

$j = 1,\dots,|\Delta_3^i(K_i)|$,

б) $\sum_{k=1}^{|\Delta_1^i(K_i)|} \gamma_{K_i}(S_k^i, \tau_j^i) = 1$ *при всех* $j = 1,\dots,|\Delta_3^i(K_i)|$; $i = 1,\dots, m$,

в) Сутествуют линейные отображения $F_{\varphi_i(K_i)}(S_k^i, \tau_j^i)$, $k = 1,\dots,|\Delta_1^i(K_i)|$,

$j = 1,\dots,|\Delta_3^i(K_i)|$ *из* R^q *в* R^p *такие, что*

1в. $F_{\varphi_i(K_i)}(S_k^i, \tau_j^i) = \theta$ *если* $\tau_j^i \notin N(S_k^i)$, $k = 1,\dots,|\Delta_1^i(K_i)|$,

$j = 1,\ldots,|\triangle^i_3(K_i)|$, $i = 1,\ldots, m$, *где* θ — *нулевое отображение,*

2в. При всех $k = 1,\ldots,|\Delta^i_1(K_i)|$ *имеет место следующее*

$$\pi_i A_i^{K_i-1-S^i_k} B_i(S^i_k) F_{\varphi_i(K_i)}(S^i_k, \tau^j_k) = \gamma_{K_i}(S^i_k, \tau^i_j)\pi_i A_i^{K_i-1-\tau^i_j} C_i(\tau^i_j),$$

$$j = 1,\ldots,|\triangle^i_3(K_i)|;\ i = 1,\ldots, m.$$

Пусть $\Omega^*_i(K_i) \subset \{0, 1,\ldots, K_i - 1\}$, $i = 1,\ldots, m$ — заданные множества такие что.

$$\Omega^*_i(K_i) \wedge \Omega^*_j(K_j) = \varnothing \text{ при всех } i \neq j, \quad i, j = 1,\ldots, m.$$

Положим

$$\chi^2_i(K_i, \varepsilon_i) = \sup_{(v(o),\ldots, v(K_i-1)) \in L(K_i, \Omega^*_i(K_i), \varepsilon_i)} \sum_{k=1}^{|\Delta^i_1(K_i)|} \Big\| \omega_i(S^i_k) + \sum_{\tau^i_j \in N(S^i_k)} F_{\varphi_i(K_i)}(S^i_k, \tau^i_j)\, v(\tau_j) \Big\|^2,$$

$$E_i(K_i) = \{ \varepsilon_i : 0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant б, \chi_i(K_i, \varepsilon_i) > \widetilde{\rho_i} \},\ i = 1,\ldots, m$$

$$б_i(K_i) = \begin{cases} \inf E_i(K_i) & \text{, если } E_i(K_i) \neq \varnothing \\ +\infty & \text{, если } E_i(K_i) = \varnothing \end{cases}$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.

$$\sum_{i=1}^{m} б^2_i(K_i) > б^2$$

ТЕОРЕМА *I. Пусть выполнены предположения 1 — 3. Тогда преследование в дискретной игре (1) — (2) из начального состояния* $Z_0 = (Z^0_1, \ldots, Z^0_m)$ *заканчивается за* K^* *шагов, где* $K^* \leqslant K_0 = max\{K_1, \ldots, K_m\}$.

Доказательство. Пусть $\overline{v}(k)$, $k = 0,\ldots, K_0 - 1$ — любое допустимое управление убегающего объекта, т.е.

$$\sum_{k=0}^{K_0-1} \|\overline{v}(k)\|^2 \leqslant б^2$$

Будем доказать, что существует такой номер p, $1 \leqslant p \leqslant m$, что

$$\sum_{j=1}^{|\Delta^p_1(K_p)|} \Big\| \omega_p(S^p_j) + \sum_{\tau^p_k \in N(S^p_k)} F_{\varphi_p(K_p)}(S^p_j, \tau^p_k)\, \overline{v}\tau(^p_k) \Big\|^2 \leqslant \rho^2_p. \qquad (4)$$

Допустим противное, т.е. при всех $i = 1,..., m$ имеем

$$\sum_{j=1}^{\left|\Delta_1^i(K)_i\right|} \left\| \omega_i(S_j^i) + \sum_{\tau_j^i \in N\, S_j^i)} F_{\varphi_i(K_i)}(S_j^i, \tau_k^i)\, \bar{v}(\tau_k^i) \right\|^2 > \tilde{\rho}_i^2. \qquad (5)$$

Сначала докажем, что при всех $i = 1,..., m$ имеем

$$\sum_{k \in \Omega_i^*(K_i)} \| \bar{v}(k) \|^2 \geqslant б_i^2(K_i) \qquad (6)$$

В самом деле, при всех $i = 1, ..., m,$ положим

$$(\varepsilon_i^*)^2 = \sum_{k \in \Omega_i^*(K_i)} \| \bar{v}\ (k) \|^2$$

Тогда из определения (3) следует, что

$$(\bar{v}(0),..., \bar{v}(K_i - 1)) \in L\ (K_i,\ \Omega_i^*(K_i),\ \varepsilon_i^*).$$

С другой стороны, из определения $\chi_i(K_i, \varepsilon_i^*)$ имеет место следующее неравенство

$$\chi_i^2(K_i, \varepsilon_i^*) \geqslant \sum_{j=1}^{|\Delta_1^i(K_i)|} \left\| \omega_i(S_j^i) + \sum_{\tau_k^i \in N(S_j^i)} F_{\varphi_i(K_i)}(S_j^i, \tau_k^i)\, \bar{v}(\tau_k^i) \right\|^2.$$

Из (2б) следует, что

$$\chi_i^2(K, \varepsilon_i^*) > \tilde{\rho}_i^2.$$

А это значит, что $\varepsilon_i^* \in E_i(K_i)$, т.е. $(\varepsilon_i)^2 \geqslant б_i^2(K_i)$. Таким образом, неравенство (6) доказано.

Из непересечения множеств $\Omega_i^*(K_i)$, $i = 1,...,m$, имеем

$$\sum_{k=0}^{K_0 - 1} \| \bar{v}(k) \|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{S \in \Omega_i^*(K_i)} \| \bar{v}(S) \|^2 \right] \geqslant \sum_{i=1}^{m} б_i^2(K_i)$$

Таким образом, из предположения 3 следует, что

$$\sum_{k=1}^{K_0 - 1} \| \bar{v}(k) \|^2 > б^2.$$

Это невозможно и требуемое утверждение доказано

Управления $u\ (j)$, $j = 0,1,..., K_{p-1}$, P —ого преследователя определяются следующим образом

$$\bar{u}_p(j) = \begin{cases} u_p^*(j), \text{ если } j \in \Delta_2^p\ (K_p), \\ \omega_p(S_k^P) + \sum\limits_{\tau_h^p \in N(S_k^P)} F_{\varphi_p(K_p)}(S_k^P, \tau_h^P)\bar{v}\ (\tau_k^p), \text{ если } \quad j = S^P. \end{cases}$$

Из (2) следует, что

$$\sum_{j=0}^{K_p-1} \| \bar{u}_p(j) \|^2 = \sum_{k=1}^{|\Delta_1^p(K_p)|} \left\| \omega_p(S_k^p) + \sum_{\tau_h^p \in N(S_k^p)} F_{\varphi_p(K_p)}(S_k^p, \tau_h^p)\, \bar{v}(\tau_h^p) \right\|^2 +$$

$$+ \sum_{j \in \Delta_2^p(K_p)} \| u_p^*(j) \|^2 \leqslant \sum_{j \in \Delta_2^p(K_p)} \| u_p^*(j) \|^2 + \tilde{\rho}_p^2 = \rho_p^2 .$$

А это значит, что $u_p(k)$, $k = 0, 1, \ldots, K_p - 1$ — допустимые. Предположения I показывает, что существует такой вектор $\alpha_p \in M_p^2$, что

$$\pi_p A_p^{K_p} z_0 - \sum_{k \in \Delta_2^p(K_p)} \pi_p A_p^{K_p - 1 - k} B_p(k) u_p^*(k) -$$

$$- \sum_{k \in \Delta_1^p(K_p)} \pi_p A_p^{K_p - 1 - k} B_p(k)\, w_p(k) = \alpha_p - \sum_{k \in \Delta_4^p(K_p)} \pi_p A_p^{K_p - 1 - k} C_p(k)\, \bar{v}(k). \qquad (7)$$

$$\pi_p z_p(K_p) = \pi_p A_p^{K_p} z_p^0 - \sum_{i=0}^{K_p - 1} \pi_p A_p^{K_p - 1 - i} B_p(i)\, \bar{u}_p(i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{K_p - 1} \pi_p A_p^{K_p - 1 - i} C_p(i)\, \bar{v}(i) = \pi_p A_p^{K_p} z_0 -$$

$$- \sum_{k \in \Delta_2^p(K_p)} \pi_p A_p^{K_p - 1 - k} B_p(k)\, u_p^*(k) - \sum_{k=1}^{|\Delta_1^p(K_p)|} \pi_p A_p^{K_p - 1 - S_k^p} B_p(S_k^p)\, \bar{u}(S_k^p) +$$

$$+ \sum_{k \in \Delta_4^p(K_p)} \pi_p A_p^{K_p - 1 - k} C_p(k)\, \bar{v}(k) + \sum_{j=1}^{|\Delta_3^p(K_p)|} \pi_p A_p^{K_p - 1 - \tau_j^p} C_p(\tau_j^p)\, \bar{v}(\tau_j^p) =$$

$$= \pi_p A_p^{K_p} z_p^0 - \sum_{k \in \Delta_2^p(k_p)} \pi_p A_p^{K_p - 1 - k} B_p(k)\, u_p^*(k) - \sum_{k \in \Delta_1^p(k_p)} \pi_p A_p^{K_p - 1 - k} B_p(k)\, w_p(k) -$$

$$- \sum_{k=1}^{|\Delta_1^p(K)|} \left(\sum_{\tau_h^p \in N(S_k^p)} \pi_p A_p^{K_p - 1 - S_k^p} B_p(S_k^p) F_{\varphi_p(K_p)}(S_k^p, \tau_h^p)\, \bar{v}(\tau_h^p) \right) +$$

$$+ \sum_{k \in \Delta_4^p(K_p)} \pi_p A_p^{K_p - 1 - k} C_p(k)\, \bar{v}(k) + \sum_{j=1}^{|\Delta_3^p(K_p)|} \pi_p A_p^{K_p - 1 - \tau_j^p} C_p(\tau_j^p)\, \bar{v}(\tau_j^p). \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\pi_p Z_p(K_p) = \alpha_p + \sum_{j=1}^{|\Delta_3^p(K_p)|} \pi_p A_p^{K_p-1-\tau_j^p} C_p(\tau_j^p)\,\bar v(\tau_j^p) -$$

$$-\sum_{k=1}^{|\Delta_1^p(K_p)|}\left[\sum_{\tau_h^p \in N(S_k^p)} \pi_p A_p^{K_p-1-S_k^p} F_{\varphi_p(K_p)}(S_k^p,\ \tau_h^p)\,\bar v(\tau_h^p)\right]. \qquad (9)$$

Из свойств матрицы $\varphi_p(K_p)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{|\Delta_1^p(K_p)|}\left(\sum_{\tau_h^p \in N(S_k^p)} \pi_p A_p^{K_p-1S_k^p} B_p(S_k^p)\, F_{\varphi_p(K_p)}(S_k^p,\ \tau_h^p)\,\bar v(\tau_h^p)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{|\Delta_1^p(K_p)|}\left\{\sum_{\tau_h^p \in N(S_k^p)} \gamma_{K_p}(S_k^p, \tau_h^p)\,\pi_p A_p^{K_p-1-\tau_h^p} C_p(\tau_h^p)\,\bar v(\tau_h^p)\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{|\Delta_1^p(K_p)|}\ \sum_{h=1}^{|\Delta_3^p(K_p)|} \gamma_{K_p}(S_k^p, \tau_h^p)\,\pi_p A_p^{K_p-1-\tau_h^p} C_p(\tau_h^p)\,\bar v(\tau_h^p) =$$

$$= \sum_{h=1}^{|\Delta_3^p(K_p)|}\left[\sum_{k=1}^{|\Delta_1^p(K_p)|} \gamma_{K_p}(S_k^p,\ \tau_h^p)\right]\pi_p A_p^{K_p-1-\tau_h^p} C_p(\tau_h^p)\,\bar v(\tau_h^p) =$$

$$= \sum_{h=1}^{|\Delta_3^p(K_p)|} \pi_p A_p^{K_p-1-\tau_h^p} C_p(\tau_h^p)\,\bar v(\tau_h^p). \quad (10)$$

Теперь из (8) и (10) имеем $\pi_p Z_p(K_p = \alpha_p \in M_p^2$. А это значит, что $Z_p(K_p) \in M_p$.

Теорема доказана.

2. Теперь полученный в теория 1 результат сформулируется для специальных видов системы (1), (2) и множеств $N_i(S)$.

Рассматривается сначала случай, когда $m = 1$, т.е. рассматривается дискретная игра преследования одного убегающего одним преследователям.

Пусть движение вектора $z \in R^n$ описывается системой разностных уравнений $z(k+1) = Az(k) - B(k)\,u(k) + C(k)v(k)$; $z(0) = z_0$. (11)

Управления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| u(k)\|^2 \leqslant \rho^2; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \| v(k)\|^2 \leqslant 6^2. \qquad (12)$$

Терминальное множество $M = M_1 + M_2$, множества $N(s)$, $\Delta_i(K)$, $i = 1, 2, 3, 4$, матрица π определяются как и в пункте I. Из теоремы I получаем.

Следствие I. Пусть $K_1 > 0$ — целое число такое, что

1. $M_2 \underline{*}\ H(K_1) \neq \phi$, где

$$H(K_1) = \left\{ \sum_{k \in \Delta_4(K_1)} \pi A^{K_1 - 1 - k} C(k)\, v(k) : \sum_{k \in \Delta_4(K_1)} \| v(k) \|^2 \leqslant б^2 \right\},$$

2. Существует матрица $\varphi(K_1)$

$$\varphi(K_1) = \begin{pmatrix} \gamma_{K_1}(S_1, \tau_1)\ \gamma_{K_1}(S_2, \tau_1) \ldots\ldots \gamma_{K_1}(S_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_{K_1}(S_1, \tau_{|\Delta_3(K_1)|})\ \gamma_{K_1}(S_2, \tau_{|\Delta_3(K_1)|}) \ldots \gamma_{K_1}(S_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_{|\Delta_3(K_1)|}) \end{pmatrix}$$

размера $|\Delta_3(K_1)| \times |\Delta_1(K_1)|$ *со свойствами:*

2а. $\gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) = 0$, *если* $\tau_j \notin N(S_i)$,

2б. $$\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) = 1 \text{ при всех } j = 1, \ldots, |\Delta_3(K_1)|$$

2в. Существуют линейные отображения $F_{\varphi(K_1)}(Si, \tau j)$, $i = 1, \ldots, |\Delta_1(K_1)|$

$j = 1, \ldots, |\Delta_3(K_1)|$ из R^q в R^p такие, что

1. $F_{\varphi(K_1)}(S_i, \tau_j) = \theta$ если $\tau_j \notin N(S_i)$, $i = 1, \ldots, |\Delta_1(K_1)|$, $j = 1, \ldots, |\Delta_3(K_1)|$ где θ — нулевое отображение.

2. $$\pi A^{K_1 - 1 - S_i} B(S_i)\, F_{\varphi(K_1)}(S_i, \tau_j) = \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) \pi A^{K_1 - 1 - \tau_j} C(\tau_j),$$

при всех $\tau_j \in N(S_i)$, $i = 1, \ldots, |\Delta_1(K_1)|$.

3. Существует управления $u^*(i)$, $i \in \Delta_2(K_1)$ такие, что

3а. $$\sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \| u^*(i) \|^2 \leqslant \rho^2,$$

3б. $$\chi^2(K_1) = \sup \sum_{j=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left(\Big\| \sum_{\tau_k \in N(S_j)} F_{\varphi(K_1)}(S_j, \tau_k) v(\tau_k) \Big\|^2 \right) \leqslant \tilde{\rho}^2,$$

$$\sum_{i=0}^{K_1 - 1} \| v(i) \|^2 \leqslant б^2$$

где

$$\tilde{\rho}^2 = \rho^2 - \sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \| u^*(i) \|^2,$$

3в.

$$\pi A^{K_1} z_0 - \sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \pi A^{K_1 - 1 - i} B(i)\, u^*(i) \in G(K_1) + (M_2 \underline{*} H(K_1)),$$

где

$$G(K_1) = \left\{ \sum_{i \in \Delta_1(K_1)} \pi A^{K_1 - 1 - i} B(i)\, \omega(i) : \sum_{i \in \Delta_1(K_1)} \| \omega(i) \|^2 \leqslant (\tilde{\rho} - \chi(K_1))^2 \right\}.$$

Тогда преследование в линейной дискретной игре (11) — (12) из начальной точки $Z_0 \notin M$ заканчивается за K_1 шагов.

Доказательство. В этом случае имеем $\Omega^*(K_1) = \{0, 1, \ldots, K_1 - 1\}$. Из за следует, что существуют векторы $\omega^*(i), i \in \Delta_1(K_1)$ такие, что

1)
$$\sum_{i \in \Delta_1(K_1)} \| \omega^*(i) \|^2 \leqslant (\tilde{\rho} - \chi(K_1))^2,$$

2)
$$\pi A^{K_1} z_0 - \sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \pi A^{K_1 - 1 - i} B(i) u^*(i) -$$
$$- \sum_{i \in \Delta_1(K_1)} \pi A^{K_1 - 1 - i} B(i) \omega^*(i) \in M_2 \overset{*}{-} H(K_1).$$

Отсюда из 2а, 2б, 2в следует, что предположение теоремы I выполнено.

При всех $\varepsilon, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant б$, имеем

$$L(K, \Omega^*(K_1), \varepsilon) = \left\{ (v(0), \ldots, v(K_1 - 1)) : \sum_{i=0}^{K_1 - 1} \| v(i) \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \right\}.$$

А это значит, что

$$\chi^2(K_1 \varepsilon) = \sup_{(\bar{v}(0), \ldots, \bar{v}(K_1 - 1)) \in L(K_1, \Omega^*(K_1), \varepsilon)} \sum_{j=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \omega^*(s_j) + \sum_{\tau_i \in N(s_j)} F_{\varphi(K_1)}(s_j, \tau_i) \bar{v}(\tau_i) \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\sum_{i=0}^{K_1 - 1} \|\bar{v}(i)\|^2 \leqslant б^2} \sum_{j=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \omega^*(s_j) + \sum_{\tau_i \in N(s_j)} F_{\varphi(K_1)}(s_j, \tau_j) \bar{v}(\tau_i) \right\|^2$$

Из неравенства Минковского имеем

$$\left(\sum_{j=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \omega^*(S_j) + \sum_{\tau_i \in N(S_j)} F_{\varphi(K_1)}(S_j, \tau_i) \bar{v}(\tau_i) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \| \omega^*(S_j) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \sum_{\tau_i \in N(S_j)} F_{\varphi(K_1)}(S_j, \tau_i) \bar{v}(\tau_i) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из (13), (14) следует, что

$$\chi(K_1, \varepsilon) \leqslant \left(\operatorname{Sup}_{\sum_{i=1}^{K_1 - 1} \|\bar{v}(i)\|^2 \leqslant б^2} \sum_{j=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \| \omega^*(S_j) + \sum_{\tau_i \in N(S_j)} F_{\varphi(K_1)}(S_j, \tau_i) \bar{v}(\tau_i) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \| \omega^*(S_j) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sup_{\sum_{i=0}^{K_1-1} \| \bar{v}(i) \|^2 \leqslant \sigma^2} \sum_{j=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \sum_{\tau_i \in N(S_j)} F_{\varphi(K_1)}(S_j, \tau_i) \bar{v}(\tau_i) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\rho} - \chi(K_1) + \chi(K_1) = \tilde{\rho}.$$

А это значит, что при всех ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \sigma$ имеем $\chi^2(K_1, \varepsilon) \leqslant \tilde{\rho}^2$, т.е. $E(K_1) = \phi$, поэтому $б(K_1) = +\infty$. Таким образом предположение 3 Теоремы 1 выполнено. Конечно предположение 2 Теоремы 1 так же выполнено. Следствие доказано.

Следует заметить, что предположение об информации, используемое нами, является достаточно общим. Такой вид информации включает в себе как частный случай полную и неполную информацию, а также информацию с запаздыванием. Теперь рассматривается случай, когда информация является полной, т.е. $N_i(S) = \{S\}$ при всех $S = 0, 1, \ldots,$ $i = 1, \ldots, m.$ поэтому $\Delta_1^i(K) = \Delta_3^i(K) = \{0, \ldots, K-1\}$, $\Delta_2^i(K) = \Delta_4^i(K) = \phi$ при всех $i = 1, \ldots, m$. Изглается частная форма Теоремы 1, которая полезна для исследования конкретных игр преследования с многими участниками.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. *Существуют положительныо целые числа* K_i, *и векторы* $\omega_i(k)$, $k = 0, \ldots, K_i - 1$, $i = 1, \ldots, m$ *такие, что*

а/ $$\sum_{k=0}^{K_i-1} \| \omega_i(k) \|^2 \leqslant \rho_i^2, \quad i = 1, \ldots, m,$$

б/ $$\pi_i A_i^{K_i} Z_i^0 - \sum_{k=0}^{K_i-1} \pi_i A_i^{K_i-1-k} B_i(k)\, \omega_i(k) \in M_i^2, \quad i = 1, \ldots, m.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5. *Существуют линейные отображения* $F_i(k)$, $k = 0, \ldots, K_i - 1$, $i = 1, \ldots, m$ из R^q в R^p *такие, что*

$$\pi_i A_i^{K_i-1-k} B_i(k) F_i(k) = \pi_i A_i^{K_i-1-k} C_i(k) \text{ при всех } k = 0, \ldots, K_i - 1;$$
$i = 1, \ldots m.$

Введем в рассмотрение множества и величины

$$\gamma_i^2(K_i, \varepsilon_i) = \sup_{(v(0), \ldots, v(K_i-1)) \in L(K_i, \Omega_i^*(K_i), \varepsilon_i)} \sum_{j=0}^{K_i-1} \| \omega_i(j) + F_i(j)\, v(j) \|^2, \quad i = 1, \ldots m$$

$$\bar{E}_i(K_i = \{\varepsilon_i : \quad 0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant б, \quad \gamma_i(K_i, \varepsilon_i) > \rho_i\}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\bar{б}_i K_i) = \begin{cases} \inf \bar{E}_i(K_i) & \text{, если } \bar{E}_i(K_i) \neq \varnothing \\ +\infty & \text{, если } \bar{E}_i(K_i) = \varnothing;\ i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 6.

$$\sum_{i=1}^{m-2} б\, i\, (K_i) > б^2 .$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть выполнены предположения 4—6. Тогда преследование в дискретной игре преследования (1, 2) из начального состояния $z_0 = (Z_1^0, \ldots, z_m^0)$ заканчивается за K^* шагов, где $K^* \leqslant K_0 = \max(K_1, \ldots, K_m)$.*

В [6] была изучена такая игра преследования многих лиц. Пусть игра описывается системой разностных уравнений

$$z_i(k+1) = C_i\, z_i(k) - u_i(k) + v(k)\,;\; z_i(0) = z_i^0; \tag{13}$$

где $z_i \in R_n$, $i = 1, \ldots, m$, C_i — матрицы порядка n, причём при всех $i = 1, \ldots, m$, C_i — треугольная матрица и её элементы $C_{jj}^{(i)}$ удовлетворяют следующим условиям

$$\left|C_{jj}^{(i)}\right| < 1,\; j = 1, \ldots, m$$

Управления $u_i(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| u_i(k) \|^2 \leqslant \rho_i^2\,; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \| v(k) \|^2 \leqslant б^2\,;\; i = 1, \ldots; m. \tag{14}$$

Будем говорить, что в дискретной игре (13) — (14) из начального состояния $z_o = z(_1^o, \ldots, z_m^o)$, где $z_i^o \neq 0$ при всех $i = 1, \ldots, m$, заканчивается за K_1 шагов, если существует такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что

$$z_j(K_1) = C_j^{K_1} z_j^o - \sum_{k=o}^{K_1-1} C_j^{K_1-1-k}\, \overline{u}_j(k) + \sum_{k=o}^{K_1-1} C_j^{K_1-1-k}\, \overline{v}_j(k) = 0.$$

При этом для нахождения значения $u_i(k)$ параметра u_i в каждый шаг k, $k = 0, \ldots, K_1 - 1$ разрешается использовать значения z_i^o и $v(k)$.

В [6] доказана следующая

ЛЕММА I. *Пуств С—треугольная матрица поряка* n *и её элементы удовлетворяют следующим условиям*

$$| C_{jj} | < 1,\; j = 1, \ldots, n.$$

Тогда в управляемой системе

$$z(k+1) = Cz(k) - \omega(k)\,;\; z(0) = z_0,$$

$$\sum_{k=o}^{\infty} \| \omega(k) \|^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

где $\varepsilon > 0$—любое данное число, возможно приведение вектора z из любого началь ного со стояния $z_0 \neq 0$ в 0 за конечное число шагоз.

Как видно, что из леммы I и теоремы I получаем следующий результат в [6].

СЛЕДСТВИЕ 3/ см. [6] /. *Пусть* $\rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2 > б^2$

Тогда преследование в дискретной иерге (13) — (14) из начального состояния $z_0 = (z_1^o, \ldots, z_m^o)$ заканчивается за конечное число шагов.

Доказательство аналогично доказательству теоремы I в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фан Зуй Хай, *О задаче преследование несколькими объектами в линейной дискретной игре*, ДАН АзССР, 39 (1983), №1, 10 — 14.
2. Фан Зуй Хай, *Некоторые методы преследования в линейных дискретных играх со многими участниками.* 1. Acta Mathematica Vietnamica, 12 (1987), 73 — 92.
3. Фан Зуй Хай и Динь Ши Дай, *О задачах преследования несколькими объектами в некоторых классах дискретных игр с интегральными ограничениями*, Acta Mathematica Vietnamica, 12 (1987), 17 — 40.
4. Фан Зуй Хай, *Задачи преследования в линейных дискретных играх с общими типпами информации*, Acta Mathematica Vietnamica, 9 (1984), 213 — 247.
5. Фан Зуй Хай и Фам Хонг Куанг, *Об одном способе преследования в линей ных дискретных играх*. ДАН АзССР, 38 (1982), № 11, 7 — 10.
6. Н. Ю. Сатимов и В. В. Рихсиев и А. А. Хамдамов., *О задаче преследования для линейных дифференциальных и дискретных игр многих лиц с интегральными ограничениями*, Математический сборник, новая серия, т. 118 (160) 4 (8), 1982, 28 — 50.
7. А. А. Хамдамов, *Задача преследования для одного класса дискретных игр многих лиц с интегральными ограничениями*, ВИНИТИ, № 3802 — 82 деп, 1982, 1 — 18.

Поступила в Редакцию 15 января 1986г.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ХАНОЙ ВЬЕТНАМ