ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Vol. 12. No 2 (1987)

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИГРАХ СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ. I.

ФАН ЗУЙ ХАЙ

В настоящее время появился ряд работ, посвященных задачам преследования в дифференциальных и дискретных играх многих лиц. Такие задачи представляют не только чисто математический интерес, но и нередко встречаются в приложениях. После опубликования статьи [1] имеется большое количество исследований методом преследования несколькими управляемыми объектами. В работах Н. Л. Григоренко, Н. Б. Пшеничного. А.А. Чикрий, И.С. Раппопорта, Н.Ю. Сатимова. Фан Зуй Хая [1. 8] приведены различные достаточные условия поимка из данного состояния фазового пространства. В [1-5] были изучены дифференциальные игры многих лиц с геометрическими ограничениями на управления. Дифференциальные и дискретные игры преследования со многими игроками и с интегральными ограничениями рассматривались в [6]. В[8] была изучена дискретная игра преследования одного убегающего несколькими преследователями с геометрическими ограничениями.

В настоящей работе рассматриваются новые эффективные методы поимка в линейных дискретных играх многих лиц с геометрическими ограничениями. Получаются достаточные условия завершения игры за конечное число шагов. Предлагаемые методы взаимодействия преследователей предлогает разделение преследующих игроков на две группы, первая из которых удерживает убегающего в некоторой области, а вторая — осуществляет в этой области поиск убегающего.

I. Пусть движения векторов $z_i \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, описываются системами разностных уравнений

$$z_i(k+1) = A_i z_i(k) + B_i u_i(k) - C_i v(k); \; z_i(0) = z_i^0 \tag{1}$$

где $k = 0, 1, \ldots$ — номер шага; A_i, B_i, C_i — соответственно постоянные матрицы размерности $n \times n$, $p \times n$, $q \times n$. Управления $u_i(k) \in R^p$, $v(k) \in R^q$ удовлетворяюто граничениям

$$u_i(k) \in P_i, \quad v(k) \in Q, \tag{2}$$

где $P_i \subset R^p$, $Q \subset R^q$ — выпуклые компакты. В R^n заданы терминальные множества $M_1, M_2, \ldots, M_m$, где $M_i = M_i^1 + M_i^2$,

M_i^1 — линейное подпространство R^n, M_i^2 — выпуклый компакт в L_i^1, L_i^1 — ортогональное дополнение к подпространству M_i^1 в R^n.

Перечисленными выше данными описана дискретная игра нескольких лиц (1) — (2), в которой принимает участие группа преследователей, имеющая в своем распоряжении вектор управления $u = (u_1, \ldots, u_m)$ и преследуемый игрок в распоряжении которого вектор v.

Рассмотрим для дискретной игры (1) — (2) задачу преследования.

Пусть $N_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$; $s = 0, 1, \ldots$ — данные множества такие что

$$N_i(s) \subset \{0, 1, \ldots, s\}.$$

Будем говорить, что игра преследования (1) — (2) из начального состояния $z_0 = (z_1^0, \ldots, z_m^0)$ заканчивается за K_1 шагов, если при любом управлении $v(k) \in Q$, $k = 0, 1, \ldots, K_1 - 1$ можно построить управления $u_i(k) \in P_i$, $i = 1, \ldots, m$; $k = 0, 1, \ldots, K_1 - 1$, такие, что существует такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что

$$z_j(K_1) = A_j^{K_1} z_j^0 + \sum_{k=0}^{K_1-1} A_j^{K_1-1-k} B_j u_j(k) - \sum_{k=0}^{K_1-1} A_j^{K_1-1-k} C_j v(k) \in M_j$$

При этом для нахождения значения $u_i(k)$ в каждый шаг k, $k = \overline{0, K_1 - 1}$ разрешается использовать значения z_0 и $v(s)$ при всех s таких, что $s \in N_i(k)$. Если $N_i(k) = \phi$, то i — ый преследователь в k - ом шаге ничего не знает об информации убегающего обьекта.

Пусть $\dim L_i = \tau_i$. В L_i возьмём некоторый базис. Тогда оператору ортогонального проектирования из R^n на L_i соответствует некоторая матрица размера $\tau_i \times n$, которая обозначается через π_i, $i = \overline{1, m}$. Пусть A, B — множества в R^n. Введем в рассмотрение геометрическая разность $\overset{*}{-}$ множеств (см.[1]).

$$A \overset{*}{-} B = \{x \in R^n : x + B \subset A\}.$$

При каждмо $K = 0, 1, \ldots$ положим

$$\Delta_1^i(K) = \{k : 0 \leqslant k \leqslant K,\ N_i(k) \neq \phi\};\quad \Delta_2^i(K) = \{0, 1, \ldots, K\} \setminus \Delta_1^i(K),$$

$$\Delta_3^i(K) = \bigcup_{S \in \Delta_1^i(K)} N_i(S);\quad \Delta_4^i(K) = \{0, 1, \ldots, K\} \setminus \Delta_3^i(K),$$

$$\Omega_i^1 = \{(k) \geqslant 0 : N_i(k) \neq \phi\}; \quad \Omega_i^2 = \{k \geqslant 0 : N_i(k) = \phi\},$$

$$G_i(K) = - \sum_{S \in \Delta_4^i(K)} \pi_i A_i^{K-S} C_i Q; \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть $\Delta_1^i(K) \neq \phi$. Тогда упорядочим элементы множеств $\Delta_1^i(K)$ и $\Delta_3^i(K)$ по возрастанию:

$$\Delta_1^i(K) = \left\{ S_1^i, \; S_2^i, \ldots, S^i_{|\Delta_1^i(K)|} \right\}; \; \Delta_3^i(K) = \left\{ \tau_1^i, \; \tau_2^i, \ldots, \tau^i_{|\Delta_3^i(K)|} \right\},$$

причем
$$S_1^i < S_2^i < \ldots < S^i_{|\Delta_1^i(K)|}; \quad \tau_1^i < \tau_2^i < \ldots < \tau^i_{|\Delta_3^i(K)|},$$

где через $|\Delta_1^i(K)|$, $|\Delta_3^i(K)|$ соответственно обозначим количество элементов множеств $\Delta_1^i(K)$ и $\Delta_3^i(K)$.

Скажем, что для i-го преследователя выполнено условие превосходства, если при всех $k \in \Omega_i^1$ существуют матрицы размера $\left(1 + |\Delta_3^i(k)|\right) \times |\Delta_1^i(k)|$

$$\Phi_i(k) = \begin{bmatrix} \gamma_i\left(S_1^i, \tau_1^i\right) & \gamma_i\left(S_1^i, \tau_1^i\right) & \ldots & \gamma_i\left(S^i_{|\Delta_1^i(k)|}, \tau_1^i\right) \\ \gamma_i\left(S_1^i, \tau_2^i\right) & \gamma_i\left(S_2^i, \tau_2^i\right) & \ldots & \gamma_i\left(S^i_{|\Delta_1^i(k)|}, \tau_2^i\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_i\left(S_1^i, \tau^i_{|\Delta_3^i(k)|}\right) & \gamma_i\left(S_2^i, \tau^i_{|\Delta_3^i(k)|}\right) & \ldots & \gamma_i\left(S^i_{|\Delta_1^i(k)|}, \tau^i_{|\Delta_3(k)|}\right) \\ \chi_i(1, k) & \chi_i(2, k) & \ldots & \chi_i\left(|\Delta_1^i(k)|, k\right) \end{bmatrix},$$

и выпуклый компакт $M_i^3(k)$, $M_i^3(k) \stackrel{*}{-} G_i(k) \neq \phi$, $M_i^2 \stackrel{*}{-} M_i^3(k) \neq \phi$ обладающие следующими свойствами:

1. $\gamma_i\left(S_p^i, \tau_j^i\right) = 0$ если $\tau_j^i \notin N_i\left(S_P^i\right)$, $p = \overline{1, |\Delta_1^i(k)|}$; $j = \overline{1, |\Delta_3^i(k)|}$,

2. $\sum\limits_{p=1}^{|\Delta_1^i(k)|} \gamma_i\left(S_p^i, \tau_j^i\right) = 1$ при всех $j = \overline{1, |\Delta_3^i(k)|}$,

3. $\chi_i(p, k) \geqslant 0$, $p = \overline{1, |\Delta_1^i(k)|}$,

4. $\sum\limits_{p=1}^{|\Delta_1^i(k)|} \chi_i(P, k) = 1$,

5. При всех $p = \overline{1, \left|\Delta_1^i(k)\right|}$ непусты множества

$$\omega_i\left(k, S_p^i\right) = \left[-\chi_i(p,k)\left(M_i^3(k) \overset{*}{-} G_i(k)\right) + \pi_i A_i^{k-S_p^i} B_i P_i\right] \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} \sum_{\tau_j^i \in N_i\left(S_p^i\right)} \gamma_i\left(S_p^i, \tau_j^i\right) \pi_i A_i^{k-\tau_j^i} C_i Q.$$

Из предположения превосходства следует существование функции целых аргументов

$$\beta_i\left(k, S_p^i\right)$$

$$\beta_i\left(k, S_p^i\right):\ \Omega_i^1 \times \Delta_1^i(k) \to R^n; \beta_i\left(k, S_p^i\right) \in \omega_i\left(k, S_p^i\right).$$

Пусть K — целое число $1 \leqslant K \leqslant m$, определяемое условием: для $i = 1,\ldots, K$ параметры, определяющие игру (I) — (2), удовлетворяют предположению превосходства; для $i = K+1,\ldots, m$ параметры определяющие игру (I) — (2), предположение превосходства не удовлетворяют. Будем считать, что $K = 0$ если предположение превосходства не может быть выполнено ни при одном i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Пусть $M_i^4(k) \subset M_i^2 \overset{*}{-} M_i^3(k)$ — компактым $m_i^4 \in M_i^4(k)$. Пусть $u_i^*(s) \in P_i$, $i = 1, 2,\ldots, K$, $s \in \Omega_i^2$.

Введем в рассмотрение для $i = 1,\ldots, K$ векторы $\left|\Delta_1^i(k)\right|$

$$\varphi_i\left(k, z_i^0, M_i^4\right) = \pi_i A_i^{k+1} z_i^0 +$$

$$+ \sum_{s \in \Delta_2^i(k)} \pi_i A_i^{k-s} B_i u_i^*(s) - m_i^4 + \sum_{p=1}^{\left|\Delta_1^i(k)\right|} \beta_i\left(k, S_p^i\right). \tag{3}$$

ТЕОРЕМА I. *Пусть существуют номер i, положительное целое число T, такие что*

$$\varphi_i\left(T, z_i^0, m_i^4\right) = 0.$$

Тогда игра (1) — (2) заканчивается за $T+1$ шагов.

Доказательство. Из (3) следует, что

$$\pi_i A_i^{T+1} z_i^0 + \sum_{s \in \Delta_2^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} B_i u_i^*(s) + \sum_{p=1}^{\left|\Delta_1^i(T)\right|} \beta_i\left(T, S_p^i\right) = 0. \tag{4}$$

Пусть $\overline{v}(0), \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}(T)$ — любое допустимое управление убегающего объекта. Из $\beta_i\left(T, S_p^i\right) \in \omega_i\left(T, S_p^i\right)$ следует, что существуют, векторы $m_i^3\left(S_p^i\right) \in M_i^3(T)$ $\overline{u}_i\left(S_p^i\right) \in P_i$, $p = \overline{1, \left|\Delta_1^i(T)\right|}$ такие что

$$\beta_i\left(T, S^i_p\right) + \sum_{\tau^i_j \in N_i(S^i_p)} \gamma_i\left(S^i_p, \tau^i_j\right) \pi_i A_i^{T-\tau^i_j} C_i \bar{v}\left(\tau^i_j\right) =$$

$$= \pi_i A_i^{T-S^i_p} B_i \bar{u}\left(S^i_p\right) - \chi_i(p, T)\, m_i^3\left(S^i_p\right) - \chi_i(p, T) \sum_{s \in \Delta^i_4(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \bar{v}(s).$$

Далее существуют велторы $m_i^2\left(S^i_p\right) \in M_i^2$, $p = \overline{1, |\Delta^i_1(T)|}$ такие, что

$$m_i^4 + m_i^3\left(S^i_p\right) = m_i^2\left(S^i_p\right).$$

Следовательно

$$\beta_i\left(T, S^i_p\right) = - \sum_{\tau^i_j \in N_i\left(S^i_p\right)} \gamma_i\left(S^i_p, \tau^i_j\right) \pi_i A_i^{T-\tau^i_j} C_i \bar{v}\left(\tau^i_j\right) +$$

$$+ \pi_i A_i^{T-S^i_p} B_i \bar{u}_i\left(S^i_p\right) + \chi_i(p, T)\left[m_i^4 - m_i^2\left(S^i_p\right)\right] +$$

$$+ \chi_i(p, T) \sum_{s \in \Delta^i_4(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \bar{v}(s).$$

Отсюда из (4) имеем

$$\pi_i A_i^{T+1} z_i^0 + \sum_{s \in \Delta^i_2(T)} \pi_i A_i^{T-s} B_i \overset{*}{u}_i(s) - m_i^4 + m_i^4 \sum_{p=1}^{|\Delta^i_1(T)|} \chi_i(p, T) -$$

$$- \sum_{p=1}^{|\Delta^i_1(T)|} \chi_i(p, T)\, m_i^2(S^i_p) + \sum_{p=1}^{|\Delta^i_1(T)|} \pi_1 A_i^{T-s^i_p} B_i \bar{u}_i(S^i_p) +$$

$$- \left(\sum_{p=1}^{|\Delta^i_1(T)|} \chi_i(p, T)\right) \sum_{s \in \Delta^i_4(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \bar{v}(s) -$$

$$- \sum_{p=1}^{|\Delta^i_1(T)|} \sum_{\tau^i_j \in N(S^i_p)} \gamma_i(S^i_p, \tau^i_j)\, \pi_i A_i^{T-\tau^i_j} C_i \bar{v}(\tau^i_j) = \pi_i A_j^{T+1} z_i^0 +$$

$$+ \sum_{s=0}^{T} \pi_i A_i^{T-s} B_i \bar{u}(s) - \sum_{s \in \Delta^i_4(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \bar{v}(s) - \sum_{p=1}^{|\Delta^i_1(T)|} \chi_i(p, T) m_i^2(S^i_p) -$$

$$- \sum_{p=1}^{|\Delta^i_1(T)|} \sum_{\tau^i_j \in N_i(S^i_p)} \gamma_i(s^i_p, \tau^i_j)\, \pi_i A_i^{T-\tau^i_j} C_i \bar{v}(\tau^i_j). \tag{5}$$

Из свойств матрицы $\Phi_i(T)$ имеем

$$\sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(T)|} \sum_{\tau_j^i \in N_i(S_p^i)} \gamma_i(S_p^i, \tau_j^i)\, \pi_i A_i^{T-\tau_i^j} C_i \overline{v}(\tau_j^i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{|\Delta_3^i(T)|} \left[\sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(T)|} \gamma_i(S_p^i, \tau_j^i) \right] \pi_i A_i^{T-\tau_j^i} C_i \overline{v}(\tau_j^i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{|\Delta_3^i(T)|} \pi_i A_i^{T-\tau_j} C_i \overline{v}(\tau_j^i) \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\pi_i A_i^{T+1} z_i^0 + \sum_{s=0}^{T} \pi_i A_i^{T-s} B_i \overline{u}(s) - \sum_{s=0}^{T} \pi_i A_i^{T-s} C_i \overline{v}(s) =$$

$$= \pi_i z_i(T+1) = \sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(T)|} \lambda_i(p, T)\, m_1^2(S_p^i)$$

Из выпуклости множества M_i^2 получаем $\sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(T)|} \chi_i(p, T)\, m_i^2(S_p^i) \in M_i^2$,

т. е. $z_i(T+1) \in M_i$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что не умалая общности, можем считать, что $\varphi_i(k, z_i^0, m_i^4) \neq 0$ для всех $i = 1,\dots, K$, $k \in \Omega_i^1$, $m_i^4 \in M_i^4(k)$. Нетрудно доказать, что множества

$$\Big\{ \lambda : \lambda \geqslant 0, \lambda\, \varphi_i(k, z_i^0, m_i^4) \in \Big[-\chi_i(p, k)\left(M_i^3(k) \overset{*}{-} G_i(k)\right) +$$

$$+ \pi_i A_i^{k-s_p^i} B_i P_i - \beta_i(k, S_p^i) - \sum_{\tau_j^i \in N_i(S_p^i)} \gamma_i(S_p^i, \tau_j^i)\, \pi_i A_i^{k-\tau_j^i} C_i v(\tau_j^i) \Big] \Big\}$$

является выпуклым компактом при всех $i = 1,\dots, K$, $k \in \Omega_i^1, v\left(\tau_j^i\right) \in Q$, $p=1\dots, \mid \Delta_1^i(k) \mid$. Далее положим

$$\lambda \left(i, k, s_p^i, v\left(\tau_j^i\right), z_i^o, m_i^4\right) = \max \Big\{\lambda : \lambda \geqslant 0,$$

$$-\lambda \varphi_i \left(k, z_0^i, m_4^i\right) \in \Big[-\chi_i (p, k) \left(M_i^3 (k) \overset{*}{-} G_i (k)\right) + \pi_i A_i^{k-S_p^i} B_i P_i -$$

$$- \beta_i \left(k, S_p^i\right) - \sum_{\tau_j^i \in N_i \left(S_p^i\right)} \gamma_i \left(S_p^i, \tau_j^i\right) \pi_i A_i^{k-\tau_j^i} C_i v \left(\tau_j^i\right) \Big\},$$

$$\lambda \left(i, k, S_p^i, v(\tau_j^i), z_i^0, M_1^4(k)\right) = \max_{m_i^4 \in M_i^4 (k)} \lambda \left(i, k, S_p^i, v \left(\tau_j^i\right), z_i^0, m_i^4\right). \tag{7}$$

Нетрудно получать следующий результат

ЛЕММА I. *Пусть* $x_j \in M_i^4$, $j = 0, 1, \dots, \tau$; $y_k \in M_i^3$, $k = 0, 1, \dots, h$ *где* $M_i^4 \subset M_i^2 \overset{*}{-} M_i^3$. *Тогда*

$$\sum_{k=o}^{h} \beta_k y_k + \sum_{j=o}^{r} \alpha_j x_j \in M_i^2,$$

причем

$$\beta_k \geqslant 0, \alpha_j \geqslant 0, \sum_{k=o}^{h} \beta_k = \sum_{j=o}^{r} \alpha_j = 1;$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=o}^{h} \beta_k y_k = \sum_{k=o}^{h} \beta_k (\alpha_o + \alpha_1 + \dots + \alpha_\tau) y_k$$

Из $y_k \in M_i^3$, $x_j \in M_i^4 \subset M_i^2 \overset{*}{-} M_i^3$ следует, что существуют векторы $z_{k_j} \in M_i^2$, $j = 0, 1 \dots, \tau$ такие, что

$$y_k = z_{k_j} - x_j, \; k = 0, 1, \dots, h.$$

Таким образом имеем

$$\sum_{k=0}^{h} \beta_k y_k = \alpha_0 \sum_{k=0}^{h} \beta_k y_k + \alpha_1 \sum_{k=0}^{h} \beta_k y_k + \dots + \alpha_\tau \sum_{k=0}^{h} \beta_k y_k =$$

$$= \alpha_0 \sum_{k=0}^{h} \beta_k (z_{k_0} - x_0) + \dots + \alpha_\tau \sum_{k=0}^{h} (z_{k\tau} - \chi_\tau) \beta_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{h} \sum_{j=0}^{\tau} \beta_k \alpha_j z_{kj} - \sum_{j=0}^{\tau} \alpha_j \lambda_j .$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{h} \beta_k y_k + \sum_{j=0}^{\tau} \alpha_j \chi_j = \sum_{k=0}^{h} \sum_{j=0}^{\tau} \beta_k \alpha_j z_{kj}$$

Из выпуклости множеств M_i^2 и учитывая

$$z_{kj} \in M_i^2 , \ \beta_k \alpha_j \geqslant 0 , \ \sum_{k=0}^{h} \sum_{j=0}^{\tau} \beta_k \alpha_j = 1,$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{h} \beta_k y_k + \sum_{j=0}^{\tau} \alpha_j \lambda_j \in M_i^2 .$$

Лемма доказана.

С начала предположим, что $K < m$. Пусть T —произвольное положительное целое число, $u_j(s)$, $s = 0, 1, \dots, T$, $j = K+1, \dots, m$ —произвольные допустимые управления j - ого преследователя. Обозначим

$$E(k, T, z^\circ) = \Big\{ v_k = (v(0), \dots, v(k)) : v(s) \in Q, \ s = 0, 1, \dots, k,$$

$$\sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(k)|} \lambda\left(i, T, S_p^i, v(\tau_j^i), z_i^\circ, M_i^4(T)\right) < 1, i = 1, \dots, K \Big\},$$

$$q_j(k, v_k) = - \sum_{s=0}^{k} \pi_j A_j^{k-s} C_j v(s),$$

$$V_j(k, T, z_0) = \{ q_j(k, v_k) : v_k = (v(0), \dots, v(k)) \in E(k, T, z^\circ) \},$$

$$N_j(k) = - \pi_j A_j^{k+1} z_j^\circ - \sum_{s=0}^{k} \pi_j A_j^{k-s} u_j(s) + M_j^2,$$

$$N(k) = \bigcup_{j=K+1}^{m} N_j(k),$$

где $k = 0, 1, \dots, T$, $j = k+1, \dots, m$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Векторы $q_j(k, v_k)$ не зависят от j, $j = K+1, \dots, m$ для всех $v_k \in E(k, T, z^\circ)$, $k = 0, 1, \dots, T$.*

Из предположения I следует что нам можно положить

$V(k, T, z^o) = V_j(k, T, z^o)$; $q(k, v_k) = q_j(k, v_k)$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. *Существуют положительное целое число T и допустимые управления $u_j(s)$, $s = 0, 1, \ldots, T$, $j = K + 1, \ldots, m$ такие, что для некоторого шага $K^* \leqslant T$*

$$N(K^*) \supset V(K^*, T, z^0),$$

ТЕОРЕМА 2. *Если в позиции $z^0 = \left(z_1^0, \ldots, z_m^0\right)$ выполнены предположения I и 2 то для позиции z^0 разрешима задача преследования к шагу $T + 1$.*

Доказательство. Для $i = 1, \ldots, K$, S_p^i, $p = 1, \left|\Delta_1^i(T)\right|$ положим

$$\Lambda_i^4\left(T, S_p^i, v\left(\tau_j^i\right)\right) = \left\{m_i^4 : m_i^4 \in M_i^4(T), \lambda\left(i, T, S_p^i, v\left(\tau_j^i\right), z_i^0, m_i^4\right) = \right.$$
$$\left. = \lambda\left(i, T, S_p^i, v\left(\tau_j^i\right), z_i^0, M_i^4(T)\right)\right\}.$$

Таким образом существует функция $m_i^4\left(T, S_p^i, v\left(\tau_j^i\right)\right)$ такая, что $m_i^4\left(T, S_p^i, v\left(\tau_j^i\right)\right) \in \Lambda_i^4\left(T, S_p^i, v\left(\tau_j^i\right)\right)$.

Пусть $\bar{v}(o), \bar{v}(1), \ldots\ldots, \bar{v}(T)$ — любое допустимое управление убегающего объекта. Тогда $u_i(s)$, $s \in \Delta_1^i(T)$, $i = 1, \ldots, K$ определяется следующим образом:

1. Если в шаге S_p^i

$$1 - \sum_{h=1}^{p}\left(i, T, S_h^i, \bar{v}\left(\tau_j^i\right), z_i^0, M_i^4(T)\right) > 0,$$

то $m_i^3\left(S_p^i\right) \in M_i^3(T)$, $u_i\left(S_p^i\right) \in P_i$, — решение уравнения

$$- \chi_i(p, T)\, m_i^3\left(S_p^i\right) - \chi_i(p, T) \sum_{s \in \Delta_4^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \bar{v}(s) - \beta_i\left(T, S_p^i\right) +$$

$$+ \pi_i A_i^{T - s_p^i} B_i u_i\left(S_p^i\right) \sum_{\tau_j^i \in N_j\left(S_p^i\right)} \gamma_j\left(S_p^i, \tau_j^i\right) \pi_i A_i^{T-\tau_j^i} C_i \bar{v}\left(\tau_j^i\right) =$$

$$= -\lambda\left(i, T, S_p^i, \bar{v}\left(\tau_j^i\right), z_i^0, M_i^4(T)\right)\left[\pi_i A_i^{T+1} z_i^0 - m_i^4\left(T, S_p^i, \bar{v}\left(\tau_j^i\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s \in \Delta_2^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} B_i u_i^*(s) - \sum_{p=1}^{\left|\Delta_1^i(T)\right|} \beta_i\left(T, S_p^i\right)\right]. \tag{8}$$

В силу (7) и предположения превосходства существует одно или много решений уравнения (8).

2. Если в шаге $S_{p^*}^i$

$$1 - \sum_{h=1}^{p^*-1} \lambda\left(i, T, S_h^i, \bar{v}\left(\tau_j^i\right), z_i^0, M_i^4(T)\right) > 0,$$

$$1 - \sum_{h=1}^{p^*} \lambda(i, T, S^i_h, \overline{v}(\tau^i_j), z^o_i, M^h_i(T)) \leqslant 0$$

Тогда существует число $\overline{\lambda}$ $(i, T, S^i_{p*}, \overline{v}(\tau^i_j), z^o_i, M^4_i(T))$ такое, что

$$0 < \overline{\lambda}(i, T, S^i_{p*}, \overline{v}(\tau^i_j), z^o_i, M^4_i) \leqslant \lambda(i, T, S^i_{p*}, \overline{v}(\tau^i_j), z^o_i, M^4_i),$$

$$1 - \Bigl[\overline{\lambda}(i, T, S^i_{p*}, \overline{v}(\tau^i_j), z^o_i, M^4_i(T)) + \sum_{h=1}^{p^*-1} \lambda(i, T, S^i_h, \overline{v}(\tau^i_j), z^o_i, M^4_i(T)\Bigr] = 0.$$

Из выпуклости множества

$$\Bigl\{\lambda : \lambda \geqslant 0, -\lambda\varphi_i(T, z^o_i, m^4_i) \in \Bigl[-\chi_i(p^*, T)(M_i(T) \pm C_i(T)) + \pi_i A_i^{T-S^i_{p*}} B_i P_i - \beta_i(T, S^i_{p*}) - \sum_{\tau^i_j \in N_i(S^i_{p*})} \gamma_i(S^i_{p*}, \tau^i_j)\, \pi_i A_i^{T-\tau^i_j} C_i \overline{v}(\tau^i_j)\Bigr]\Bigr\}$$

следует, что $\overline{\lambda}\left(i, T, S^i_{p*}, \overline{v}(\tau^i_j), z^o_i, M^4_i(T)\right)$ элемент этого множества. В этом случае векторы $m^3_i(S^i_{p*}) \in M^3_i(T)$, $u_i(S^i_{p*}) \in P_i$ — решение уравнения

$$-\chi_i(p^*, T)\, m^3_i(S^i_{p*}) - \chi_i(p^*, T) \sum_{s \in \Delta^i_4(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \overline{v}(s) + \pi_i A_i^{T-S^i_{p*}} B_i u_i(S^i_{p*}) -$$

$$-\sum_{\tau^i_j \in N_i(S^i_{p*})} \gamma_i(S^i_{p*}, \tau^i_j)\, \pi_i A_i^{T-\tau^i_j} C_i \overline{v}(\tau^i_j) - \beta_i(T, S^i_{p*}) = -\overline{\lambda}\left(i, T, S^i_{p*}, v(\tau^i_j), z^o_i,\right.$$

$$\left. M^4_i(T)\right)\Bigl[\pi_i A_i^{T+1} z^0_i + \sum_{s \in \Delta^i_2(T)} \pi_i A_i^{T-s} B_i u^*(s) - m^4_i(T, S^i_{p*}, \overline{v}(\tau^i_j)) + \sum_{p=1}^{|\Delta^i_1(T)|} \beta_i(T, S^i_p)\Bigr]. \qquad (9)$$

Далее $m_i^3(S_p^i) \in M_i^3(T)$, $u_i(S_p^i) \in P_i$, $p = p^* + 1, \ldots, |\Delta_1^i(T)|$

определяются из уравнения

$$- \chi_i(p,T)\, m_i^3(S_p^i) - \chi_i(p,T) \sum_{s \in \Delta_4^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \overline{v(s)} +$$

$$+ \pi i A_i^{T-S_p^i} B_i u_i(S_p^i) - \sum_{\tau_j^i \in N_i(S_p^i)} \gamma_i(S_p^i, \tau_j^i)\, \pi_i A_i^{T-\tau_j^i} C_i \overline{v}(\tau_j^i) -$$

$$- \beta_i(T, S_p^i) = 0. \qquad (10)$$

В силу (7) и предположения превосходства существует одно или много решений уравнений (9) и (10).

Предпищем j-му преследователю ($j = K + 1, \ldots, m$) выбирать управления $u_{k+1}(s), \ldots, u_m(s)$, для которых выполняется предположение 2.

Применяя управления $u_i(s)$, преследователи могут гарантировать окончание преследоваиния к шагу $T + 1$.

Возможно два случая.

1. Пусть хотя бы для одного целого числа $k_1 \leqslant K^*$ будет

$$q(k_1, \overline{v}_{k_1}) \notin V(k_1, T, z^0). \qquad (11)$$

Из (11) и из определения множества $V(k_1, T, z^0)$ следует, что

$$\overline{v}_{k_1} = (\overline{v}(0), \ldots, \overline{v}(k_1)) \notin E(k_1, T, z^0).$$

В силу определения $E(k_1, T, z^0)$ существует номер i, $1 \leqslant i \leqslant K$

$$\sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(k_1)|} \lambda(i, T, S_p^i, \overline{v}(\tau_j^i), z_i^0, M_i^4(T)) \geqslant 1$$

Обозначим через k_1^*, $(k_1^* \leqslant |\Delta_1^i(k_1)|)$ целое число, когда

$$\sum_{p=d}^{k_1^*-1} \lambda(i, T, S_p^i, \bar{v}(\tau_j^i), z_i^{\circ}, M_i^4(T)) < 1$$

$$\sum_{p=1}^{k_1^*} \lambda(i, T, S_p^i, \bar{v}(\tau_j^i), z_i^{\circ}, M_i^4(T)) \geqslant 1$$

Тогда существует число $\bar{\lambda}(i, T, S_{k_1^*}^i, \bar{v}(\tau_j^i), z_i^{\circ}), M_i^4)$ такое, что

$$0 < \bar{\lambda}(i, T, S_{k_1^*}^i, \bar{v}(\tau_j^i), z_i^{\circ}, M_i^4) \leqslant \lambda(i, T, S_{k_1^*}^i, \bar{v}(\tau_j^i), z_i^{\circ}, M_i^4(T))$$

$$\bar{\lambda}(i, T, S_{k_1^*}^i, \bar{v}(\tau_j^i), z_i^{\circ}, M_i^4(T)) + \sum_{p=1}^{k_1^*-1} \lambda(i, T, S_p^i, \bar{v}(\tau_j^i), z_i^{\circ}, M_i^4(T)) = 1 \tag{12}$$

Управления $u_i(s)$, $s \in \Delta_1^i(T)$ определяются уравнениями (8), (9), (10). Используя (8) — (10), получаем

$$\sum_{p=1}^{k_1^*-1} \pi_i A_i^{T-S_p^i} B_i u_i(S_p^i) = \sum_{p=1}^{k_1^*-1} \chi_i(p, T)\, m_i^3(S_p^i) + \sum_{p=1}^{k_1^*-1} \beta_i(T, S_p^i) +$$

$$+ \left(\sum_{s \in \Delta_4^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \bar{v}(s) \right) \sum_{p=1}^{k_1^*-1} \chi_i(p, T) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{k_1^*-1} \sum_{\tau_j^i \in N_i(S_p^i)} \gamma_i(S_p^i, \tau_j^i)\, \pi_i A_i^{T-\tau_j^i} C_i \bar{v}(\tau_j^i) -$$

$$- \left[\pi_i A_i^{T+1} z_i^0 + \sum_{s \in \Delta_2^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} B_i u_i^*(s) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(T)|} \beta_i(T, S_p) \right] \sum_{p=1}^{k_1^*-1} \lambda\left(i, T, S_p^i, \bar{v}(\tau_j^i), z_i^0, M_i^4(T) \right) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{k_1^*-1} \lambda\left(i, T, S_p^i, \bar{v}(\tau_j^i), z_i^0, M_i^4(T)\right) \cdot m_i^4\left(T, S_p^i, \bar{v}(\tau_j^i)\right) \tag{13}$$

$$\pi_i A_i^{T-S^i_{k_1^*}} B_i u_i(S^i_{k_1^*}) = \chi_i(k_1^*, T)\, m_i^3(S^i_{k_1^*}) + \beta_i(T, S^i_{k_1^*}) +$$

$$+ \chi_i(k_1^*, T) \sum_{s\in\Delta_4^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \overline{v}(s) + \sum_{\tau_j^i \in N_i(S_{k_1^*})} \gamma_i(S^i_{k_1^*}, \tau_j^i)\, \pi_i A_i^{T-\tau_j^i} C_i \overline{v}(\tau_j^i) -$$

$$-\left(\pi_i A_i^{T+1} z_i^0 + \sum_{s\in\Delta_2^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} B_i u_i^*(s) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(T)|} \beta_i(T, S_p^i)\right) \overline{\lambda}\left[i, T, S^i_{k_1^*}, \overline{v}(\tau_j^i), z_i^0, M_i^4(T)\right] +$$

$$+ \overline{\lambda}(i, T, S^i_{k_1^*}, \overline{v}(\tau_j^i), z_i^0, M_i^4)\, m_i^4\left(T, S^i_{k_1^*}, \overline{v}(\tau_j^i)\right) \tag{14}$$

$$\sum_{p=k_1^*+1}^{|\Delta_1^i(T)|} \pi_i A_i^{T-S_p^i} B_i u_i\left(S_p^i\right) = \sum_{p=k_1^*+1}^{|\Delta_1^i(T)|} \chi_i(p, T)\, m_i^3\left(S_p\right) +$$

$$+ \sum_{p=k_1^*+1}^{|\Delta_1^i(T)|} \beta_i(T, S_p^i) + \left(\sum_{s\in\Delta_4^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \overline{v}(s)\right) \sum_{p=k_1^*+1}^{|\Delta_1^i(T)|} \chi_i(p, T) +$$

$$+ \sum_{p=k_1^*+1}^{|\Delta_1^i(T)|} \sum_{\tau_j^i\in N(S_p^i)} \gamma_i(S_p^i, \tau_j^i)\, \pi_i A_i^{T-\tau_j^i} C_i \overline{v}(\tau_j^i). \tag{15}$$

Используя (13), (14), (15) и формулу для системы (I), получаем

$$\pi_i z_i(T+1) = \sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(T)|} \chi_i(p,T)\, m_i^3(S_p^i) - \sum_{s=0}^{T} \pi_i A_i^{T-s} C_i \overline{v}(S) +$$

$$+ \sum_{s\in\Delta_4^i(T)} \pi_i A_i^{T-S} C_i \overline{v}(s) + \sum_{p=1}^{|\Delta_1^i(T)|} \sum_{\tau_j^i\in N_i(S_p^i)} \gamma_i(S_p^i, \tau_j^i)\, \pi_i A_i^{T-\tau_j^i} C_i \overline{v}(\tau_j^i) +$$

$$+ \overline{\lambda}\left(i, T, S^i_{k_1^*}, \overline{v}\left(\tau_j^i\right), \overset{0}{z}_i, M_i^4\right) m_i^4\left(T, S^i_{k_1^*}, \overline{v}\left(\tau_j^i\right)\right) + \sum_{p=1}^{k_1^*-1} \lambda\left(i, T, S_p^i, \overline{v}\left(\tau_j^i\right),\right.$$

$$\left.\overset{0}{z}_i, M_i^4\right) m_i^4\left(T, S_p^i, \overline{v}\left(\tau_j^i\right)\right).$$

Из свойств матрицы $\Phi_i(T)$ имеем

$$\sum_{p=1}^{|\Delta_1(T)|} \sum_{\tau_j^i \in N_i(S_p^i)} \gamma_i\left(S_p^i, \tau_j^i\right)\pi_i A_i^{T-\tau_j^i} C_i \bar{v}\left(\tau_j^i\right) = \sum_{s\in\Delta_3^i(T)} \pi_i A_i^{T-s} C_i \bar{v}(s),$$

поэтому

$$\pi_i z_i(T+1) = \sum_{p=1}^{|\Delta_1^*(T)|} \chi_i(p, T)\, m_i^3\left(S_p^i\right) +$$

$$+ \bar{\lambda}\left(i, T, S_{k_1^*}^i \bar{v}\left(\tau_j^i\right), Z_i^0, M_i^4\right) m_i^4\left(T, S_{k_1^*}^i, \bar{v}\left(\tau_j^i\right)\right) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{k_1^*-1} \lambda\left(i, T, S_p^i, \bar{v}\left(\tau_j^i\right), z_i^0, M_i^4(T)\, m_i^4\left(T, S_p^i, \bar{v}\left(\tau_j^i\right)\right)\right).$$

Учитывая (12) и в силу леммы 1, получаем $\pi_i z_i(T+1) \in M_i^2$, т.е. $z_i(T+1) \in M_i$. А это значит, что i-й преследователь ловит убегающего в шаг $T+1$.

2. Пусть $q(k, \bar{v}_k) \in V(k, T, z^0)$ для всех $k \leqslant K^*$.

Из предположения 2 следует, что существуют допустимые управления $u_j(s)$, $s = 0, 1, \dots, T$, $j = K+1, K+2, \dots, m$ такие, что

$$N(K^*) = \bigcup_{j=i+1}^{m}\left[-\pi_j A_j^{K^*+1} z_j^0 - \sum_{s=0}^{K^*} \pi_j A^{K^*-s} B_j u_j(s) + M_j^2\right] \supset V(K^*, T, z^0).$$

А это значит, что существует номер q, $K+1 \leqslant q \leqslant m$ такой, что

$$-\pi_q A_q^{K^*+1} z_q^0 - \sum_{s=0}^{K^*} \pi_q A_q^{K^*-s} B_q u_q(s) + M_q^2 \supset V(K^*, T, z^0),$$

т. е. существует вектор $m_q^2 \in M_q^2$ такой, что

$$\pi_q A_q^{k^*+1} z_q^0 + \sum_{s=0}^{k^*} \pi_q A_q^{k^*-s} B_q u_q(s) - \sum_{s=0}^{k^*} \pi_q A_q^{k^*-s} C_q \bar{v}(s) = m_q^2.$$

Таким образом имеем $\pi_q z_q(K^*+1) \in M_q^2$, т.е. убегающего ловит один из преследователей с номерами $K+1 \leqslant q \leqslant m$ в шаг K^*+1.

Теорема доказана.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. (**Условие прочесывания множества $V(k, T, z^0)$ множеством $N(k)$ на отрезке $[K_1, K_2]$**). *Существуют положительные целые числа K_1, K_2: $K_1 \leqslant K_2 \leqslant T$ и функция $\xi(x, k) : L_i^1 \times \{K_1, K_1+1, \dots, K_2\} \to R^1$ такие, что* а/ *Если* $v_k = (v(0), \dots, v(k)) \in E(k, T, z_0)$, $K_1 + 1 \leqslant k \leqslant K_2$

$$\xi\left(-\sum_{s=0}^{k-1} \pi_j A_j^{k-1-s} C_j v(s);\ k-1\right) < 0,$$

то $\xi\left(-\sum_{s=0}^{k} \pi_j A_j^{k-1-s} C_j v(s);\ k\right) \leqslant 0,$ (16)

где $j \in [K+1, m]$.

б/ $\{x : \xi(x, K_1) \leqslant 0\} \supset V(K_1, T, z^0)$, (17)

$$V(K_1, T, z^0) \cap \{x : \xi(x, K_1) = 0\} \neq \phi \qquad (18)$$

в/ $N(k) \supset V(k, T, z^0) \cap \{x : \xi(x, k) = 0\}$ при всех $K_1 \leqslant k \leqslant K_2$. (19)

г/ $N(K_2) \supset V(K_2, T, z^0) \cap \{x : \xi(\lambda, T_2) \leqslant 0\}$. (20)

ТЕОРЕМА 3. *Если в позиции* $z_0 = (z_1^0, \dots, z_m^0)$ *выполнены предположения 1 и 3 то для позиции* z^0 *разрешима задача преследования к шагу* $T+1$.

Доказательство. Пусть $\bar{v}(0), \dots, \bar{v}(T)$ — любое допустимое управление убегающего объекта. Тогда управления $u_i(s)$, $s = 0, \dots, T$, $i = 1, \dots, m$ определяются как в теореме 2.

Возможно три случая.

1. Пусть хотя бы для одного целого числа $k_1 \leqslant K_2$ будет

$$q(k_1, \bar{v}_{k_1}) \notin V(k_1, T, z^0)$$

Как и в доказательстве теоремы 2 можно показать, что существует номер i, $1 \leqslant i \leqslant K$ такой что $\pi_i z_i(T+1) \in M_i^2$, т.е. i-й преследователь ловит убегающего в шаг $T+1$,

2. Пусть $q(k, \bar{v}_k) \in V(k, T, z^0)$ для всех $k \leqslant K_2$ и $\xi(q(K_2, \bar{v}_{K_2}), K_2) \leqslant 0$.

Отсюда из (20) следует, что $q(K_2, \bar{v}_{K_2}) \in N(K_2)$. Таким образом существует номер p, $K+1 \leqslant p \leqslant m$ такой, что $\pi_p z_p(K_2+1) \in M_p^2$,

т.е. убегающего ловит один из преследователей с номерами $j = K+1, \dots, m$ в шаг K_2+1.

3. Пусть $q(k, \bar{v}_k) \in V(k, T, z^0)$ для всех $k \leqslant K_2$ и $\xi(q(K_2, \bar{v}_{K_2}), K_2) > 0$

Поэтому из (17) имеем

$$\begin{cases} \xi(q(K_1, \bar{v}_{K_1}), K_1) \leqslant 0 \\ \xi(q(K_2, \bar{v}_{K_2}), K_2) > 0 \end{cases} \qquad (21)$$

Из (21) следует, что существует целое число K^*, $K_1 + 1 \leqslant K^* \leqslant K_2$ такое, что

$$\xi(q(K^* - 1, \bar{v}_{K^*-1}), K^* - 1) \leqslant 0$$

$$\xi(q(K^*, \bar{v}_{K^*}), K^*) > 0 \qquad (22)$$

Из (16) и (22) следует, что $\xi(q(K^* - 1, \bar{v}_{K^*-1}), K^* - 1) = 0$.

С другой стороны $q(K^* - 1, \bar{v}_{K^*-1}) \in V(K^* - 1, T, z^0)$. Поэтому из (19) имеем $q(K^* - 1, \bar{v}_{K^*-1}) \in N(K^* - 1)$

Отсюда следует, что существует номер s, $K + 1 \leqslant s \leqslant m$ такой, что $\pi_s\ z_s(K^*) \in M_s^2$, т. е. s-й преследователь ловит убегающего в шаг K^*.

Теорема доказана.

Теперь пусть $K = m$, т. е. предположение превосходства выполняется для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. *Пусть T — положительное целое число такое, что $E(m, T, z^0) = \phi$. Тогда для позиции z^0 разрешима задача преследования к шагу $T + 1$.*

II. Как видно из предыдущего пункта, предположение об информации, используемое нами, является достаточно общим. Такой вид включает в себе как частный случай полную и неполную информацию, а также информацию с запаздыванием.

В этом пункте рассматривается частный случай, когда информация является полной, т. е. i-й преследователь на каждом k-ом шаге знает управление $v(k)$ убегающего объекта. А это значит, что $N_i(k) = \{k\}$ при всех $k = 0, 1, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

Изгляются частные формы теорем 1—3, которые полезны для исследования конкретных игр преследования с многими лицами.

Будем считать, что для i-ого преследователя выполнено условие превосходства, если существуют функции целых аргументов k, s $\chi_i(k, s)$: $[0, +\infty) \times [0, k) \to R^1$;

$\chi_i(k, s) \geqslant 0$; $\sum\limits_{s=0}^{k} \chi_i(k, s) = 1$, и выпуклые компакты $M_i^3(k)$, $M_i^2 \overset{*}{-} M_i^3(k) \neq \phi$,

такие, что для всех s, k;

$= 0, 1, \ldots, k$; $k \geqslant 0$ непусты множетсва

$$\omega_i(k, s) = \left[-\chi_i(k, s)\, M_i^3(k) + \pi_i A_i^{k-s} B_i P_i \right] \overset{*}{-} \pi_i A_i^{k-s} C_i Q.$$

Из условия превосходства следует, что существует функции целых аргументов k, s

$$\beta_i(k, s) : [0, +\infty) \times [0, k] \to R^n;\ \beta_i(k, s) \in \omega_i(k, s).$$

Число K определяется как в пункте 1. Пусть $M_i^4(k) \subset M_i^2 \overset{*}{-} M_i^3(k)$ компакты и $m_i^4 \in M_i^4(k)$, Введем в рассмотрение для $i = 1, \dots K$ векторы

$$\varphi_i(k, z_i^0, m_i^4) = \pi_i A_i^{k+1} z_i^0 - m_i^4 + \sum_{s=0}^{k} \beta_i(k, s).$$

Следствие 1. *Пусть существует номер i и положительное целое число T такие, что $\varphi_i(T, z_i^o m_i^4) = 0$, то игра (1) — (2) заканчивается за $T+1$ шагов.*

Из следствия 1 следует, что не умалая общности, можем считать, что $\varphi_i(k, z_i^o, m_i^4) \neq 0$ для всех $i = 1,2,\dots, K, k \geqslant 0$; $m_i^4 \in M_i^4(k)$ Положим

$$\lambda(i, k, s, v, z_i^o, m_i^4) = \max\Big\{\lambda : \lambda \geqslant 0, -\lambda\varphi_i(k, z_i^o, m_i^4) \in$$

$$\in \left[-\chi_i(k, s) M_i^3(k)^* \pi_i A_i^{k-s} B_i P_i - \pi_i A_i^{k-s} C_i v - \beta_i(k, s)\right]\Big\},$$

$$\lambda(i, k, s, v, z_i^o, M_i^4(k)) = \max_{m_i^4 \in M_i^4(k)} \lambda(i, k, s, v, z_i^o, m_i^4).$$

В том случае, когда $K < m$, введем ещё в рассмотрение множество $E(k, T, z^0) =$ $\{v_k = (v(o), \dots, v(k)) : v(s) \in Q, s = 0,1,\dots, k;$

$$\sum_{s=0}^{k} \lambda(i, T, s, v(s), z_i^o, M_i^4(T)) < 1 \text{ при всех } i = 1,\dots, k\Big\}$$

Векторы и множества $q_j(k, v_k), V_j(k, T, z^0), N_j(k), N(k)$. определяются как в пункте 1.

Следствие 2. *Если в позиции $z^0 = (z_1^o, \dots, z_m^0)$ выполнены предположения 1 и 2 то для позиции z^0 разрешима задача преследования к шагу $T+1$.*

Теперь пусть $K = m$. Как следствие теоремы 4 имеет место следующее

Следствие 3. *Пусть существует положительное целое число T и при всех $v_T = (v(o), \dots, v(T))$; $v(s) \in Q$, $s = 0,1,\dots, T$*

$$\sum_{s=0}^{T} \lambda(i, T, s, v(s), z_i^o, M_i^4(T)) \geqslant 1, \; i = 1,\dots, m.$$

Тогда для позиции z^0 преследование заканчивается за $T+1$ шагов.

Пример. Пусть движения векторов $z_i \in R^2$, $i = 1, \dots, m$ описываются системой разностных уравнений

$$z_i(k+1) = z_i(k) + u_i(k) + v(k);\; z_i(o) = z_{i,o}\; i = 1,\dots m \tag{23}$$

где $k = 0,1,\dots$ — номер шага $u_i(k) \in R^2$, $v(k) \in R^2$. Управления $u_i(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям:

$$\| u_i(k) \| \leqslant \rho_i,\; \| v(k) \| \leqslant б,\; i = 1,\dots, m, \tag{24}$$

где $\rho_i > 0$, $б > 0$. Будем считать, что игра (23) – (24) заканчивается из начальной точки $z_o = (z_{1,o},\dots, z_{m,o})$, где $z_{i,o} \neq 0$, $i = 1,\dots, m$ за K_1 шагов, если существует такой номер p, $1 \leqslant p \leqslant m$, что $z_p(K_1) = 0$. В этом случае предположим что $N_i(k) = \{k\}$ при всех $i = 1,\dots, m$, $k = 0, 1,\dots$. В приводимом примере $\beta_i(k,s) = 0$ при всех $k \geqslant s$, $k = 0, 1,\dots$, $m_i^4 = 0$.

Ясно что

$$\lambda(i, k, s, v, z_{i,o}) = \max\{\lambda \geqslant 0 : -\lambda z_{i,o} \in S(\rho_i) + v\},$$

где $S(\rho_i)$ — шар с центром в нуле и радиусом ρ_i.

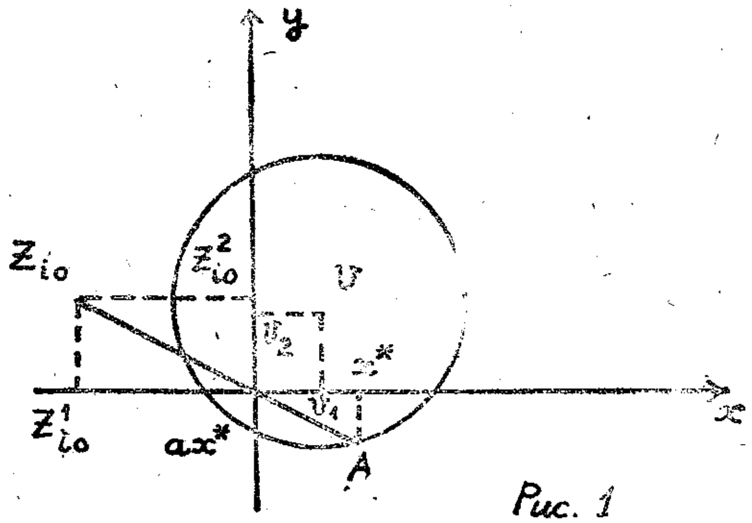

Рис I

Граница шара $S(\rho_i)$ имеет вид

$$(x - v_1)^2 + (y - v_2)^2 = \rho_i^2$$

и OA имеет вид $y = ax$, где $v = (v_1, v_2)$, $z_{i,0} = (z^1_{i,0}, z^2_{i,0})$,

$a = z^2_{i,0} \cdot (z^1_{i,0})^{-1}$. Имеем при всех $k \geqslant s$, $k = 0,1,\dots$ $i = 1,\dots m$

$$\lambda(i, k, s, v, z_{i,0}) = \frac{\overline{AO}}{\| z_{i,0} \|} = \frac{| x^* | \sqrt{1-a^2}}{\| z_{i,0} \|} = \frac{| x^* |}{| z^1_{i,0} |} =$$

$$= \frac{1}{| z^1_{i,0} |} \left| v_1 + a v_2 + \sqrt{2 a v_1 v_2 + \rho_i^2 (1 + a^2) - v_2^2 - a v_1^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{\| z_{i,0} \|^2} \left| v_1 z^1_{i,0} + v_2 z^2_{i,0} + \sqrt{2 z^1_{i,0} z^2_{i,0} v_1 v_2 + \| z_{i,0} \|^2 \rho_i^2 - v_2^2 (z^1_{i,0})^2 - v_1^2 (z^2_{i,0})^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{\| z_{i,0} \|^2} \left| < v, z_{i,0} > + \sqrt{< v, z_{i,0} >^2 + \| z_{i,0} \|^2 (\rho_i^2 - \| v \|^2)} \right|$$

Из $\| v \|^2 \leqslant б^2$ следует, что если, $< v, z_{i,0} > \geqslant 0$, то

$$\lambda(i, k, s, v, z_i^0) \geqslant \frac{1}{\| z_{i,0} \|^2} \left| < v, z_{i,0} > + \sqrt{\| z_{i,0} \|^2 (\rho_i^2 - б^2) + < v, z_{i,0} >^2} \right|.$$

Если $\Delta = \min\limits_{\|v\| \leqslant 1} \max\limits_{i=1,\dots,m} \langle v, z_{i,o} \rangle > 0$, что эквивалентно включению $O \in \mathrm{int\ co} \{ z_{1,o}; \dots; z_{m,o} \}$, где $\mathrm{co} \{ z_{1,o}; \dots; z_{m,o} \}$ — выпуклая оболочка векторов $z_{1,o}; \dots; z_{m,o}$, то существует такой номер p, $1 \leqslant p \leqslant m$ и положительное целое число T, что

$$\sum_{s=o}^{T} \lambda(p, T, s, v(s), z_{p,o}) \geqslant 1$$

при всех $v_T = (v(0), \dots, v(T))$, $\|v(s)\| \leqslant б$, $s = 0, \dots, T$.

Таким образом доказана следующая

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $O \in \mathrm{int\ co} \{ z_{1,o}, \dots, z_{m,o} \}$, то игра (23) — (24) заканчивается за конечное число шагов из начальной точки $(z_{1,o}; \dots; z_{m,o})$.*

Замечание. В этом случае управления преследователей имеют вид

$$u_i(k) = u_i(v(k)) = v(k) - \rho(i, T, k, v(k), z_{i,o}) z_{i,o}.$$

Легко видеть, что

$$T = \begin{cases} \dfrac{\| z_{i,o} \|^2}{\Delta} & \text{если } \dfrac{\| z_{i,o} \|^2}{\Delta} \text{ — целое число} \\ \left[\dfrac{\| z_{i,o} \|^2}{\Delta} \right] + 1 & \text{если } \dfrac{\| z_{i,o} \|^2}{\Delta} \text{ — дробное число,} \end{cases}$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Л. Григоренко, *О квазилинейной задаче преследования несколькими объектами*, ДАН СССР, 249 (1979), 1004–1007.

2. Н.Л. Григоренко, *К линейной задаче преследования несколькими объектами*, ДАН СССР, 258 (1981), 275–279.

3. Н.Л. Григоренко, *Преследование одного убегающего несколькими управляемыми объектами*, ДАН СССР, 268 (1983), 529–532.

4. Н.Б. Пшеничный, А.А. Чикрий и И.С. Раппопорт, *Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями*, ДАН СССР, 256 (1981) 531–535.

5. Н.Б, Пшеничный и А.А. Чикрий и И.С. Раппопорт, *Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений*, ДАН СССР, 259 (1981), 785–789.

6. Н. Ю. Сатимов и В.В. Рихсиев и А.А. Хамдамов, *О задаче преследования для линейных дифференциальных и дискретных игр многих лиц с интегральными ограничениями*, Математический сборник, новая серия т. 118 (160), 4 (8), 1982, 28–50.

7. А.А. Хамдамов, *Задача преследования для одного класса дискретных игр многих лиц с интегральными ограничениями*, ВИНИТИ, № 3802—82 деп, 1982, 1—18.

8. Фан Зуй Хай, *О задаче преследования несколькими объектами в линейных дискретных играх*, ДАН АзССР, 39 (1983), 10–14.

9. Фан Зуй Хай, *Задачи преследования в линейных дискретных играх с общими типпами информации*, Acta Mathematica Vietnamica, 9(1984), 213–217.

Поступила в Редакцию 15 января 1986 г.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ХАНОЙ, ВЬЕТНАМ.