ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 12 No 1 (1987)

ЛИНЕЙНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

ЧИНЬ НГОК МИНЬ

О. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучается уравнение

$$A\,(D)\,u\,(x) = h\,(x), \tag{1}$$

при этом, $A\,(D)$ —дифференциальный оператор бесконечного порядка (д. о. б. п.) (точное его определение будет дано позже), $h\,(x)$ — функция из некоторого функционального пространства.

Необходимость изучения уравнения (1) возникается, в основном, в двух ситуациях. Во-первых, в многих прикладных задачах, для описания некоторого реального процесса используется уравнение, в котором участвует д. о. б. п. Для описания релятивистки свободной частицы использовали уравнение шрёдингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c}{w}\sqrt{1 - w^2\,\Delta}\;u.$$

В этом уравнении, если разложим корень в ряд по Δ, то мы получим д. о. б. п. (см. [8]).

Во-вторых, для решения некоторых задач дифференциального уравнения в частных производных конечного порядка использовали метод, при котором появится естественно д. о. б. п, или уравнение относительно этого оператора. Например, при изучении задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (2)\\ u\,(0, x) = \varphi\,(x), & (3)\end{cases}$$

И. М Генфанд и Г. Е. Шилов (см. [3]) указали следующий метод решения. Считая, сначала, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ как параметр, получим формальное решение

$$u\,(t, x) = e^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\,\varphi(x). \tag{4}$$

Теперь, в (4) под $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ мы понимаем обычный его смысл, а

$e^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}$ — д. о. б. п., и мы получим неформальное

решение задачи Коши (2), (3) (конечно $\varphi(x)$ должна удовлетворять некоторым условиям, чтобы ряд (4) сходился). Этому методу посвящают и работы [1], [2] и др. К краевым задачам теории упругости А.И. Лурье, В.В. Власов, В,А. Агарев и др. применили так называемый « метод начальных функций », суть которого заключается в переходе от краевой задачи к более простой задаче – задаче Коши (см. [4], [5], [6].) В этом переходе часто встречаются уравнения типа (1). При исследовании дифференциально-разностного уравнения, В.П. Маслов см. [7] указал, что можно переписать разностные уравнения в виде уравнения, в котором участвует д.о.б.п. И таких прочих примеров можно указать много.

Понятие псевдодифференциального оператора (п.д.о.) с аналитическим символом было введено впервые Ю.А. Дубинским в [1] и является обобщением понятия д.о.б.п. Локально п.д.о. с аналитическим символом представляет собой д.о.б.п. Ю.А. Дубинский успешно использовал технику д.о.б.п. для исследования с новых позиций ряд задач дифференциального уравнения в частных производных и уравнения математической физики.

Остановимся кратко на содержании каждого параграфа. В первом параграфе излагается построение одного варианта теории обобщенных фуиний $W^{+\infty}(\Omega)$ и $W^{-\infty}(\Omega)$. В этих пространствах п.д.о. с аналитическим символом в Ω действует инвариантно и непрерывно. Отметим, что наше основное пространство $W^{+\infty}(\Omega)$ существенно шире, чем $H^{+\infty}(\Omega)$ в [1]. Тем не менее, пространство обобщенных функций остаётся достаточно широким, что, в частности, проблема существования фундаментального решения задачи Коши для произвольного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами решается положительно. Отметим также, что преобразование Фурье обобщённых функций из $W^{-\infty}(\Omega)$ выражается в простом явном виде.

Второй параграф посвящён качественному исследованию уравнения (1). Получается теорема о существовании решения из $W^{\infty}(\Omega)$ уравнения (1) при любой правой части $h(x)$, принадлежащей этому же пространству. Изучается нетеровость (1) и при нетеровом д. о. б.п. $A(D)$ была постановлена задача Коши для этого уравнения. В конце параграфа доказывается теорема о возможности решения дифференциального уравнения бесконечного порядка (д.у.б.п.) последовательностью дифференциальных уравнений конечного порядка. При этом, отметим, что нам пришлось аналитическим методом передоказать теорему Шварца — Мангранжа – Хёршандера — Паламодова о делении обобщённых функции на любую аналитическую функцию действительных переменных.

В третьем параграфе мы изложим одно применение результатов двух параграфов к краевым задачам в бесконечной полосе. А именно, мы исследуем « метод начальных функций » в функциональном пространстве $W^{\infty}(\Omega)$.

Параграф I является подробным изложением некоторых основных результатов, анонсированных в [11].

Автор выражает свою искреннюю признательность Чан Дык Вану за постановку задачи и постоянную поддержку, Ха Зуй Вую за ценные советы, а также участникам семинара по дифференциальному уравнению в частных производных при Институте математики (г. Ханой) за обсуждение полученных результатов.

§I. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $x \in \mathbf{R}^N_x$, $N \geqslant 1$, $\xi \in \mathbf{R}^N_\xi$ — действительные переменные; $R=(R_1, R_2, \ldots, R_N)$, $0 < R_j \leqslant +\infty$, $j = 1, \ldots, N$ — действительный вектор. Через S_R обозначим параллелепипед

$$S_R = \{ \xi \in \mathbf{R}^N_\xi, |\xi_j| < R_j, j=1, \ldots, N \}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Пространством основных функций* $W^\infty(S_R)$ *назовём множество функций* $f : \mathbf{R}^N_x \to \mathbf{C}^1$ *таких, что*

а) f *допускает аналитическое продолжение как целая функция на* $\mathbf{C}^N$

б) *Существуют константы* C, m *и вектор* $r = (r_1, \ldots, r_N)$ *такие, что* $r < R$, *т. е.* $r_j < R_j$, $j = 1, \ldots, N$; *и*

$$|f(z)| \leqslant C(1 + |z|)^m \exp \left(\sum_{j=0}^{N} r_j \, |Im \ z_j| \right). \tag{5}$$

По теореме Пэли—Винера об обобщённой функции с компактным носителем (см. например, [12]) *имеет место следующее*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Функция* $f(x)$ *принадлежит пространству* $W^\infty(S_R)$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит* $\mathcal{S}'$ *и её преобразование Фурье имеет компактный носитель, содержащийся целиком в* S_R.

Примерами функций из $W^\infty(S_R)$ могут служить

а) Все функции из $H^\infty(S_R)$ (см. [1]),

б) Все функции $\mathcal{M}_{\nu p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ и $0 \leqslant \nu_j < R_j$, $j=1, \ldots, N$ (см. [13], стр. 101, 110)

в) Пусть $\lambda \in S_R$. Тогда квазимногочлен вида $e^{i\lambda x} P_m(x)$ принадлежит $W^\infty(S_R)$ В частности, многочлены 1, x, x^2 ... принадлежат $W^\infty(S_R)$.

Введём в $W^\infty(S_R)$ следующую сходимость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится в* $W^\infty(S_R)$ *к* $f(x)$, *если*

i) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}^N$, **(6)**

ii) $\exists\, C, m, r < R$:

$$|f_n(z)| \leqslant C(1+|z|)^m \exp(r\,|Im\, z|). \tag{7}$$

Замечание. Предельная функция, как легко видеть, также удовлетворяет (5).

Пусть $\{r_n\}$ — последовательность N - мерных векторов таких, что $r_n < r_{n+1}$ $r_n < R$, $n = 1, 2,\ldots$ и r_n сходится к R. В этом случае, $\overline{S}_{r_n} \subset S_R$. Определим пространство $W_m^\infty(\overline{S}_{r_n})$ как совокупность целых функций на $\mathbf{R}^N$ таких, что её аналитическое продолжение на $\mathbf{C}^N$ допускает оценку

$$|f(z)| \leqslant C\,(1+|z|)^m \exp\,(r_n|Im\, z|).$$

Видно, что

$$W_m^\infty(\overline{S}_{r_n}) \subset W_{m+1}^\infty(\overline{S}_{r_n}) \subset W^\infty(S_R),\ m,\ n = 1,2\ldots$$

Положим

$$W^\infty(\overline{S}_{r_n}) = \varinjlim_{m\to\infty} W_m^\infty(\overline{S}_{r_n}).$$

В каждом пространстве $W_m^\infty(\overline{S}_{r_n})$ определим норму

$$\|f\|_{m,n} = \sup_{z\in\mathbf{C}^N} |f(z)|\,(1+|z|)^{-m} \exp\,(-r_n\,|Im\, z|).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Вложение*

$$W_m^\infty(S_{r_n}) \subset W^\infty(S_R)$$

является непрерывным.

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_k\}$ сходится к f по норме $\|\cdot\|_{m,n}$. Покажем, что она сходится и в $W^\infty(S_R)$. На самом деле, так как $\{f_k\}$ — — сходящаяся по норме последовательность, то $\|f_k\|_{m,n} < C < \infty$, $k = 1,2,\ldots$ Отсюда вытекает оценка (7). Докажем (6). Пусть $x \in \mathbf{R}^N$. Тогда

$$|f_k(x) - f(x)|\,(1+|x|)^{-m} \leqslant \|f_k - f\|_{m,n} \to 0$$

и ч. т.д.

Нетрудно доказать и следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Имеет место равенство*

$$\varinjlim_{n} W^\infty(\overline{S}_{r_n}) = W^\infty(S_R). \tag{8}$$

Таким образом, мы можем ввести в $W^\infty(S_R)$ топологию индуктивного предела. Для этой топологии, верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Для того чтобы последовательность $\{f_k(x)\}$ сходилась к $f(x)$ в смысле определения 1.3. необходимо и достаточно, чтобы она сходилась по топологии индуктивного предела (8), т.е. существуют m и n такие, что $f_k(x)$ сходится к $f(x)$ по норме $\|\cdot\|_{m,n}$.*

Доказательство. Достаточность была доказана (см. предложение 1.4). Докажем необходимость. По определению 1.3. существуют константы C, m, $r < R$ такие, что

$$| f_k(z) | \leqslant C(1+|z|)^{m-1} \exp(r\,|Im\,z|), k=0,1,..., \tag{9}$$

где $f_0(z) = f(z)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = R$, то существует n такое, что $r < r_n < R$. Тогда $f_k(x) \in W_m^\infty(\bar{S}_{r_n})$, $k = 0,1,...$ Нам остаётся только доказать, что $\|f_k - f\|_{m,n} \to 0$ при $k\to\infty$. Прежде всего, из (9) следует, что последовательность $\{f_k(z)\}$ ограничена по совокупности на каждом компакте. В то же время, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ для любой $x\in \mathbf{R}^N$. Следовательно, $\{f_k(z)\}$ сходится к $f(z)$ равномерно на каждом компакте (см. [10]).

Из (9) вытекает

$$| f_k(z) | (1+|z|)^{-m} \exp(r_n\,|Im\,z|) \leqslant C(1+|z|)^{-1}.$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$, существует достаточно большой компакт $K \subset \mathbf{C}^N$ такой, что для $z \in \mathbf{C}^N \setminus K$ выполняется оценка

$$| f_k(z) | (1+|z|)^{-m} \exp(-r_n\,|Im\,z|) \leqslant C(1+|z|)^{-1} < \varepsilon/2,$$

где $k = 0,1,...$ Отсюда, при $z \in \mathbf{C}^N \setminus K$

$$| f_k(z) - f(z) | (1+|z|)^{-m} \exp(-r_n\,|Im\,z|) < \varepsilon, \; k = 1, 2,... \tag{10}$$

С другой стороны, существует число l такое, что для всех $k > l$

$$\max_{z\in K} | f_k(z) - f(z) | (1+|z|)^{-m} \exp(-r_n\,|Im\,z|) < \varepsilon. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что при $k > l$

$$\|f_k - f\|_{m,n} < \varepsilon \qquad \text{ч. т. д.}$$

Итак, мы уже показали одну топологию, сходимость по которой эквивалентна сходимости в смысле определения 1. 3. Напомним, что $\mathcal{E}'(\Omega)$ — пространство обобщённых функций с компактным носителем в Ω. В этом пространстве мы имеем дело с следующей сходимостью: g_n сходится к g в $\mathcal{E}'(\Omega)$ если 1) $g_n \to g$ по слабой топологии; 2) $\operatorname{supp} g_n \subset L \subset \Omega$, $n = 1, 2, ...$; L — компакт. Сходимости в $W^\infty(S_R)$ и $\mathcal{E}'(S_R)$ были тесно связаны. А именно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 7. *$f_k(x)$ сходится к $f(x)$ в $W^\infty(S_R)$ тогда и только тогда, когда их преобразование Фурье $\tilde{f}_k(\xi)$ сходится к $\tilde{f}(\xi)$ в $\mathcal{E}'(S_R)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_k(x)$ сходится к $f(x)$ в $W^\infty(S_R)$. По определению

$$|f_k(z)| \leqslant C(1+|z|)^m \exp(r|Im\, z|) \tag{12}$$

для всех k и некоторых, независящих от k, констант C, m, n. В силу теоремы Пэли-Винера,

$$\operatorname{supp} \tilde{f}_k(\xi) \subset S_r, \; k=1,2,\dots$$

Более того, из (12) следует, что

$$|f_k(x)| \leqslant C(1+|x|)^m, \; x \in \mathbf{R}^N.$$

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ — произвольная функция. Тогда

$$|f(x)\varphi(x)| \leqslant C(1+|x|)^m |\varphi(x)| < C'(1+|x|)^{-N-1}$$

Функция $(1+|x|)^{-N-1}$ суммируема на $\mathbf{R}^N$, поэтому, по теореме Лебега, мы имеем

$$\lim_{k\to\infty} <f_k,\varphi> = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^N} f_k(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N} \lim f_k(x)\varphi(x)\,dx = <f,\varphi>.$$

Преобразование Фурье непрерывно в слабой топологии $\mathcal{S}'$, поэтому $\tilde{f}_k(\xi)$ слабо сходится к $\tilde{f}(\xi)$.

Достаточность. Пусть $\tilde{f}_k(\xi)$ сходится к $\tilde{f}(\xi)$ в $\mathcal{E}'(S_R)$.

Через $\mathcal{S}_l$, $l=0,1,\dots$ обозначаем пополнение пространства $\mathcal{S}$ по норме

$$\|\varphi\|_l = \sup_{\substack{|\alpha|\leqslant l \\ x\in\mathbf{R}^N}} (1+|x|)^l \; |D^\alpha\varphi(x)|$$

и $\mathcal{S}_{-l} = (\mathcal{S}_l)'$ с нормой $\|\cdot\|_{-l}$. Нам известно, что если обобщённая функция принадлежит $\mathcal{S}_{-l}$, то её порядок сингулярности не превосходит l и последовательность, сходящаяся в $\mathcal{S}'$ будет сходится в некотором $\mathcal{S}_{-l}$ по норме $\|\cdot\|_{-l}$ (см. [12]). Отсюда и в силу теоремы Пэли-Винера следует, что

$$|f_k(z)| \leqslant C(1+|z|)^m \exp(r\, Im\, z|), \; k=1,2,\dots,$$

где C m, r — независящие от k константы.

Пусть $x \in \mathbf{R}^N$. Оценим

$$|f_k(x)-f(x)| = |<\tilde{f}_k-\tilde{f}, \eta_{S_r}(\xi)\, e^{-ix\xi}>| \leqslant \|f_k-f\|_{-m} \|\eta_{S_r} e^{-ix\xi}\|_m \to 0$$

Доказательство окончено.

СЛЕДСТВИЕ 1.8. *Следующие вложения*

$$H^{\infty}(S_R) \subset W^{\infty}(S_R)$$

$$\mu_{\nu p} \subset W^{\infty}(S_R),\ 0 \leqslant \nu < R,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

являются непрерывными.

Переходим к рассмотрению действия д.о.б.п. в просранстве $W^{\infty}(S_R)$. Пусть

$$A(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \xi^\alpha,\ a_\alpha \in \mathbf{C}^1\ ;\ \xi \in S_R \tag{13}$$

аналитическая функция действительных переменных с комплексозначными значениями, определенная в S_R. Д.о.б.п. с аналитическим символом $A(\xi)$ назовём оператор вида

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha\ , \tag{14}$$

где $D = (D_1, D_2, \ldots, D_N)$, $D_j = (-i)\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

ТЕОРЕМА 1.9 (основная). *Д.о.б.п.* (14) *с символом* (13), *аналичическим в* S_R *действует инвариантно и непрерывно в* $W^{\infty}(S_R)$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in W^{\infty}(S_R)$ — произвольная функция. Покажем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(D)f(x)$, $A_n(D) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha D^\alpha$, в пространстве $W^{\infty}(S_R)$. Определим обобщенную функцию $g(\xi) \in \mathcal{C}'(S_R)$ равенством

$$g(\xi) = A(\xi)\,\tilde{f}(\xi).$$

Так как конечная сумма $A_n(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha \xi^\alpha$ разложения Тейлора сходится к $A(\xi)$ в $C^{\infty}(S_R)$, то

$$\lim_{n\to\infty} < A_n(\xi)\,\tilde{f}(\xi), \varphi(\xi) > = \lim_{n\to\infty} < \tilde{f}(\xi), A_n(\xi)\ \varphi(\xi) >$$

$$= < \tilde{f}(\xi), A(\xi)\,\varphi(\xi) > = < g(\xi), \varphi(\xi) >.$$

С другой стороны, $\operatorname{supp} A_n(\xi)\ \tilde{f}(\xi) \subset \operatorname{supp} \tilde{f}(\xi)$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \tilde{f} = g$ в $\mathcal{C}'(S_R)$. Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\lim_{n\to\infty} A_n(D)\, f(x) = \check{g}(x).$$

Положим $A(D)\ f(x) \overset{\text{def}}{=} \check{g}(x)$ и инвариантность д.о.б.п. доказана.

Докажем непрерывность. Пусть $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ в $W^{\infty}(S_R)$. Тогда $\tilde{f}_n(\xi)$ сходится к $\tilde{f}(\xi)$ в $\mathcal{C}'(S_R)$. Следовательно, $A(\xi)\,\tilde{f}_n(\xi)$ сходится к $A(\xi)\ f(\xi)$ в $\mathcal{C}'(S_R)$. Применяя опять обратное преобразование Фурье, получаем

$$\lim_{n\to\infty} A(D)\ f_n(x) = A(D)\ f(x).$$

Теорема 1, 9 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 10. *Пространством обобщённых функций* $W^{-\infty}(S_R)$ *над* $W^{\infty}(S_R)$ *будем называть множество линейных и секвенциально непрерывных функционалов над* $W^{\infty}(S_R)$.

Введём в $W^{-\infty}(S_R)$ преобразование Фурье по формуле

$$< \tilde{h}(\xi),\ \tilde{\varphi}(-\xi) > = (2\pi)^N < h(x),\ \varphi(x) >, \qquad (15)$$

где $h(x) \in W^{-\infty}(S_R)$, $\varphi(x) \in W^{\infty}(S_R)$, $\tilde{\varphi}(-\xi)$ — обобщённая функция, действующая по формуле

$$< \tilde{\varphi}(-\xi),\ \psi(\xi) > = < \tilde{\varphi}(\xi),\ \psi(-\xi) >,\ \psi \in C^{\infty}(S_R).$$

Ясно, что $W^{-\infty}(S_R) \subset H^{-\infty}(S_R)$ и (15) совпадается с преобразованием Фурье в [1] если $\varphi(x) \in H^{\infty}(S_R)$ и является классическим преобразованием Фурье, если $h(x)$ принадлежит, например, $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^N)$. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. 11. $F(W^{-\infty}(S_R)) \equiv C^{\infty}(S_R)$.

Доказательство. Пусть $h(x) \in W^{-\infty}(S_R)$. Покажем, что $\tilde{h}(\xi)$ - бесконечнодифференцируемая функция в S_R . На самом деле, из $W^{-\infty}(S_R) \subset H^{-\infty}(S_R)$ следует, что

$$F(W^{-\infty}(S_R)) \subset F(H^{-\infty}(S_R)) = L_{2,\ loc}(S_R)$$

(см. [1]). Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ - произвольный мультииндекс. Определим функцию $h_\alpha(x) \in W^{-\infty}(S_R)$

$$< h_\alpha(x),\ \varphi(x) > = < h(x),\ (-x)^\alpha\ \varphi(x) >,\ \varphi \in W^{\infty}(S_R).$$

Так как, $\operatorname{supp} \widetilde{(-x)^\alpha \varphi(x)} \equiv \operatorname{supp} \tilde{\varphi}(\xi)$, поэтому $(-x)^\alpha\ \varphi(x) \in W^{\infty}(S_R)$ и определение $h_\alpha(x)$ корректно.

Покажем, что $D^\alpha \tilde{h}(\xi) = \tilde{h}_\alpha(\xi)$, где D^α — обобщённая производная. Действительно, пусть $\varphi \in \mathcal{D}(S_R)$

$$< \tilde{h}_\alpha(\xi),\ \tilde{\varphi}(-\xi) > = (2\pi)^N < h_\alpha(x),\ \varphi(x) > =$$
$$= (2\pi)^N < h(x),\ (-x)^\alpha\ \varphi(x) > = < \tilde{h}(\xi),\ \widetilde{(-x)^\alpha \varphi(x)}(-\xi) > =$$
$$= < \tilde{h}(\xi),\ (-D)^\alpha\ \tilde{\varphi}(-\xi) > = < D^\alpha \tilde{h}(\xi),\ \tilde{\varphi}(-\xi) >.$$

Так как $\tilde{h}_\alpha(\xi) \in L_{2,\ loc}(S_R)$, то $D^\alpha \tilde{h}(\xi) \in L_{2,\ loc}(S_R)$. В силу леммы вложения Соболева и произвольности α получаем бесконечнодифференцируемость $\tilde{h}(\xi)$.

Обратно, пусть $h(\xi) \in C^{\infty}(S_R)$ — произвольная функция. Тогда существует $\check{h}(x) \in W^{-\infty}(S_R)$

$$< \check{h}(x),\ \varphi(x) > = (2\pi)^{-N} < h(\xi),\ \tilde{\varphi}(\xi) >,\ \varphi \in W^{\infty}(S_R).$$

Ясно, что $\check{h}(x)$ из вышеуказанной формулы линеен и непрерывен; и $\check{\tilde{h}}(\xi) = h(\xi)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.12. $(\mathcal{E}'(S_R))' \equiv C^\infty(S_R)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.13. *Пусть* $h(x) \in W^{-\infty}(S_R)$. *Тогда*

$$\tilde{h}(\xi) = (2\pi)^{-N} < h(x), e^{ix\xi} >, \ \xi \in S_R \ . \tag{16}$$

Доказательство. По (15) имеем

$$< h(x), e^{-ix\xi} > = (2\pi)^N < \tilde{h}(\xi'), \delta(\xi' - \xi) > = (2\pi)^N \tilde{h}(\xi) \ .$$

Замечание. Нетрудно доказать, что $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \subset W^{-\infty}(S_R)$ для любых R и (16) является «продолжением» преобразования Фурье обобщённых функций с компактным носителем (ср. с [12]).

Определим действие д.о.б.п. в $W^{-\infty}(S_R)$ следующим образом $< A(D)\, h(x), \varphi(x) > = \, = < h(x), A(-D)\, \varphi(x) >$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1.14. *Д.о.б.п. с аналитическим в* S_R *символом действует инвариантно и непрерывно в* $W^{-\infty}(S_R)$.

Теперь мы переходим к изучению пространств основных и обобщённых функций в произвольной области. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^N_\xi$ — открытая область и $\lambda \in \Omega$ — произвольная точка. Определим

$$S_R(\lambda) = \{\xi \mid |\xi_j - \lambda_j| < R_j, \ j = 1,\dots, N\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15.

$$W^\infty(S_R(\lambda)) = \{f(x) \in \mathcal{S}' |\ \operatorname{supp} \tilde{f}(\xi) = K \subset S_R(\lambda),\ K - \text{компакт}\}.$$

Введём в $W^\infty(S_R(\lambda))$ следующую сходимость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16. *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *в* $W^\infty(S_R(\lambda))$ *если*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbf{R}^N$;

2) *Существуют* C, m *такие, что*

$$|f_n(x)| \leqslant C\,(1 + |x|)^m, \ n = 1, 2, \dots ;$$

3) *Существует компакт* $L \subset S_R(\lambda)$ и

$$\operatorname{supp} \tilde{f}_n(\xi) \subset L, \ n = 1,2,\dots$$

Легко доказать что

$$W^\infty(S_R(\lambda)) = e^{i\lambda x}\ W^\infty(S_R)$$

и определение 1.16 совпадается с 1.3 если $\lambda = 0$. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 1.17 *Д.о.б.п.*

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha (D - \lambda I)^\alpha$$

с ситволом $A(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\xi - \lambda)^\alpha$, *аналитическим в* $S_R(\lambda)$ *действует ниварианто и непрерывно в* $W^\infty(S_R(\lambda))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18. *Пространством основных функций* $W^\infty(\Omega)$ *назовём множество функций* $f(x)$ *таких, что*

1) $f(x) \in \mathcal{S}'$;
2) $\mathrm{supp}\ \tilde{f}(\xi) = K \subset \Omega$, *где* K *– компакт.*

Опишем структуру $W^\infty(\Omega)$ в следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.19 *Любая функция* $u(x)$ *из* $W^\infty(\Omega)$ *может быть представлена в виде*

$$u(x) = \sum_{i \in I} u_{\lambda_i}(x),$$

где $u_{\lambda_i}(x) \in W^\infty(S_{R_i}(\lambda_i))$, $S_{R_i}(\lambda_i) \subset \Omega$, I *— конечное множество индексов.*

Более того, если $A(\xi)$ — заданная аналитическая в Ω функция то можно выбрать $S_{R_i}(\lambda_i)$ так, чтобы в каждом $S_{R_i}(\lambda_i)$ её разложение Тейлора в точке λ_i сходилось в $S_{R_i}(\lambda_i)$.

Доказательство. Пусть $u(x) \in W^\infty(\Omega)$ и $\mathrm{supp}\ \tilde{u}(\zeta) = K \subset \Omega$, K— компакт. Очевидно, что для каждой $\lambda \in \Omega$, существует $S_R(\lambda)$ такой, что разложение Тейлора $A(\xi)$ по $(\xi - \lambda)$ сходится в $S_R(\lambda)$. Из покрытия компакта K открытыми множествами $S_R(\lambda)$, $\lambda \in K$, можно выбрать конечное $S_{R_1}(\lambda_1)$, $S_{R_2}(\lambda_2)$, ..., $S_{R_n}(\lambda_n)$. Пусть $\{\theta_i(\xi)\}$ — соответствующее разбиение единицы $\theta_i(\xi) \in C_0^\infty(S_{R_i}(\lambda_i))$. Тогда

$$\tilde{u}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\xi)\tilde{u}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_{\lambda_i}(\xi).$$

Доказательство окончено.

§2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА (д. у. б. п.)

Рассмотрим д.у.б.п.

$$A(D)\,u(x) = h(x) \tag{17}$$

в пространстве основных функций W^∞. Применяя к обоим частям (17) преобразование Фурье, получим

$$A(\xi)\,\tilde{u}(\xi) = \tilde{h}(\xi). \tag{18}$$

Следовательно, изучение (17) можно приводить к изучению функционального уравнения (18), т.е. к возможности «деления» обобщенной функции $\widetilde{h}(\xi)$ на аналитическую функцию $A(\xi)$. Известно, что такая возможность была установлена Лоясевичем, Л. Хёрмандером и др. в случае $\widetilde{h} \in \mathcal{D}'$. Отсюда нетрудно следует, что уравнение (18) обладает и решением $\widetilde{u} \in \mathcal{S}'$ при $\widetilde{h} \in \mathcal{S}'$. Итак, верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ *и* $h(x) \in W^\infty(\Omega)$ *— произвольная функция. Тогда, для любого п.д.о.* $A(D)$ *с аналитическим в* Ω *символом* $A(\xi)$ *существует функция* $u(x) \in W^\infty(\Omega)$ *являющаяся решением уравнения* (17).

Более того, нетрудно доказать также следующее свойство решений уравнения (17).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пусть* $u(x) \in W^\infty(\Omega)$ *— некоторое решение уравнения* (17) *Тогда имеет место вложение*

$$\operatorname{supp} \widetilde{u} \subset \operatorname{supp} \widetilde{h} \cup \{ \xi \notin \Omega \mid A(\xi) = 0 \}.$$

Отсюда следует, что если $\widetilde{h} = 0$, то

$$\operatorname{supp} \widetilde{u}(\xi) \subset \{ \xi \in \Omega \mid A(\xi) = 0 \}.$$

Напомним, что линейный непрерывный оператор $\Phi : X \to Y$ называется нётеровым, если $\dim \operatorname{Ker} \Phi < \infty$, $\dim \operatorname{coker} \Phi < \infty$ и $\mathcal{J}m\ \Phi$ — замкнутое подпространство. Предложение 2.1. означает, что $\mathcal{J}m\ A(D) = W^\infty(\Omega)$ для любого п.д.о. с аналитическим символом в Ω. Поэтому, оператор такого рода будет нётеровым тогда и только тогда, когда $\dim \operatorname{Ker} A(D) < \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Если п.д.о.* $A(D)$ *с аналитическим символом* $A(\xi)$ *в* Ω *является нётеровым оператором в* $W^\infty(\Omega)$, *то его символ* $A(\xi)$ *обладает конечным числом нулей в* Ω.

Доказательство. Пусть, наоборот, $A(\xi)$ имеет бесконечное число нулей ξ_1; $\xi_2, \dots$ в Ω. Функции $\delta(\xi - \xi_1)$, $\delta(\xi - \xi_2), \dots$ являются линейно независимыми. Так как $A(\xi_j) = 0$, то $\langle A(\xi)\,\delta(\xi - \xi_j), \varphi(\xi) \rangle = A(\xi_j)\varphi(\xi_j) = 0$, $\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$. Следовательно, $F^{-1}(\delta(\xi - \xi_j))$, $j = 1, 2, \dots$ являются решениями однородного уравнения $A(D)\,u(x) = 0$ и, таким образом, $\dim \operatorname{Ker} A(D) = \infty$.

Обратное к предложению 2.3 утверждение, к сожалению, верно только в случае, когда $N = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть* $N = 1$, $\Omega \subset \mathbf{R}^1$. *Пусть символ* $A(\xi)$. $\xi \in \Omega$ *имеет только конечное число нулей в* Ω. *Тогда* $A(D)$ *является нётеровым оператором.*

Доказательство. Нам достаточно доказать предложение 2.4 в случае, когда $A(\xi)$ обладает единственным нулем в Ω. Для просторы обозначения, будем считать, что $0\ (\in \Omega)$ является нулем $A(\xi)$ в Ω. Из предложения 2.2 следует, что если $S(\xi)$ есть решение уравнения $A(\xi)\,S(\xi) = 0$, то $\operatorname{supp} S(\xi) = \{0\}$. Следовательно $S(\xi)$ имеет вид

$$S(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \delta^{(i)}(\xi),\ a_i \in \mathbf{C}^1. \tag{19}$$

Мы покажем, что если решение $S(\xi)$ имеет представление (19) и $a_n \neq 0$, то $A^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Действительно, подставив решение (19) в однородном уравнении $A(\xi)\,S(\xi) = 0$, получим в результате

$$0 = \sum_{i=0}^{n} a_i\,(A\varphi)^{(i)}(0) = \sum_{j=0}^{n} \varphi^{(i)}(0) \sum_{i=0}^{n} a_i\, C_i^j\, A^{(i-j)}(0). \qquad (20)$$

Нам известно, что для любой числовой последовательности $b_1, b_2, \ldots$ существует $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$ такая, что $\varphi^{(i)}(0) = b_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Поэтому, для того чтобы тождество (20) было верно для всех $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, C_i^j\, A^{(i-j)}(0) = 0,\ j = 0, 1 \ldots, n.$$

Отсюда следует, что $A^{(0)}(0) = A^{(1)}(0) = \ldots = A^{(n)}(0) = 0$. Предложение 2.4 доказано.

В случае $N \geqslant 2$, предложение 2.4 уже становится неверным. В этом случае, сначала мы тоже могли показать, что если $A^{(\gamma)}(0) = 0$ для всех $\gamma \leqslant \alpha$, то $\delta^{(\gamma)}(\xi)$, $\gamma \leqslant \alpha$, будут решениями однородного уравнения (18). А если $A^{(\alpha)}(0) = 0$, то $\delta^{(\gamma)}(\xi)$ при всех $\gamma \geqslant \alpha$ не будет решением. Однако некоторая линейная комбинация между ними может превратиться в решение однородного функционального уравнения (18). Рассмотрим следующий пример. Пусть $N = 2$ и $A(\xi) = \frac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)$. Очевидно, что $A(\xi)$ имеет только единственный нуль, являющийся 0 и $A^{(2,0)}(0) = A^{(0,2)}(0) = 1$. Все остальные производные $A(\xi)$ в точке 0 равны нулю. Легко проверить, что $S(\xi) = \delta^{(3,1)}(\xi) - \delta^{(1,3)}(\xi)$ будет решением уравнения $A(\xi)\,S(\xi) = 0$. Более того, можем показать, что для всех $n \geqslant 2$, существует

$$S(\xi) = \sum_{|\alpha| = n} C_\alpha\, \delta^{(\alpha)}(\xi), \qquad (21)$$

которая является решением уравнения $A(\xi)\,S(\xi) = 0$. На самом деле, подставив (21) в уравнение $A(\xi)\,P(\xi) = 0$, и использовавщись известной формулой

$$P_m(D)(f, g) = \sum_\gamma \frac{1}{\gamma!}\,(P_m^{(\gamma)}(D) f)\, g^{(\gamma)},$$

где $P_m(D)$ — любой дифференциальный оператор порядка m, мы получим

$$\sum_\gamma \frac{1}{\gamma!}\,(P_n^{(\gamma)}(D)\,A)\,(0)\,\varphi^{(\gamma)}(0) - 0,$$

где

$$P_n(D) = \sum_{|\alpha| = n} C_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Отсюда (как в случае $N = 1$) следует, что

$$(P_n^{(\gamma)}(D)\,A)\,(0) = 0 \qquad \forall\ \gamma. \qquad (22)$$

Покажем, что существует множество чисел c_α, $|\alpha| = n$ такое, что $\sum\limits_{|\alpha|=n} c_\alpha^2 \neq 0$ и $P_n(D) = \sum\limits_{|\alpha|=n} c_\alpha \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ удовлетворяет (22). Действительно, равенство (22) верно при всех γ, $|\gamma| \neq n-2$. При $|\gamma| = n-2$, получим из (22) линейную систему $(n-1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестными

$$\begin{bmatrix} * & 0 & + & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & + & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & & & & *\,0 & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} = 0, \tag{23}$$

где $c_i = c_{(i,j)}$, $i + j = n$ — неизвестные числа ; $*$, $+$ — обозначения чисел, неравных нулю. Определитель, состоящий из $(n-1)$ первых столбцов и $(n-1)$ строк, неравен нулю. Поэтому для любых заданных c_{n-1}, c_n, существует (и единственная) система чисел c_0, c_1, ..., c_{n-2} такая, что c_0, c_1, ..., c_n есть решение системы уравнений (23). Подставить c_i, $i = 0, 1, \dots, n$ в (21) мы будем получать нетривиальное решение однородного уравнения (18).

Вернёмся к случаю $N = 1$, заметим, что в $W^\infty(\Omega)$, Ω ограниченная область в $\mathbf{R}^1$, любой п. д. о. с аналитическим символом является нётеровым. Имеет место следующая

ЛЕММА 2.5. *Пусть*

$$A(D) = \sum_{k=n}^{\infty} a_n D^n$$

$a_n \neq 0$, $D = -i \dfrac{\partial}{\partial x}$, $x \in \mathbf{R}^1$ *п.д.о. с аналитическим в окрестности нуля символом. Тогда существует окрестность Ω точки 0 такая, что следующая задача*

$$\begin{cases} A(D)\, u(x) = h(x) & (24) \\ u(x_i) = c_i\,, \ i = 1, 2, \dots, n & (25) \end{cases}$$

обладает единственным решением в $W^\infty(\Omega)$ при любой функции $h(x) \in W^\infty(\Omega)$, при произвольных попарно различных $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^1$ и $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{C}^1$.

Доказательство. Выберём Ω так, чтобы $A(\xi) \neq 0$ на $\Omega \setminus \{0\}$. Пусть $u_0(x)$ — какое-либо решение уравнения (24) (см. предложение 21). Тогда любое решение уравнения (24) имеет вид (см. предложение 2.4)

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j\,. \tag{26}$$

Теперь мы определим числа λ_j, $j = 0, 1, \dots, n-1$, из условий (25). Подставим x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, в (26) имеем

$$c_i = u_0(x_i) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x_i^j, \ i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - u_0(x_1) \\ c_2 - u_0(x_2) \\ \vdots \\ c_n - u_0(x_n) \end{pmatrix} \tag{27}$$

Определитель системы (27) отличен от нуля, поэтому система (27) имеет единственное решение$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$.Положив $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ в (26), мы получим решение задачи (24), (25).

Легко доказать, что если $h(x) \equiv 0$, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ то $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. Следовательно решение единственно. Лемма 2.5 доказана.

ЛЕММА 2.6. *Предположим, что условие леммы 2.5 было выполнено. Тогда существует окрестность такая, что задача Коши*

$$A(D)\, u(x) = h(x),\ h(x) \in W^{\infty}(\Omega), \tag{28}$$

$$u^{(i)}(x_0) = c_i\,,\ i = 0, 1, \dots, n-1,\ x_0 \in \mathbf{R}^1, \tag{29}$$

обладает единственным решением $u(x) \in W^{\infty}(\Omega)$.

Доказательство. Заметим, что формула (26) есть общий вид решения уравнения (28). Находим числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ из следующей системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ & 2 & & (n-1)x_0^{n-2} \\ & & \ddots & \\ & 0 & & (n-1)! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - u_0(x_0) \\ a_1 - u_0'(x_0) \\ \vdots \\ a_{n-1} - u_0^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Эта система уравнений имеет единственное решение $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ и $u(x) = u_0(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j$ будет искомым решением задачи Коши (28), (29). Единственность решения доказывается аналогично доказательству леммы 2.5. Лемма 2.6 доказана.

В случае, когда $A(\xi)$ имеет конечное число нулей, мы получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.7. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ *—нули символа* $A(\xi)$ *в* $\Omega \subset \mathbf{R}^1$ *с кратностью* $n_1, \dots, n_m$ *соответственно. Тогда существует единственное решение следующей задачи Коши*

$$A(D)\, u(x) \equiv h(x),\ h(x) \in W^{\infty}(\Omega), \tag{30}$$

$$u^{(i)}(x_0) = c_i\,,\ i = 0, 1, \dots, n-1\,;\ n = n_1 + \dots + n_m \tag{31}$$

и это решение принадлежит $W^{\infty}(\Omega)$

Доказательство. Из предложения 2.4 следует, что общий вид решения уравнения $A(\xi)\ S(\xi) = 0$ будет

$$S(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda_{kj}\ \delta^{(j)}\ (\xi-\xi_k).$$

Переходя к обратному преобразованию Фурье, получим

$$\check{S}(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda_{kj}\ e^{ix\xi_k}\ x^j.$$

Следовательно, общий вид решения уравнения (30) будет

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda_{kj}\ e^{ix\xi_k}\ x^j. \tag{32}$$

Мы докажем, что если $u(x)$ удовлетворяет ещё условию (31), т числа λ_{kj} будут однозначно определены. Действительно, если используем обозначения

$$\varphi_1(x) = e^{ix\xi_1}, \ldots, \varphi_{n_1}(x) = e^{ix\xi_1} x^{n_1-1},$$

$$\varphi_{n_1+1}(x) = e^{ix\xi_2}, \ldots, \varphi_{n_1+n_2}(x) = e^{ix\xi_2} x^{n_2-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+1}(x) = e^{ix\xi_m}, \ldots, \varphi_n(x) = e^{ix\xi_m} x^{n_m-1}$$

$$\lambda_1 = \lambda_{10}, \lambda_2 = \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{n_1} = \lambda_{1,n_1-1}, \ldots,$$

$$\lambda_{n_1+1} = \lambda_{20}, \ldots, \lambda_n \equiv \lambda_{m,n_m-1},$$

то условие (31) принимает вид

$$u^{(j)}(x_0) = u_0^{(j)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k^{(j)}(x_0)$$

где $j = 0,1, \ldots, n-1$, или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_0) \ldots \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) \ldots \varphi_n'(x_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) \ldots \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{33}$$

где $b_j = c_j - u_0^{(j)}(x_0)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Будем записывать (33) коротко $W(x_0)\ \Lambda = B$. Матрица $W(x)$, как легко видеть, является матрицей Вронского следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d}{dx} - \xi_1\right)^{n_1} \left(\frac{d}{dx} - \xi_2\right)^{n_2} \ldots \left(\frac{d}{dx} - \xi_m\right)^{n_m} \Psi(x) = 0,$$

и, следовательно, $\det W(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$. Отсюда, вытекает. в частности, что $\det W(x_0) \neq 0$ и система (33) обладает единственным решением $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Единственность решения $u(x)$ очевидна. Теорема доказана.

Поступим к вопросу приближенного решения д. у. б. п. (17). Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. 8. *Пусть $A(D)$ — п. д. о. с аналитическим символом. Предположим. что символ $A(\xi)$ имеет в Ω только изолированные нули. Тогда, для каждой точки $\xi_0 \in \Omega$ существует окрестность $U(\subset \Omega)$ точки ξ_0 такая что*

1) *Разложение Тейлора по $(\xi - \xi_0)$ символа $A(\xi)$ сходится в U.*

2) *Для произвольной $h(x) \in W^{\infty}(U)$, существует последовательность решений $\{u_n(x)\}$ уравнений*

$$A_n(D)\, u_n(x) = h(x), \tag{34}$$

где $A_n(D)$ — п. д. о. с символом являющимся многочленом Тейлора порядка n символа $A(\xi)$, и $\{u_n(x)\}$ сходится в $W^{\infty}(U)$ к решению $u(x)$ предельного уравнения

$$A(D)\, u(x) = h(x). \tag{35}$$

Доказательство этой теоремы мы проведём по следующей схеме. Сначала покажем существование последовательности $u_n(x)$, преобразование Фурье которой было ограничено по некоторой норме. Для этого нам пришлось аналитическим методом передоказать теорему о делении обобщенной функции на аналитическую функцию. Доказательство, которое мы проведём позже, основано на доказательство Хёрмандера о делении обобщённой функции умеренного роста на полином (см. [15], А потом покажем существование сходящейся последовательности решений.

ЛЕММА 2. 9. *Пусть $L \subset \mathbf{R}^N$ – выпуклое компакнтое с непустой внутренностью ($L^0 \neq \phi$) множество ; $f(\xi)$ – аналитическая функция на L. Тогда для каждого $m \in \mathbf{N}$, существуют числа $C > 0$, $\lambda \in \mathbf{N}$ такие, что*

$$\|\varphi\|_{m,\, L} \leqslant C \|f\varphi\|_{m+\lambda,\, L}; \quad \forall\, \varphi \in C^{m+\lambda}(L), \tag{36}$$

где $\|\psi\|_{m,\, L} = \sup\limits_{\xi\in L,\ |\alpha|\leqslant m} |D^{\alpha}\psi(\xi)|$.

Постоянные C, λ зависят только от $f(\xi)$, m.

Доказательство леммы. Положим $\Phi = f\cdot\varphi$ и обозначим

$$N^k = \{\, \xi \in L \mid D^{\alpha} f(\xi) = 0,\ \forall\ |\alpha| < k \,\},\ k = 1, 2, \ldots$$

Множество N^k, очевидно, замкнуто; $N^k \supset N^{k+1}$, $N^1 = \{\xi \in L \mid f(\xi) = 0\}$ и существует число μ, при котором $N^{\mu} \neq \phi$, $N^{\mu+1} = \phi$ — пустое множество. Положим $N^0 = L$.

Докажём (36) методом математической индукции по k. Сначала покажем, что (36) верно для всех $\xi \in N^{\mu}$. Пусть $m \in \mathbf{N}$ — любое фиксированное число и $\xi \in N^{\mu}$. Положим

$$F_{j\mu}(\xi) = \sum_{|\beta|\leqslant j\mu} |D^{\beta} f^{j}(\xi)|^2,\ j = 1, 2, \ldots, m+1$$

Нетрудно показать, что

$$D^{\beta} f^{j}(\xi) = 0 \ \text{ при } \ |\beta| < j\mu \ \text{ и } \ F_{j\mu}(\xi) \neq 0 \ \text{ на } \ N^{\mu}.$$

Следовательно

$$F_{j\mu}(\xi) = \sum_{|\beta|=j\mu} | D^\beta f^j(\xi) |^2, \ \xi \in N^\mu .$$

Пусть $C_1 = \min_{\xi\in N^\mu,\, j\leqslant m+1} | F_{j\mu}(\xi) | > 0$. Для любого мультииндекса α, $|\alpha| = j-1$, $f^j D^\alpha(\Phi/f)$ является дифференциальным оператором порядка $j-1$. Введём следующие обозначения

$$L_{|\alpha|}(\xi, \Phi) = f^j(\xi)\, D^\alpha\left(\frac{\Phi(\xi)}{f(\xi)}\right), \ j = 1, 2,..., m+1, \ |\alpha| = m-1.$$

$$L_{|\alpha|+|\beta|}(\xi, \Phi) = D^\beta f^j(\xi)\, D^\alpha\left(\frac{\Phi(\xi)}{f(\xi)}\right).$$

Для $|\beta| = j\mu$, имеем следующую оценку

$$|L_{|\alpha|+|\beta|}(\xi, \Phi)| \leqslant C_2 \| \Phi \|_{|\alpha|\mu+|\alpha|+\mu, L}, \ \xi \in N^\mu. \tag{37}$$

Вводя обе части неравенства (37) в квадрате, суммируя по β, $|\beta| = j\mu$, получим

$$\| \Phi \|^2_{|\alpha|\mu+|\alpha|+\mu, L} \geqslant C_3 F_{j\mu}(\xi)\, |\varphi^{(\alpha)}(\xi)|^2 \geqslant C_1 C_3 |\varphi^{(\alpha)}|^2.$$

Или для всех $\xi \in N^\mu$, $|\alpha| \leqslant m$

$$|\varphi^{(\alpha)}(\xi)| \leqslant C_4 \| f\cdot\varphi \|_{\mu|\alpha|+|\alpha|+\mu, L}.$$

Следовательно

$$\| \varphi \|_{m, N^\mu} \leqslant C \| f\cdot\varphi \|_{m\mu+m+\mu, L}, \quad \varphi \in C^{m\mu+m+\mu}(L).$$

Теперь мы докажем (36) для $\xi \in N^k$ с предположением, что оно уже верно для $\xi \in N^{k+1}$. Здесь существенно используется важное неравенство Лоясевича, которое мы будем формулировать ниже для полного изложения.

ТЕОРЕМА. (Неравенство Лоясевича). *Пусть Ω — открытая область в* $\mathbf{R}^N$ *и $A(x)$—аналитическая функция в Ω, $E = \{ x \in \Omega \mid A(x) = 0\}$. Тогда, для каждого компакта $K \subset \Omega$ существуют C, α такие, что для всех $x \in K$ верна оценка*

$$| A(x) | \geqslant C\, d(x, E)^\alpha;$$

где $d(x, E)$ — расстояние от x до E (см. [16]).

Аналогично предыдущему случаю, положим

$$F_{jk}(\xi) = \sum_{|\beta|\leqslant jk} | D^\beta f^j(\xi) |^2 = \sum_{|\beta|=jk} | D^\beta f^j(\xi) |^2, \ \xi \in N^k.$$

Множество нулей $F_{jk}(\xi)$ совпадает с N^{k+1}. Используя неравенство Лоясевича, имеем

$$E_{jk}(\xi) \geqslant C_{jk}\, d(\xi, N^{k+1})^{\gamma_{jk}}, \ \xi \in N^k.$$

Пусть $\xi \in N^k$ и $d(\xi, N^{k+1})$. Тогда

$$| \varphi^{(\alpha)}(\xi) |^2 \leqslant | \varphi^{(\alpha)}(\xi) |^2\, d(\xi, N^{k+1})^{\gamma_{jk}} \leqslant C_{jk} \sum_{|\beta|=jk} | L_{|\alpha|+|\beta|}(\xi, \Phi) |^2$$

$$\leqslant C_5^2 \| \Phi \|^2_{mk+m+k, L}$$

Или

$$|\varphi^{(\alpha)}(\xi)| \leqslant C_5 \|\Phi\|_{mk+m+k,L}. \tag{38}$$

Пусть $\xi \in N^k$ и $d(\xi, N^{k+1}) < 1$. Рассмотрим отдельно два следующих случая. Первый случай: функция $\varphi(\xi)$ имеет нуль на N^{k+1} порядка не меньше m', т. е. $\varphi^{(\gamma)}(\xi) = 0$ при всех $|\gamma| < m'$, $\xi \in N^{k+1}$. Точную величину m' мы определим позже. Так как N^{k+1} — замкнуто, то существует $\xi^* \in N^{k+1}$ такая, что

$$|\xi - \xi^*| = d(\xi, N^{k+1}) < 1.$$

Для всех $0 \leqslant |\gamma| \leqslant |\alpha| + |\beta| = jk + j - 1$, разложим $\Phi^{(\gamma)}(\xi)$ в ряд Тейлора по $(\xi - \xi^*)$, проведём элементарные оценки и воспользуется (37) для $\xi \in N^k$, получим в результате оценку

$$\sum_{|\beta|=jk} |L_{|\alpha|+|\beta|}(\xi,\Phi)|^2 \leqslant C_6^2 \|\Phi\|^2_{m',L}\, d(x, N^{k+1})^{2(m'-|\alpha|-|\beta|)}$$

С другой стороны, воспользуясь неравенством Лоясевича, имеем

$$\sum_{|\beta|=jk} |L_{|\alpha|+|\beta|}(\xi, \Phi)|^2 \geqslant C_{jk} |\varphi^{(\alpha)}(\xi)|^2 d(\xi, N^{k+1})^{k\gamma},$$

где $\gamma_k = \max\limits_j \gamma_{jk}$.

Комбинируя два последних неравенства с выбором $m' = m + (m+1)k + \left[\frac{\gamma_k}{2}\right] + 1$, получим

$$|\varphi^{(\alpha)}(\xi)| \leqslant C_7 \|\Phi\|_{m+(m+1)k+\left[\frac{\gamma_k}{2}\right]+1,\, L}, \quad \xi \in N^k. \tag{39}$$

Второй случай: $\varphi(\xi)$ — любая функция из $C^{m+\lambda}(L)$, λ зависит от k.

В этом случае мы будем использовать важную лемму уитни — Хёрмандора о продолжении функции. А именно

ЛЕММА. *Пусть* $f \in C^r(\mathbf{R}^N)$, $A \subset \mathbf{R}^N$ — *замкнутое множество. Тогда существует* $g(x) \in C^r(\mathbf{R}^N)$ *и*

а) $D^\alpha f(x) = D^\alpha g(x)$, $|\alpha| \leqslant r$, $x \in A$;

б) *Имеет место оценка*

$$\|g\|_{r,\mathbf{R}^N} \leqslant \|f\|_{r,A}.$$

В силу вышеописанной леммы, существует $\psi(\xi) \in C^{m'}(\mathbf{R}^N)$ такая, что

$$\varphi^{(\alpha)}(\xi) = \psi^{(\alpha)}(\xi), \quad |\alpha| \leqslant m', \quad \xi \in N^{k+1},$$

б)
$$\|\psi\|_{m',R^N} \leqslant \|\varphi\|_{m',N^{k+1}}$$

Положим $h = \varphi - \psi$. Очевидно, что $h(\xi)$ обращается в нуль на N^{k+1} с порядком не меньше m'. Воспользовавшись результатом первого случая, мы имеем оценку

$$\| h \|_{m,N^k} \leqslant C_8 \| fh \|_{m',L} \tag{40}$$

В силу предположения индукции

$$\| f\psi \|_{m',L} \leqslant C_9 \| \psi \|_{m',L} \leqslant C_9 \| \varphi \|_{m',N^{k+1}} \leqslant C_{10} \| f\varphi \|_{m'+\lambda_{k+1,m'},\, L}\,. \tag{41}$$

Из (40), (41) вытекает

$$\| \varphi \|_{m,N^k} \leqslant C_{11} \| f\varphi \|_{m'+\lambda_{k+1,m'},\, L}, \tag{42}$$

где $\lambda_{k+1,m'}$ в (41), (42) является числом λ в оценке функции φ с производными до порядка m' на N^{k+1}.

Комбинируя (38), (39), (42) получим

$$\| \varphi \|_{m,N^k} \leqslant C_{12} \| f\varphi \|_{m+\lambda_{k,m},\, L},$$

где

$$\lambda_{k,m} = (m+1)k + \left[\frac{\gamma_k}{2}\right] + \lambda_{k+1,m'} + 1,$$

$$m' = m + (m+1)k + \left[\frac{\gamma_k}{2}\right] + 1.$$

Доказательство окончено.

Переходим к доказательству теоремы 2.8. Если $\xi\in\Omega$ и $A(\xi) \neq 0$, то теорема, очевидно, верна. Пусть $\xi_0\in\Omega$ и $A(\xi_0) = 0$. По условию теоремы существует окрестность, которую мы можем выбрать выпуклой, такая, что $A(\xi) \neq 0$ на $\overline{U}\setminus\{\xi_0\}$ и её разложение Тейлора сходится на $\overline{U}$. Для простоты изложения, считаем $\xi_0 = 0$. Из условия изолированности нулей функций $A(\xi)$ легко вытекает, что существует номер n_0 такой что при всех $n \geqslant n_0$, $A_n(\xi)$ также имеет только единственный нуль (точка 0) в $\overline{U}$. Неравенство Лоясевича для A_n и A в $\overline{U}$ принимает вид

$$| A_n(\xi) | \geqslant C_n \, | \xi |^{\alpha_n}, n = 0, n_0, +1, \ldots, A_0 = A, \alpha_0 = \alpha.$$

Более того, нетрудно доказать, что $\alpha_n \equiv \alpha_0$, $\forall n > \alpha$ и последовательность $\{C_n\}$ ограничена снизу. Следовательно, имеет место оценка

$$| A_n(\xi) | \geqslant C \, | \xi |^{\alpha}, \ \forall n \geqslant n_0,$$

где C, α независящие от n константы. Применяя лемму 2.9 к аналитическим функциям $A_n(\xi)$, $n \geqslant n_0$ и учитывая вышесказанное замечание, получим, что для любого $m \in \mathbf{N}$, существуют C, λ независящие от n, такие, что для всех $\varphi \in C^{m+\lambda}(\overline{U})$

$$\| \varphi \|_{m,\overline{U}} \leqslant C \| A_n\varphi \|_{m+\lambda,\overline{U}}, \ n = n_0, n_0 + 1, \ldots$$

Определим следующие функционалы

$$\tilde{v}_n : A_n\varphi \to \langle \tilde{h}, \varphi \rangle,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(U)$, $\tilde{h} \in \mathcal{E}'(U)$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$

Эти функционалы непрерывны в силу леммы 2. 9. По теореме Хана—Банаха $\widetilde{v}_n$ могут быть продолжены до обобщенных функций над $\mathcal{D}(U)$ и

$$|\langle \hat{i}_n, A_n\varphi\rangle| = |\langle \widetilde{h}, \varphi\rangle| \leqslant \|h\|_{-l} \|\varphi\|_l \leqslant$$

$$\leqslant \|\widetilde{h}\|_{-l}\, C \,\| A_n\varphi \|_{l+\lambda} = \widetilde{C}\, \| A_n \varphi \|_m, \; n = n_0,\, n_0+1$$

Ещё раз воспользовавщись теоремой Хана — Банаха, можем предполагать что $\|\widetilde{v}_n\|_{-m} < \widehat{C}$. Более того, по теореме Пэли—Винера, порядок сингулярности $\widetilde{v}_n$ не превосходит m для всех $n \geqslant n_0$. Пусть $Ж$ — множество обобщенных функций, имеющих носитель $\{0\}$ и порядок сингулярности небольше m. Ясно, что $\dim Ж < \infty$ Пусть $P : \mathcal{E}'(U) \to Ж$ — непрерывный проектор. Положим

$$\widetilde{u}_n = (\mathrm{I} - P)\widetilde{v}_n, \tag{43}$$

где I — тождественный оператор. Нетрудно показать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^N_x$ последовательность $\{u_n(x)\}$, $x \in K$ удовлетворяет условию теоремы Асколи-Арцела. Пусть K_m, $m = 1, 2,\ldots$ — последовательность компактов; $K_m \subset K_{m+1}$; $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m = \mathbf{R}^N$. Можем выбрать $\{u_{nm}(x)\}$ из последовательности $\{u_n(x)\}$ так, чтобы

а) $\{u_{nm}(x)\}$ сходилась при $m \to \infty$ равномерно на K_n,

б) $\{u_{n+1,m}(x)\}$ — подпоследовательность последовательности $\{u_{nm}(x)\}$.

Следовательно, что существует подпоследовательность, которую обозначаем через $\{u_{n_k}(x)\}$, сходящаяся в $W^{\infty}(U)$ к некоторому пределу $u(x)$. Более того из (43) вытекает, что все подпоследовательности сходятся к одному и тому же пределу. Следовательно сама последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится к этому пределу $u(x)$. Функция $u(x)$ очевидно является решением (35). Теорема доказана.

Замечание. Условие изолированности нулей символа $A(\xi)$ оператора $A(D)$ является существенным для данного доказательства. Другим методом мы также доказали утверждение, аналогичное теореме 2.6, для класса п.д.о. $A(D)$, символ которых локально отличается от многочлена диффеоморфизмом.

§3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ

Рассмотрним следующю краевую задачу

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t,x) + \sum_{j=0}^{m-1} A_j(t,D)\,\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t,x) = 0; \tag{44}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_{js} \frac{\partial^s u}{\partial t^s}(0, x) = U_j(x), \; j = 0,1,\ldots, m-N-1; \tag{45}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_{js} \frac{\partial^s u}{\partial t^s}(1, x) = \psi_j(x), \; j = m-N,\ldots, m-1; \tag{46}$$

где $(t, x) \in [0,1] \times \mathbf{R}^N$, $A_j(t, D)$ — п.д.о. с символом $A_j(t, \xi)$, непрерывно зависящим от t и аналитическим по ξ в некоторой фиксированной области $\Omega \subset \mathbf{R}^N_\xi$; $\| b_{js} \|$ — заданная невырожденная числовая матрица U_j, ψ_j — заданные функции из $\mathbf{W}^\infty(\Omega)$.

В этом параграфе мы покажем одно приложение д.о.п.б. к краевой задаче (44), (45), (46). А именно мы будем доказывать теорему о существовании решения задачи (44). (45), (46) в W^∞ (Ω) с помощью одной известной конструкции, согласно которой краевая задача сводится к задаче Коши с начальными данными, которые, в свою очередь, являются решениями некоторой системы д.у.б.п.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих аналитически от $\xi \in \Omega$

$$\frac{\partial^m U_{0k}}{\partial t^m}(t, \xi) + \sum_{j=0}^{m-1} A_j(t, \xi) \frac{\partial^j U_{0k}}{\partial t^j}(t, \xi) = 0, \tag{47}$$

$$V_{jk}(t, \xi) = \sum_{s=0}^{m-1} b_{js} \frac{\partial^s U_{0k}}{\partial t^s}(t, \xi), \tag{48}$$

$$V_{jk}(0, \xi) = \delta_{jk}, \tag{49}$$

где $j, k = 0,1,\ldots, m-1$. Легко видеть, что эта система обладает единственным решением, $V_{jk}(t, \xi)$, которое аналитично по $\xi \in \Omega$ (см. [14]). Составим уравнение

$$\sum_{s=0}^{m-1} V_{js}(1, D)\, U_s(x) = \psi_j(x), \; j = m-N,\ldots, m-1, \tag{50}$$

где $V_{js}(1, D)$ — п.д.о. с символом $V_{js}(1, \xi)$. Перепишем (50) в виде

$$\sum_{s=m-N}^{m-1} V_{js}(1, D)\, U_s(x) = \psi_i(x) - \sum_{s=0}^{m-N-1} V_{js}(1, D)\, U_s(x) = \Phi_j(x) \tag{51}$$

Система (51) локально представляет собой систему N д.у.б.п. с N неизвестными функциями $U_s(x)$, $s = m - N,\ldots, m-1$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть* $U_s(x)$, $s = m - N,\ldots, m-1$, *решение системы д.у.б.п. (41). Тогда*

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{m-1} U_{0k}(t, D)\, U_k(x) \tag{52}$$

будет решением исходной краевой задачи (44), (45), (46).

Доказательство. Подставив (52) в (44), использовав (47) мы получим нуль, т. е. $u(t,x)$ есть решение (44). Проверим (45). Пусть $j=0,1,\ldots, m-N-1$. Положив (52) в (45) с использованием $V_{jk}(0, D) = \delta_{jk} I$, где I – тождественный оператор, получим

$$\sum_{s=0}^{m-1} b_{js} \frac{\partial^s U(0,x)}{\partial t^s} = U_j(x),\ j=0,1,\ldots, m-N-1.$$

Нам остаётся только проверить краевое условие при $t=1$. В силу (50) получим при $j \in \{m-N, \ldots, m-1\}$

$$\sum_{s=0}^{m-1} b_{js} \frac{\partial^s U}{\partial t^s}(1,x) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{m-1} b_{js} \frac{\partial^s U_{ok}}{\partial t^s}(1,x)\, U_k(x) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m-1} V_{js}(1, D)\, U_s(x) = \Psi_s(x).$$

Теорема доказана.

Верно также обратное к теореме 3. 1 утверждение. А именно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 2. *Пусть* $u(t, x)$ — *решение системы* (44), (45), (46). *Тогда* $u(0, x)$ *удовлетворяет* (51), т. е.

$$\sum_{s=0}^{m-1} V_{js}(1, D) \Big(\sum_{k=0}^{m-1} b_{sk} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(0, x) \Big) = \Psi_j(x). \tag{53}$$

Доказательство. Покажем, что

$$u(t,x) = \sum_{s=0}^{m-1} U_{0s}(t, D) \sum_{k=0}^{m-1} b_{sk} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(0,x) \tag{54}$$

Действительно, $u(t, x)$ и функция, состоящая в правой части (54), как легко проверять, являются решениями следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^m v}{\partial t^m}(t,x) + \sum_{j=0}^{m-1} A_j(t, D) \frac{\partial^j v}{\partial t^j}(t,x) = 0,$$

$$\sum_{s=0}^{m-1} b_{js} \frac{\partial^s v}{\partial t^s}(0, x) = \sum_{s=0}^{m-1} b_{js} \frac{\partial^s u}{\partial t^s}(0, x).$$

Эта задача Коши обладает единственным решением (см. [11]) и, тем самым, (54) доказана. Подставив (54) при $t=1$ в (46) и выполнив элементарное преобразование, получим левую часть (53) и ч. т. д.

Итак, мы уже показали эквивалентность между исходной краевой задачей (44), (45), (46) и некоторой системой д. у. б. п. (51). О разрешимости системы (51) верно следующее легко проверяемое достаточное условие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 3. *Для того, чтобы система (51) имела по крайней мере одно решение достаточно, чтобы существовала точка* $\xi_0 \in \Omega$ *такая, что*

$$\det \| V_{js}(1, \xi_0) \| \neq 0.$$

Доказательство. Отметим, что деление обобщенной функции на отличную от нуля аналитическую функцию всегда возможно. Поэтому можем решить систему уравнений

$$\sum_{S=m-N}^{m-1} V_{js}(1,\xi)\widetilde{U}_s(\xi)=\widetilde{\Phi}_j(\xi),\ j=m-N,\ldots,m-1,$$

обычным методом для линейной квадратной системы уравнений и получим решение в виде

$$\widetilde{U}_s(\xi)=\frac{V_s(\xi)}{\det\|\widetilde{V}_{js}(1,\xi)\|},\tag{55}$$

где определитель матрицы, полученной заменой столбца $\widetilde{V}_{js}(\xi)$, $j=m-N,\ldots,m-1$ столбцом $\widetilde{\Phi}_j(\xi)$. $V_s(\xi)$, очевидно, является обобщенной функцией и решение $\widetilde{U}_s(\xi)$, вообще говоря, неединственно. Переходя к преобразованию Фурье, мы получим решение системы уравнений (51). Предложение доказано.

Заметим, что $\det\|V_{js}(1,\xi)\|$ может быть тождественно равен нулю и следовательно, система (51) не имеет ни одного решения если её правая часть отлична от нуля. На практике, можно искать приближенное решение системы (51) следующим образом. Сначала, решим (51) тем же методом для линейной системы алгебраических уравнений и найдём решение в виде (55). Для функционального уравнения (55), можно найти приближенное решение с помощью теорем типа теоремы 2.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А Дубинский, *Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и её приложение к математической физике,* УМН, 37 : 5, 1982, 97 – 137.
2. Ю. А. Дубинский, *К теории задачи Коши для уравнений в частных производных,* ДАН СССР, 259 : 4, 1981, 781 – 785.
3. И. М. Генфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений,* М. Гостеиздат, 1958.
4. А. И. Лурье, *Пространственная задача теории упругости.* М. Гостеиздат, 1955.
5. В. В Власов, *Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики,* М. Стройиздат, 1975
6. В.А. Агарев, *Метод начальных функции для двухмерных краевых задач теории упругости,* Изд. АН УССР, Киев, 1963.
7. В.П. Маслов, *Нестандарный характеристик асимтотической проблемы*, УМН, 38 :6, 1983.
8. Дж. Бьёркен и С.Дрем, *Релятивисткая квантовая теория.* Т.I. М., Мир, 1978.
9. Д.Г. Хлебников и А.Н. Парашак, ДАН УССР. Сер. А, I (1980), 7-10.
10. Ж. Дьедоне, *Основы современного анализа.* М., Изд. Мир, 1974.
11. Чинь Нгок Минь и Чан Дык Ван, *О задаче Коши для дифференциального уравнения в частных производных с выделенной переменной*, ДАН СССР, 284 : 5, 1985.

12. В.С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, М., Наука, 1976.

13. С.М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., Наука, 1977.

14. Э.Камке, *Сборник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М., Наука, 1965.

15. L.Homander, *On the division of distribution by Polynomials*, Arkiv for Math., 3 (1958). 555–568.

16. B.Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Paris, 1966.

17. F.Treves, *Ovsyanikov theorem and hyperdifferential operators*, Rio de Janeiro, Notes de Math., 46 (1968).

Поступила в редакцию 18 апреля 1986г

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ХАНОЙ, ВЬЕТНАМ