ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Vol. 13 No 1 (1988)

PROPAGATION ET INTERACTION DES SINGULARITÉS POUR LES EQUATIONS HYPERBOLIQUES SEMI-LINÉAIRES EN DIMENSION 1 D'ESPACE

TRAN HUY HO

I. INTRODUCTION

Soit

$$p(x, t, D_x, D_t)u(x, t) = F(x, t, u, \nabla u, \ldots, \nabla^{m-1}u) \tag{1.1}$$

une equation hyperbolique semi—linéaire, ou $P(x, t, D_x, D_t)$ est un operateur différentiel linéaire homogene d'ordre m a coefficients réels C^∞, strictement hyperbolique par rapport a t et $F(x, t, u, \ldots, \nabla^{m-1}u)$ est une fonction réelle C.

Par un changement des variables indépendantes on peut écrire (1. 1) sous la forme :

$$X_1, \ldots, X_m u = f(x, t, u, \nabla u, \ldots, \nabla^{m-1}u) \tag{1.2}$$

$$\text{où } X_i = \frac{\partial}{\partial t} + C_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x},\ i = 1, m,\ C_i(x, t) \neq C_i(x, t),\ C_i < C_{i+1} \tag{1.3}$$

Le problème de Cauchy pour l'équation (1. 1) avec des données de Cauchy sur l'hyperplan $t = 0$

$$(u_0, \ldots, u_{m-1}) \in (H^S_{\mathbf{R}}, \ldots, H_R^{S-m+1}),\ s > m + \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

possède une solution unique satisfaisant aux conditions suivantes :

$$u \in C[0, T; H^S_{\mathbf{R}}],\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C[0, T; H^{s-1}_{\mathbf{R}}], \ldots, \frac{\partial^m}{\partial t^m} u \in C\left[0, T; H^{S-m}_{\mathbf{R}}\right] \tag{1.5}$$

où $C[0, T; H^S_{\mathbf{R}}]$ désigne l'espace des fonctions continues de $t \in [0, T]$ a valeur dans $H^S_{\mathbf{R}}$ (voir, par exemple, Mizohata [2]). De plus, comme nous allons le montrer, la solution du problème de Cauchy cité ci-dessus appartient localement à $H^s_{loc}(\mathbf{R}^2)$ (Théorème 5. 1).

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier les propagations et les intéractions des singularités de la solution du problème (1.2), (1.4) connaissant les singularités des données de Cauchy sur $t = 0$. Nous utiliserons pour cela une méthode de J. Rauch et M. Reed destinée à l'étude des singularités de la solution du problèmme de Cauchy pour les systèmes strictement hyperboliques semi-linéaires en dimension 1 d'espace [3].

L'idée principale inspirée de l'article [3] de Rauch et Reed sur les systèmes hyperboliques du premier ordre est la suivante: Soit $T(x)$ une fonction mesurant la régularités des données de Cauchy [la solution $u(x, t)$ appartiendra à $H^{\tau(x_0)}$ dans un voisinage de $(x_0, 0)$]. On peut alors construire, à partir de τ, une fonction (indice de régularité) $\sigma(x, t)$ telle que $u \in H^{\sigma(x, t)}$ au voisinage de (x, t).

On peut considérer ce résultat comme un prolongement naturel du résultat de [3] dans le cas d'une équation d'ordre supérieur. D'autre part, du point de vue des interactions, on peut aussi le considérer comme un certain complément du résultat de J. M. Bony [1] sur la propagation des singularités des équations hyperboliques non-linéaires (dans le cas de l'espace de dimension 2), dans lequel le phénomène d'intéraction n'a pas été abordé.

2. ESPACES DES FONCTIONS SINGULIERES

Dans ce paragraphe nous rappellerons brièvement certaines notions nécssaires pour la suite en renvoyant le lecteur au travail cité de J. Rauch et M. Reed [3] pour les détails. Espace $(H^s)^k_X$: Soient X un champ devecteurs non-nuls et k un nombre entier, $k \geqslant 0$. L'espace $(H^s)^k_X$ est défini par

$$u \in (H^s)^k_X \Leftrightarrow X^i_u \in H^s , \ i = 0,\dots, k \tag{2.1}$$

Pour $k \geqslant 0$, réel, en utilisant l'interpolation et un difféomorphisme tel que X devienne $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ on a:

$$u \in (H^s)^k_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \Leftrightarrow (1 + |\xi| + |\tau|)^s \, (1 + |\xi|)^k \, \widetilde{u}(\xi, \tau) \in L^2 \tag{2.2}$$

où $\widetilde{u}(\xi \ \tau)$ est la transformation de Fourier de u.

On dira que u est microlocalement de l'espace $(H^s)^k_X$ en un poin $(p_0, \zeta_0) \in \in (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ s'il existe un opérateur pseudo-différentiel classique R d'ordre 0 dont le symbole principal est non-nul en (p_0, ζ_0) tel qve $Ru \in (H^s)^k_X$. On écrit alors $u \in (H^s)^k_X (p_o, \xi_0)$. En particulier, si $(p_0, \zeta_0) \notin \text{Char } X(\zeta_0)$ n'est pas orthogonal à $X(p_0)$) cela singnifie que $u \in H^{s+k}_{(p_0}, \zeta_0)$.

Il est facile de montrer que $(H^s)^k_X$ est une algèbre pour $s > 1$. **Mais un meilleur résultat est donné par la proposition suivante [3]:**

PROPOSITION 2.1 : *$(H^s)^k_X$ est une algèbre si $s > \frac{1}{2}$ et $s + k > 1$.*

Ensuite il est utile de rappeler certaines propriétés importantes de l'espace $(H^s)^k_X$ dont nous aurons besoin dans la démonstration du théorème de propagation des singularités (Théorème 4.1).

PROPOSITION 2.2 : *$u \in (H^s)^k_X(p, \zeta)$ si et seulement si*

$$u \in (H^s)^{k-1}_X(p, \zeta) \text{ et } Xu \in (H^s)^{k-1}_X (p, \zeta).$$

PROPOSITION 2. 3 : *Soit Q un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre m sur Ω, $s \ni \mathbf{R}$ et $(p, \zeta) \in T^* (\Omega) / 0$ Si $u \in (H^s)^k_X (p, \zeta)$,*

alors $Qu \in (H^{s-m})^k_X (p, \zeta)$.

PROPOSITION 2.4. *Soient $p_0 \in \Omega$, $\zeta_0 \neq 0$, P un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre m elliptique en (p_0, ζ_0). Si $u \in \mathcal{D}' (\Omega)$ et $Pu \in (H^s)^k_X (p_0, \zeta_0)$.*

alors $u \in (H^{s+m})^k_X (p_0, \zeta_0)$.

Espace $\mathcal{A} (\rho, r_1, \ldots, r_m)$: Soient $\rho, r_1, \ldots, r_m$ des nombre réels, $0 \leqslant r_j \leqslant \rho$, $i = 1, \ldots, m$. **On dit que** $u \in \mathcal{A} (\rho, r_1, \ldots, r_m)$ si pour

$$(p_0, \zeta_0) \notin \bigcup_i \text{Char } X_i, \; u \in H^\rho (p_0, \zeta_0), \text{ on a}$$

$$(p_0, \zeta_0) \in \text{Char } X_i, \; u \in (H^{r_j})^{\rho - r_j}_{X_j} (p_0, \zeta_0)$$

Nous allons maintenant rappeler les résultats **principaux** de **J. Rauch et M.** Reed [3] **dont nous aurons besoin dans la démonstration des** Théorèmes 3.1 et **4. 1 dans les paragraphes suivants.**

PROPOSITION 2.5.

a) On suppose que la condition suivante est vérifiée

$$\frac{1}{2} < r_j \leqslant \rho \leqslant \min_{j \neq k} (r_j + r_k), \; \rho > 1$$

Alors $\mathcal{A}$ $(\rho ; r_1, \ldots, r_m)$ est une algèbre. De plus, c'est une algèbre invatiante par rapport à l'action des fonctions C^∞.

b) Si $(\rho ; r_1, \ldots, r_m)$, $(\bar\rho, \bar r_1, \ldots, \bar r_m)$ vérifient la condition (2. 3) et $\bar\rho \leqslant \rho$, $\bar r_i \leqslant r_i$, $\forall_i$ alors on a :

$$\mathcal{A}(\rho, r) \subset \mathcal{A} (\bar\rho, \bar r)$$

PROPOSITION 2.6. *Soient u et $X_k u$ appartenant à $\mathcal{A}(\rho\,;\, r_1,\ldots, r_m)$.*

On a alors:

$u \in \mathcal{A}(\rho + 1\,;\, r_1 + 1,\ldots,\ r_{k-1} + 1, r_k\,,\, r_{k+1} + 1,\ldots,\ r_m + 1)$.

PROPOSITION 2.7. *Soient u une solution de l'équation*

$X_k\, u = f(x, t, u, v)$, *où* $X_k = \dfrac{\partial}{\partial t} + C_k\,(x,\ t)\,\dfrac{\partial}{\partial x}$

et Γ une courbe intégrale de X_k contenant p_o.

On suppose que la condition (2.3) est verifiée pour

$(\rho;\ r_1\,,\ldots, r_k\,,\ldots, r_m\,)$ *et* $(\rho\,;\ r_1\,,\ldots, r'_k\ ,\ldots, r_m\,)$ *avec* $r_k < r'_k$ *et*

$u \in \mathcal{A}(\rho;\ r_1\,,\ldots,\ r_k\,,\ldots,\ r_m\,)$ *sur* Γ,

$u \in \mathcal{A}(\rho\,;\ r_1\,,\ldots,\ r'_1\,,\ldots, r_m)$ *pour* $p_o \in \Gamma$,

$v \in \mathcal{A}(\rho\,;\ r_1\,,\ldots,\ r'_k\,,\ldots,\ r_m)$ *sur* Γ.

On a alors $u \in \mathcal{A}(\rho\,;\ r_1\,,\ldots,\ r'_k\,,\ldots,\ r_m)$ *sur* Γ.

3. REGULARITÉ AUX POINTS NON CARACTÉRISTIQUES

En nous appuyant sur la Proposition 2.6 nous allons démontrer le résultat suivant

THEOREME 3. 1. (*Théorème de régularité elliptique*)

Soient $(\rho\,;\ r_1\,,\ldots, r_m)$ *et* $(\rho'\,;\ r_1\,,\ldots,\ r_m)$ *vérifiant la condition*

$$m - \frac{1}{2} < r_j \leqslant \rho \leqslant \min_{j \neq k}\,(r_j + r_k - m + 1),\ \rho > m \tag{3. 1}$$

où $\rho' < \rho$. *Soit u une solution de l'équation (1.2) appartenant à* $\mathcal{A}(\rho\,;\ r_1\,,\ldots,\ r_m\,)$. *On a alors* $u \in \mathcal{A}(\rho'\,;\ r_1\,,\ldots,\ r_m\,)$.

Preuve:

Par hypothèse $u \in \mathcal{A}(\rho\,;\ r_1\,,\ldots,\ r_m\,)$. Alors, d'après la Proposition 2.3 on a

$$X_2\,,\ldots,\ X_m u \in \mathcal{A}(\rho - m + 1\,;\ r_1 - m + 1,\ldots,\ r_m - m + 1). \tag{3. 2}$$

D'autre part, en appliquant la Proposition 2.5 a) il vient

$$X_1\ldots,\ X_m u \in \mathcal{A}(\rho - m + 1,\ r_1 - m + 1,\ldots,\ r_m - m + 1). \tag{3. 3}$$

En vertu de la Proposition 2.6, on déduit de (3.2) et (3.3) que:

$$X_2\,,\ldots,\ X_m u \in \mathcal{A}(\rho - m + 2,\ r_1 - m + 1\ ,\ldots,\ r_m - m + 2) \tag{3. 4}$$

On a ensuite, comme précédemment

$$X_3\,,\ldots\ X_m u \in \mathcal{A}(\rho - m + 2,\ r_1 - m + 2,\ldots,\ r_m - m + 2). \tag{3. 5}$$

La Proposition 2. 5 b) nous donne:

$$X_3, \dots, X_m u \in \mathcal{A}(\rho - m + 2, r_1 - m + 1, \dots, r_m - m + 2). \tag{3.6}$$

En appliquant de nouveau la Proposition 2. 6 a (3. 4) et (3. 6) in vient:

$$X_3, \dots, X_m u \in \mathcal{A}(\rho - m + 3, r_1 - m + 2, r_2 - m + 2, \dots, r_m + m - 3).$$

Continuant ce processus, nous aurons:

$$X_m u \in \mathcal{A}(\rho, r_1 - 1, \dots, r_{m-1} - 1, r_m) \tag{3.7}$$

et $\quad u \in \mathcal{A}(\rho, r_1, \dots, r_m) \subset \mathcal{A}(\rho, r_1 - 1, \dots, r_{m-1} - 1, r_m) \qquad (3.8)$

En appliquant encore une fois la Proposition 2. 5 à (3. 7) et (3. 8) on obtient:

$$u \in \mathcal{A}(\rho + 1, r_1, \dots, r_m). \tag{3.9}$$

Si $\rho + 1 \geqslant \rho'$, alors d'après la Proposition 2. 5 b) on a $u \in \mathcal{A}(\rho', r_1, \dots, r_m)$ et la démonstration du théorème est achèvée.

Dans le cas contraire la démonstration peut être terminée par récurrence.

4. PROPAGATION DES SINGULARITES

Nous allons maintenant demontrer le

THÉOREMÈ 4.1 *(Théorème de propagation des singularités).* *Soit u une solution de l'équation (1.2)*

$$X_1, \dots, X_m u = f(x, t, u, \nabla u, \dots, \Delta^{m-1} u).$$

On suppose que $(\rho; r_1, \dots, r_\mu, \dots, r_m)$ *et* $(\rho, r_1, \dots, r'_\mu, \dots, r_m)$ *vérifient la condition (3.1), où* $r_\mu < r'_\mu$.

Si $u \in \mathcal{A}(\rho, r_1, \dots, r_\mu, \dots, r_m)$ *pour* $\forall p \in \Gamma^\mu \qquad (4.1)$

et $\quad u \in \mathcal{A}(\rho, r_1, \dots, r'_\mu, \dots, r_m)$ *pour* $p_o \in \Gamma^\mu \qquad (4.2)$

alors

$$u \in \mathcal{A}(\rho, r_1, \dots, r'_\mu, \dots, \text{ pour } \forall p \in \Gamma^\mu \tag{4.3}$$

On rappelle que Γ^μ *désigne ici une courbe integrale de* X_μ *contenant* p_o

Preuve: D'abord nous allons montrer que si

$$u \in \mathcal{A}(\rho, r_1, \dots, r_m)$$

alors $\qquad X_1 u \in \mathcal{A}(\rho - 1, r_1, r_2 - 1, \dots, r_m - 1).$

En effet, supposons que $(p_o \zeta_o) \notin \bigcup_{i=1}^{m} \text{char } X_i$. Alors, par définition $u \in H^\rho(p_0, \zeta_0)$

et d'après la Proposition 2.3 $X_1 u \in H^{\rho-1}_{(p_o, \xi_o)}$. Ensuite, si $(p_o, \zeta_o) \in \text{char } X_1$, nous avons par définition $u \in (Hr_1)^{\rho-1}_{X_1}$ et d'après la Proposition 2.3

$X_1 u \in (H^{r_1})^{\rho - r_1 - 1}_{X_1}$. Enfin si $(p_0, \zeta_0) \in$ char X_i, $i = 2,..., m$ alors

$u \in (H^{r_i})^{\rho - r_i}_{X_i}$ et par conséquent $X_1 u \in (H^{r_1 - 1})^{\rho - r_i}_{X_i}$ (Proposition 2.3).

Ainsi, en appliquant la Proposition 2. 3 (m — 1) fois, nous obtenons:

$$X_1 ,..., \widehat{X}_\mu ,..., X_m u \in \mathcal{A}(\rho - m + 1; \\ r_1 - m + 2,..., r_\mu - m + 1,..., r_m - m + 2) \qquad (4.4)$$

où le signe $\frown$ sur X_μ signifie l'absence de X_μ dans l'expression $X_1 ,..., X_m u$

Rappellons que $X_i = \frac{\partial}{\partial t} + C_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$, $i = 1,..., m$ où les $C_i(x, t)$ sont différents. Nous pouvons écrire alors

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{C_\mu}{C_\mu - C_i} X_i - \frac{C_i}{C_\mu - C_i} X_\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{C_i - C_\mu} X_i - \frac{1}{C_i - C_\mu} X_\mu$$

Si on désigne par D un opérateur différentiel d'ordre 1 on a:

$$D = \alpha_i X_\mu + \beta_i X_i , i \neq \mu$$

où α_i, β_i sont des fonctions de x et de t.

On peut alors exprimer D^{m-1} sous la forme :

$$D^{m-1} = \lambda X_1 ,..., \widehat{X_\mu} ,..., X_m + \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j X^j_\mu D^{m-j-1} \qquad (4.5)$$

où λ, μ_j sont des fonctions de x et de t, D^{m-j-1} sont des opérateurs de la forme $D^{m-j-1} = X_{j+1} ,..., \widehat{X}_\mu ,..., X_m$.

On peut ainsi reécrire $f(x, t, u, \nabla u,..., \nabla^{m-1} u)$ sous la forme:

$$f(x, t, u, \nabla u,..., \nabla^{m-1} u) = f_1(x, t, v, w) \qquad (4.6)$$

où $v = (v_1 ; v_2) = (u, \nabla u,..., \nabla^{m-2} u ; \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j X^j_\mu D^{m-j-1} u)$ et

$w = X_1 ,..., \widehat{X}_\mu ,..., X_m$ u.

D'une façon analogue on peut montrer facilement que

$X^j_\mu D^{m-j-1} u \in \mathcal{A}(\rho - m + 1; r_1 - m + 1,..., r_j - m + 1, r_{j+1} - m + 2,..., r_\mu - m + j + 1, r_{\mu+1} - m + 2,..., r_m - m + 2)$; $1 \leqslant j \leqslant m - 1, \forall p \in \Gamma^\mu$.

On a alors:

$$v_2 \in \mathcal{A}(\rho - m + 1 ; r_1 - m + 1,,, r_\mu - m + 2,..., r_m - m + 1), \forall p \in \Gamma^\mu \quad (4.7)$$

De plus:

$$\nabla_{m-1} u \in \mathcal{A}(\rho - m + j, r_1 - m + j,..., r_m - m + j); 2 \leqslant j \leqslant m, \forall p \in \Gamma^\mu$$

et par conséquent

$$v_1 \in \mathcal{A}(\rho - m + 2 ; r_1 - m + 2,..., r_\mu - m + 2,..., r_m - m + 2) \ \forall \ p \ni \Gamma^\mu \quad (4.8)$$

Les relations (4. 7) et (4. 8) impliquent:

$$v \in \mathcal{A}(\rho - m + 1 ; r_1 - m + 1,..., r_\mu - m + 2,..., r_m - m + 1), \forall p \in \Gamma_\mu \quad (4.9)$$

D'autre part, la relation (4. 4) et les conditions (4. 1) et (4. 2) nous donnent:

$$W \in \mathcal{A}(\rho - m + 1 ; r_1 - m + 1,..., r_\mu - m + 1,..., r_m - m + 1), \forall p \in \Gamma^\mu \quad (4.10)$$

$$W \in \mathcal{A}(\rho - m + 1, r_1 - m + 1,..., r'_\mu - m + 1,..., r_m - m + 1), \forall p \in \Gamma^\mu \quad (4.11)$$

Deux cas sont possibles:

a) Si $r_\mu - m + 2 \geqslant r'_\mu - m + 1$ où $r_\mu + 1 \geqslant r'_\mu$, alors:

$$v \in \mathcal{A}(\rho - m + 1 ; r_1 - m + 1,..., r_\mu - m + 2,..., r_m - m + 1) \subset$$

$$\subset \mathcal{A}(\rho - m + 1 ; r_1 - m + 1,..., r'_\mu - m + 1,..., r_m - m + 1), \forall p \in \Gamma^\mu. \quad (4.9)'$$

En appliquant la Proposition 2. 7 à (4. 9)', (4. 10), (4. 11) il vient:

$$w \in \mathcal{A}(\rho - m + 1 ; r_1 - m + 1,..., r'_\mu - m + 1,..., r_m - m + 1), \forall p \in \Gamma^\mu \quad (4.12)$$

Nous allons démontrer que (4. 3) a lieu. En effet, si $(\rho_0, \zeta_0) \in \mathrm{char}\ X_\mu$ alors par définition $w \in (H^{r'_\mu - m + 1})^{\rho - r'_\mu}_{X_\mu}$. Remarquons que (p_0, ζ_0) est alors non caractéristique pour l'opérateur $X_1,..., \widehat{X}_\mu ,.... X_m$. Enappliquantla Proposition 2. 4 on obtient donc

$$u \in (H^{r'_\mu})^{\rho - r'_\mu}_{X_\mu} \quad (4.13)$$

D'autre part, si $(\rho_0, \zeta_0) \notin \mathrm{char}\ X_\mu$, alors $w \in H^{\rho - m+1}$ et par conséquent

$$u \in H^\rho$$

De (4. 13), (4. 14) et (4. 1) on déduit:

$$u \in \mathcal{A}(\rho, r_1,..., r'_\mu,..., r_m), \forall p \in \Gamma^\mu$$

b) Si $r_\mu - m + 2 < r'_\mu - m + 1$ ou $r_\mu + 1 < r'_\mu$, alors d'après (4. 11)

$$W \in \mathcal{A}(\rho - m + 1 ; r_1 - m + 1,..., r_\mu - m + 2,.., r_m - m + 1, \text{pour } p_0 \in \Gamma^\mu \quad (4.11)'$$

En appliquant maintenant la Proposition 2. 7 à (4. 9), (4. 10), (4. 11)' on a:

$$w \in \mathcal{A}\ (\rho - m + 1 ; \ r_1 - m + 1, \ldots, r_\mu - m + 2, \ldots, r_m - m + 1), \forall_p \in \Gamma^\mu$$

et par conséquent, comme précédemment

$$u \in \mathcal{A}(\rho\,;\, r_1, \dots, r_\mu + 1, \dots, r_m).$$

On peut ainsi terminer la démonstration par récurrence. Le théorème est démontré.

5. THÉORÈME GÉNÉRAL DE RÉGULARITÉ

D'abord, nous rappellerons un théorème d'existence locale dû à S. Mizohata [2] pour le problème de Cauchy pour l'équation (1.2) et indiquerons en même temps la régularité locale de la solution de celui-ci au voisinage de $t = 0$. Nous aurons besoin de ce résultat dans la démonstration du théorème général de régularité.

THÉORÈME 5.1. (*Mizohata* [2]).

Soit $X_1, \dots, X_m\, u\,(x, t) = f\,(x, t, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1} u)$ (5.1)
une équation strictement hyperbolique semi-linéaire d'ordre m, *où* $f(x, t, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1} u)$ *est une fonction réelle* C^∞. *On donne les conditions de Cauchy sur l'hyperplan* $t = 0$

$$u(x,0) = u_0 \in H^s_{\mathbf{R}} \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1 \in H^{s-1}_{\mathbf{R}}$$

$$\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(x, 0) = u_{m-1} \in H^{s-m+1}_{\mathbf{R}}, \; s > m + \frac{1}{2}$$

Alors il existe une solution unique telle que

$$u \in C\left[0, T\,;\, H^s_{\mathbf{R}}\right], \; \frac{\partial u}{\partial t} \in C\left[0, T\,;\, H^{s-1}_{\mathbf{R}}\right], \dots, \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \in C\left[0, T\,;\, H^{s-m}_{\mathbf{R}}\right]. \tag{5.3}$$

De plus $$u \in H^s_{loc}\;(\mathbf{R}^2) \tag{5,4}$$

Il convient de remarquer que dans [2] le théorème ci-dessus est énoncé sans la propriété (5.4) et seulement avec l'hypothèse $s \geqslant [m] + 1$ entier. En fait, le théorème reste vrai pour le cas s non entier et $s > m + \dfrac{1}{2}$ si on utilise les espaces de Sobolev H^s avec s réel. Il nous reste à démontrer (5.4).
D'après (5. 1) on peut écrire :

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}} u = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} a_k\, D_x^{m+1-k}\, D_t^k\, u \; +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant p+q \leqslant m-1} f'(x, t, u, \dots, D_x^p\, D_t^q\, u)\, D_X^p\, D_t^{q+1}\, u \tag{5.5}$$

où a_k sont des fonctions C^∞ de x et de t.
A cause de (5.3) on a :
$$D_t^k u \in C[0,T; H_{\mathbf{R}}^{s-k}], \ 0 \leqslant k \leqslant m; \tag{5.6}$$
par conséquent
$$D_X^{m-k-1} D_t^k u \in C[0, T; H_{\mathbf{R}}^{s-m-1}]. \tag{5.7}$$
De même :
$$D_X^p D_t^{q+1} u \in C[0, T; H_{\mathbf{R}}^{s-m}] \text{ avec } p+q \leqslant m-1. \tag{5.8}$$
De (5. 5), (5.7) et (5.8) nous déduisons
$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}} u \in C[0, T; H_{\mathbf{R}}^{s-m-1}]. \tag{5.9}$$
En continuant ce processus on a :
$$\frac{\partial^{m+2}u}{\partial t^{m+2}} \in C[0, T, H_{\mathbf{R}}^{s-m-2}], \ldots, \frac{\partial^{[s]}u}{\partial t^{[s]}} \in C[0, T; H_{\mathbf{R}}^{S-[s]}],$$
$$\frac{\partial^{[s]+1}}{\partial t^{[s]+1}} u \in C[0, T; H_{\mathbf{R}}^{S-[s]-1}] \tag{5.10}$$
où $[s]$ désigne la partie entière de s.

Dans la démonstration ci-dessus nous avons utilisé le fait que $H_{\mathbf{R}}^s$ est une algèbre si $s > \frac{1}{2}$. Pour obtenir la dernière expression dans (5.10) il suffit de remarquer que dans la formule (5.5) la première somme appartient à $C[O, T, H^{s-[s]-1}]$, tandis que dans la seconde somme $D_X^p D_t^{q+1} u \in C[O, T, H_{\mathbf{R}}^{s-[s]}] \subset C[O, T, L^2]$, et $D_X^p D_t^q u \in C[O, T; H_{\mathbf{R}}^{s-[s]+1}] \subset C_o$

Nous allons maintenant montrer que $u \in H_{loc}^s(\mathbf{R}^2)$ Considerons
$$\int |\widetilde{u}(\xi, \tau)|^2 (1 + |\xi| + |\tau|)^{2s} d\xi d\tau \tag{5.11}$$

Il y a deux cas possibles :

a) Si $|\xi| > |\tau|$, on peut écrire
$$\int |\widetilde{u}(\xi, \tau)|^2 (1 + |\tau| + |\xi|)^{2s} d\tau d\xi \leqslant C \int |\widetilde{u}(\xi, \tau)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi d\tau \tag{5.12}$$
où C est une constante.

D'après (5.3) on a $u \in C[O, T; H_{\mathbf{R}}^s]$. Donc
$$(1 + |\xi|)^s |\widehat{u}(\xi, \tau)| \in L^2(\mathbf{R}^2)$$

et par conséquent

$$\int |\widetilde{u}(\xi,\tau)|^2 (1+|\xi|+|\tau|)_s^2 \, d\tau \, d\xi < \infty. \tag{5.15}$$

b) Si $|\xi| \leqslant \tau$, on peut estimer (5.11) comme suit

$$\int |\widetilde{u}(\xi,\tau)|^2 (1+|\tau|+|\xi|)^{2s} \, d\tau d\xi =$$

$$= \int |\widetilde{u}(\xi,\tau)|^2 (1+|\tau|+|\xi|)^{2([s]+1)} (1+|\tau|+|\xi|)^{2(s-[s]-1)} d\tau d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \int |\widetilde{u}(\xi,\tau)|^2 (1+|\tau|+|\xi|)^{2([s]+1)} (1+|\xi|)^{2(s-[s]-1)} \, d\tau \, d\xi \tag{5.14}$$

où C est une constante. On a utilisé ici l'inégalité $s-[s]-1 < 0$. L'expression (5.14) est majorée par :

$$C_1 \int |\widetilde{u}(\xi,\tau)|^2 (1+|\tau|)^{2([s]+1)} (1+|\xi|)^{2(s-[s]-1)} d\tau \, d\xi. \tag{5.15}$$

D'après (5.10), $\dfrac{\partial^{[s]+1}}{\partial t^{[s]+1}} u \in C[O,T; H^{s-[s]-1}]$. Donc

$$(1+|\xi|)^{s-[s]-1} |\tau|^{[s]+1} |\widetilde{u}(\xi,\tau)| \in L^2(\mathbf{R}^2).$$

par conséquent,

$$\int |\widetilde{u}(\xi,\tau)|^2 (1+|\tau|)^{2([s]+1)} (1+|\xi|)^{2(s-[s]-1)} d\tau d\xi < \infty. \tag{5.16}$$

Les relations (5.13) et (5.16) montrent que $u \in H^s(\mathbf{R}^2)$.

Quelques définitions sont encore nécessaires avant de passer à la démonstration du théorème général de régularité.

Désignons par Ω le domaine borné par les lignes $t = 0$, $t = T$ et par les courbes caractéristiques Γ_1, Γ_m issues respectivement des extrémités b et a de l'intervalle $[a,b] \subset \{t = 0\}$ où sont données les conpitions de Cauchy. Pour $p_o \in \Omega \cap \{t = 0\}$ désignons par $\Gamma^i(p_o)$ *la portion de la* $i^{\text{ème}}$*-caractéristique de* p_o contenue dans Ω. Pour $p \in \Omega$ désignons par $\Gamma^i_-(p)$ *la portion de* p *à* p_o *de cette caracteristique.*

DEFINITION 5.2. *(Indice de régularité).*

Soient $u_o \in H^s_{loc}(a,b)$, $u \in H^{s-1}_{loc}(a,b), \ldots, u_{m-1} \in H^{s-m+1}_{loc}(a,b)$, $s > m + \dfrac{1}{2}$

Nous définissons *une suite d'indices* $\sigma^{(l)}$, $l = 0,1,\ldots$ comme suit: Soit $\tau : [a,b] \to [s, \infty]$ une fonction telle que pour tout $p_o \in [a,b]$ on a

$$u_o \in H^{\tau(p_o)}(p_o),\ u_1 \in H^{\tau(p_o)-1}(p_o), \ldots, u_{m-1} \in H^{\tau(p_o)-m+1}(p_o).$$

Nous définissons $\sigma^{(o)} : \Omega \to [s, \infty]^m$ par

$$\delta_i^{(o)}(p) = \tau(p_o)\ \forall_p \in \Gamma^i(p_o)$$

puis $\sigma^{(l)} = \Omega \to [s, \infty]^m$ par recurrence :

$$\text{Pour } p \in \Gamma^i(p_o),\ \sigma_i^{(l)} = \inf_{q \in \Gamma^i[p_o p]} \{\sigma_i^{(l-1)}(q), \min_{\substack{i \neq j \neq k \\ i \neq k}} (\sigma_i^{(l-1)}(q) + \sigma_k^{(l-1)}(q) - m + 1\}.$$

Comme $\sigma_i^{(l)}$ est une fonction décroissante de l, bornée inférieurement par s on peut définir $\sigma_i(p) = \lim\limits_{l \to 0} \sigma_i^{(l)}(p)$. Soit $\sigma\ (p) = (\sigma_1\ (p), \ldots, \sigma_m\ (p))$. Nous appellerons $\sigma = \Omega \to [s, \infty]^m$ l'indice de régularité.

La proposition suivante découle immediatement de la definition.

PROPOSITION 5. 1.

1) *Soit* σ *l'indice de régularité défini ci-dessus. On a alors*

a) $\sigma_i(p) \leqslant \sigma_i^{(0)}(p), \qquad \forall p \in \Omega, \forall i$

b) $\sigma_i(q) \geqslant \sigma_i(p), \qquad \forall p \in \Omega$ *et* $q \in \Gamma^i - (p)$

c) $\sigma_i(q) + \sigma_k(q) \geqslant \sigma_j(q) + m - 1, \qquad \forall\ q \in \Omega$

2) *Si* $r = \Omega \to [s, \infty]^m$ *est une fonction satisfaisant aux conditions a), b), c) avec* σ_o *comme ci-dessus, alors*

$$r_i(p) \leqslant \sigma_i(p), \qquad \forall p \in \Omega, \forall i. \tag{5.17}$$

On dit dans ce cas que r est un indice admissible pour u.

THEORÈME 5.2. (*Théorème général de régularité*).

Soient u *la solution unique du problème de Cauchy (5.1), (5.2) figurant dans le Théorème 5.1 et* Ω *le domaine defini précédemment. Soit* σ *l'indice de régularité de* u *dans* Ω *d'après la Definition 5.2.*

On a alors $u \in \mathcal{A}\ (S(p), \sigma_1(p), \ldots \sigma_m(p)), \forall p \in \Omega$ (5.18)

où $$(p) = \min_{i \neq k} (\sigma_i(p) + \sigma_k(p) - m + 1). \tag{5.19}$$

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin du lemme suivant

LEMME 5. 1. *Soit* $r = (r_1, \ldots, r_m)$ *un indice admissible vérifiant la condition* $r \leqslant C + \sigma$, *où* C *est une constante,* $C \geqslant m + \frac{1}{2}$ *et* $\delta < \frac{3}{2}$. *Si on pose* $\widetilde{r_i} = \min(r_i, C)$, *alors* $\widetilde{r} = (\widetilde{r_1}, \ldots, \widetilde{r_m})$ *est aussi un indice admissible,*

Preuve: Par définition on a $\widetilde{r_i}(q) \leqslant r_i(q), \forall\ q \in \Omega$. Par hypothèse, r est un indice admissible. Donc $\widetilde{r_i}(q) \leqslant r_i(q) \leqslant \sigma_i(q) \leqslant \sigma_i^{(o)}(q)$, de sorte que la propriété a) dans la Définition 5.1 est vérifiée.

Ensuite on a $\widetilde{r_j} = \min(r_j(q), c)$, $\forall\ q \in \Omega$

et $$\widetilde{r_j} = \min(r\ (p), c).$$

Puisque $r_j(q) \geqslant r_j(p)$, $\forall\, p \in \Omega$, $q \in \Gamma^j(q)$, on a alors

$$\widetilde{r_j}(q) \geqslant \widetilde{r_j}(p) \ , \forall\, p \in \Omega \ ; \ q \in \Gamma^j(q)$$

Donc la propriété $b)$ est aussi vérifiée.

Reste à vérifier la propriété $c)$. Considérons trois cas possibles:

1) Si $\widetilde{r_i} = r_i$ et $\widetilde{r_j} = r_j$, alors

$$\widetilde{r_i} + \widetilde{r_j} = r_i + r_j \geqslant r_k + m - 1 \geqslant \widetilde{r_k} + m - 1$$

2) Si $\widetilde{r_i} = r_i$ et $\widetilde{r_j} = C$, alors

$$\widetilde{ri} + \widetilde{r}_j = r_i + C > m + \frac{1}{2} + C = m + \frac{1}{2} - \delta + C + \delta \geqslant m - 1 + v_k \geqslant \widetilde{v}_t + m - 1$$

3) Si $\widetilde{r_i} = C$; $\widetilde{r_j} = C$, alors

$$\widetilde{r_i} + \widetilde{r_j} > C + m + \frac{1}{2} = C = \delta + m\frac{1}{2} - \delta \geqslant r_k + m - 1 \geqslant \widetilde{r_k} + m - 1.$$

La propriété $c)$ est donc également vérifiée et le lemme est démontré.

Preuve du Théorème 5.2. Le Théorème 5.1 affirme que $u \in H^s_{\text{loc}}\ (\Omega)$,

Par récurrence nous allons démontrer que u appartient à $\mathcal{A}\,(\rho\,;\, r_1, \ldots, r_m)$ pour le plus grand indice $(r_1, \ldots, r_m)$ admissible en tout $p \in \Omega$ avec $\rho = \min\limits_{i \neq j}\,(r_i + r_j - m + 1)$.

Puisque $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ on a

$$u \in \mathcal{A}\,(s : s, \ldots, s) \text{ avec } r_i \subset s,\ \forall i$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Supposons que } u \in \mathcal{A}\,(\rho\,(q);\, r_1(q), \ldots, r_m(q)),\ \forall\, q \in \Omega \\ &\rho\,(q) = \min_{i \neq j}\,(r_i\,(q), + r_j(q) - m + 1 \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

pour tous les indices admissibles r vérifiant la condition $r \leqslant C$, où $C \geqslant m + \dfrac{1}{2}$.

Nous devons démontrer que (5.20) a lieu en tout point $q \in \Omega$ et pour tous r admissibles vérifiant la condition:

$$r_j(q) \leqslant C + \delta,\ \delta < \frac{3}{2}\ , \forall q \in \Omega \tag{5.21}$$

Soit r un indice fixe admissible vérifiant la condition (5.21). Nous définissons $\tilde{r}$ comme dans le Lemme 5.1: $\tilde{r} = \min\,(r,\ C)$.

Alors, d'après le Lemme 5.1, $\tilde{r}$ est un indice admissible, $\widetilde{r_j} \leqslant C$. Par hypothèse de récurrence on a alors:

$$u \in \mathcal{A}(\tilde\rho(q); \tilde r_1(q), \ldots, \tilde r_m(q)), \ \forall q \in \Omega, \ \tilde\rho(q) = \min_{i \neq j}(\tilde r_i(q) + \tilde r_j(q) - m + 1). \quad (5.22)$$

1ère étape : Fixons un $\mu \in \{1, \ldots, m\}$ et désignons par $\Gamma^{\mu}[p_0, p]$ le μ^e caracteristique reliant p à $p_0 \in \Omega \cap \{t = 0\}$.

On suppose que l'indice r_μ vérifie la condition suivante $C < r_\mu(p) \leqslant C + \delta$ (le cas $r_\mu(p) \leqslant C$ étant trivial).

Puisque $r = \{r_j\}$ est un indice admissible on a $r_\mu(q) \geqslant r_\mu(p)$, $\forall q \in \Gamma^{\mu}[p_0, p]$ et par conséquent on a d'après (5.22)

$$u \in \mathcal{A}(\tilde\rho(q); \tilde r_1(q), \ldots, C, \ldots, \tilde r_m(q)), \ \forall q \in \Gamma^{\mu}[p_0, p]. \quad (5.23)$$

On pose $R_\mu \equiv r_\mu(p)$. Par définition d'un indice admissible

$$R_\mu \equiv r_\mu(p) \leqslant \sigma_\mu(p) \leqslant \sigma_\mu^{(0)}(p).$$

D'après la Définition 5.2, on a :

$$u_0 \in H^{\sigma_\mu^{(0)}}(p_0),\ u_1 \in H^{\sigma_\mu^{(0)}(p)-1}(p), \ldots, u_{m-1} \in H^{\sigma_\mu^{(0)}(p)-m+1}(p_0). \quad (5.24)$$

Alors d'après le Théorème 5.1,

$u_0 \in H^{R_\mu}_{loc}(\Omega)$ au voisinage de p_0 et par conséquent, $u \in \mathcal{A}(R_\mu; R_\mu, \ldots, R_\mu)$ en p_0.

Puisque $\tilde r_i \leqslant C < R_\mu$ on a en appliquant la Proposition 2.5 b)

$$u \in \mathcal{A}(R_\mu; \tilde r_1(p), \ldots, R_\mu, \ldots, \tilde r_m(p)) \text{ en } p_0.$$

Si on pose $\tilde R_i = \tilde r_i(p)$, alors :

$$u \in \mathcal{A}(R_\mu; \tilde R_1, \ldots, R_\mu, \ldots, \tilde R_m).$$

D'après le Théorème 3.1 on a :

$$u \in \mathcal{A}(\bar\rho; \tilde R_1; \ldots, R_\mu, \ldots, \tilde R_m) \text{ en } p_0 \quad (5.27)$$

ou $$\rho = \min_{i \neq j \neq \mu}\left\{(\tilde R_i + \tilde R_j - m + 1), (\tilde R_i + R_\mu - m + 1)\right\}$$

$$= \min_{i \neq j}\{\tilde R_i + \tilde R_j - m + 1\} \text{ car } R_\mu > \tilde R_i.$$

Remarquons que nous avons ici $\bar\rho \geqslant R_\mu$ puisque $r = \{r_j\}$ est un indice admissible.

Comparant $\tilde\rho$ dans (5.22) et ρ nous avons $\rho = \tilde\rho(p)$. D'après (5.22) et (5.27) les conditions du Théorème 4.1 sont satisfaites. Par conséquent,

$$u \in \mathcal{A}(\tilde\rho, \tilde R_1, \ldots, R_\mu, \ldots, \tilde R_m) \qquad \forall q \in \Gamma^{\mu}[p_0, p]. \quad (5.29)$$

Nous avons donc prouvé que

$u \in \mathcal{A}(\rho, \widetilde{R}_1, \dots, R_\mu, \dots, \widetilde{R}_m)$ en p où $\rho = \min\limits_{i \neq j} (\widetilde{R}_i + \widetilde{R}_j - m + 1)$.

2ème étape: D'une façon analogue on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} u \in \mathcal{A}(\overline{\rho}; R_1, \widetilde{R}_2, \dots, \widetilde{R}_m) \\ u \in \mathcal{A}(\rho; \widetilde{R}_1, R_2, \dots, \widetilde{R}_m) \\ u \in \mathcal{A}(\overline{\rho}; \widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_{m-1}, R) \end{array}\right\} \text{en } p. \tag{5.30}$$

Donc si p est non caractéristique, on a

$$u \in H^{\overline{\rho}} \tag{5.31}$$

et si $p \in \mathrm{Char}\, X_i$, alors

$$u \in (H^{R_i})^{\overline{\rho} - R_i}_{X_i}. \tag{5.32}$$

Cela montre que

$$u \in \mathcal{A}(\bar{\rho}; R_1, \dots, R_m) \text{ en } p.$$

D'après le Théorème 5.1 nous avons :

$$u \in \mathcal{A}(\bar{\bar{\rho}}; R_1, \dots, R_m) \text{ en } p \tag{5.33}$$

où $\bar{\bar{\rho}} = \min (R_i + R_j - m + 1)$.

Si l'on se souvient que $R_i \equiv r_i(p)$ on peut écrire (5.33) sous la forme

$$u \in \mathcal{A}(\rho(p); r_i(p), \dots, r_m(p))$$

où $\rho(p) = \min\limits_{i \neq j} (r_i(p) + r_j(p) - m + 1)$.

Le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. BONY, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème série, 14 (1981), 209 – 246.

[2] S. MIZOHATA, *Lectures on the Cauchy problem*, Tata Inst. Bombay, 1965.

[3] J. RAUCH and M. REED, *Nonlinear microlocal analysis of semi-linear hyperbolic systems in one space dimension*, Duke Mathematical Journal, Vol 49, № 2, June 1982.

Received October 1, 1986

UNIVERSITÉ DE HANOI, VIETNAM