ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 12 No 1 (1987)

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ БЕЗ УСЛОВИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

НГУЕН ХЫУ ВЬЕТ

Известно, что всякий случайный непрерывный многозначный оператор имеет случайную неподвижную точку, если соответствующий детерминистический оператор имеет обычную неподвижную точку [1].

В случае отсутствия предположения непрерывности ряд результатов был получен в [1]. [3].

Отметим, что для операторов типа сжатия нахождение случайной неподвижной точки часто осуществляется при помощи параметризации методов итераций известных в теоремах о неподвижной точке для соответствующих операторов (см. напр. [1]). Однако, для операторов типа сжатия у которых, неподвижная точка не может быть найдена путём обычной итерации этот метод не применим. Такие операторы мы и будем рассматривать в настоящей статье. Основным результатом здесь является теорема 2, представляющая случайный вариант известного результата Сирика [2]. Получен также один новый результат относительно существования обычной неподвижной точки для одного класса отображений типа сжатия без предположения непрерывности.

I. Пусть X — метрическое пространство, d – метрика в нем. Пусть $CL(X)$ обозначает класс всех непустых замкнутых подмножеств в X, cl A — замыкание множества A в X, $d(x, A)$ — расстояние между точкой x и множеством A

$(d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\})$, H – метрику Хаусдорфа в $CL(X)$:

$$H(A,B) = \max\{\sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b), \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b)\},\ A, B \in CL(X).$$

Пусть F — отображение из X в $CL(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Последовательность* $\{x_n, n = 0, 1, 2,...\}$ *называется орбитой отображения* F *точки* x, *если* $x_0 = x$, $x_{n+1} \in F(x_n)$, $n = 0, 1, 2,...$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* X — *метрическое пространство,* $F: X \to CL(X)$ — *отображение, удовлетворяющее следующим условиям*:

1) Существует орбита $\{x_n, n = 0, 1, 2,...\}$, *содержащая две последовательные оходящиеся подпоследовательности* $x_{n_i} \to x_*$, $x_{n_i+1} \to x_*$,

2) *Существуют действительные числа $q_1 \in [0, +\infty)$, $q_2 \in [0,1)$ такие что $H(F(x), F(y)) \leqslant q_1 d(x,y) + q_2 \max\{d(x, F(x)) + d(y, F(y)), d(x, F(y)) + d(y, F(x))\}$ для всех $x, y \in X$. Тогда $x_* \in F(x_*)$.*

Доказательство. Имеем: $d(x_*, F(x_*)) \leqslant d(x_{n_i+1}, F(x_*)) + d(x_*, x_{n_i+1}) \leqslant H(F(x_{n_i}), F(x_*)) + o(1)$. Отсюда, по условию 2, получим:

$$d(x_*, F(x_*)) \leqslant q_2\, d(x_*, F(x_*)) + o(1).$$

Отсюда, в силу того, что $0 \leqslant q_2 < 1$ заключаем: $d(x_*, F(x_*)) = 0$. Следовательно, $x_* \in F(x_*)$.

Следующий пример показывает, что утверждение теоремы неверно, если заменить q_2 на единицу.

Пример 1. $X = \left\{-\frac{1}{2^n}, n = 0, 1, 2, \ldots\right\} \cup \{0\} \cup \{1\}$, $f: X \to X$ определяется следующим образом:

$$f\left(-\frac{1}{2^n}\right) = -\frac{1}{2^{n+1}},\ f(0) = 1,\ f(1) = -1.$$

Нетрудно проверить, что все условия теоремы 1 выполняются при $q_1 = q_2 = 1$ и f не имеет неподвижную точку.

Отметим, что условие 1 можно заменить на следующее более слабое: для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x = x_\varepsilon$, для которой $d(x_*, x) < \varepsilon$ и $d(x_*, F(x)) < \varepsilon$.

В связи с теоремой 1 возникает вопрос, будет ли верно ее утверждение для полных пространств, если условие 1) заменить на следующее: существует орбита $\{x_0, x_1 \ldots\}$ такая, что $\liminf d(x_n, x_{n+1}) = 0$? Следующий пример дает отрицательный ответ.

Пример 2. Рассмотрим $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $X = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Отображение $f: X \to X$ определяется следующим образом $f(S_n) = S_{n+1}$. Тогда X с обычным расстоянием будет полным метрическим пространством и f удовлетворяет условию 2) теоремы, а орбита $\{S_n, n = 1, 2, \ldots\}$ удовлетворяет требуемому условию в замечании, но f не имеет неподвижную точку.

Среди классов отображений сжимающего типа, неподвижную точку которых можно получить методом последовательных итераций, наиболее широким классом является класс отображений, исследованный Сириком [2]. Его результат можно сформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА А. *Пусть F – многозначное отображение из полного метрического пространства X в $CL(X)$, удовлетворяющее обобщенному условию сжатости: $H(F(x), F(y)) \leqslant q \max\{d(x, y), d(x, F(x)), d(y, F(y)), d(x, F(y)), d(y, F(x))\}$ для всех $x, y \in X$ где $q < 1$.* (1)

Тогда для любой точки $x_0 \in X$ существует орбита отображения F точки x_0, $\{x_0, x_1, \ldots\}$, сходящаяся к неподвижной точке.

Нетрудно видеть, что условие 2) теоремы 1 является более слабым, чем условие Сирика (1). Как следует из доказательства теоремы A ([2]), в случае полных пространств условие 1) следует из условия Сирика. Таким образом, в полных пространствах наш класс отображений шире, чем вышеуказанный класс. Следующий пример показывает, что наш класс строго содержит класс отображений, удовлетворяющих обобщенному условию сжатости (1).

Пример 3. $X=\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $f(x)=\sin x$. Очевидно, для всех $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ мы имеем $|\sin x-\sin y| \leqslant |x-y|$. Следовательно, условие 2) выполняется при $q_1=1$, $q_2=0$. Мы докажем, что обобщенное условие сжатости (1) не выполняется. Действительно, возьмем

$$x=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\ y=\frac{1}{n},$$

где n — целое положительное число. При $n \to +\infty$, по формуле Тейлора имеем:

$$\sin x=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3\right),$$

$$\sin y=\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right).$$

Отсюда

$$d(f(x), f(y))=\frac{1}{n^2}+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right),$$

$$d(x, y)=\frac{1}{n^2},$$

$$d(x, f(x))=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3\right),$$

$$d(y, f(y))=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right),$$

$$d(x, f(y))=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right),$$

$$d(y, f(x))=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3\right).$$

Из этих соотношений следует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\{d(x,y),\ d(x, f(x)),\ d(y, f(y)),\ d(x, f(y)),\ d(y, f(x))\}}{d(f(x), f(y))}=1.$$

Поэтому условие (1) не выполняется при $q<1$.

ЛЕММА. *Пусть X – сепарабельное метрическое пространство, Z – счетное всюду плотное множество в X. Пусть $F: X \to CL(X)$ — отображение, удовлетворяющее условию:*

$$H(F(x), F(y)) \leqslant q_1 d(x, y)+q_2 \max\{d(x,F(x))+d(y, F(y)),$$
$$d(x, F(y))+d(y, F(x))\} \text{ для всех } x, y \in X, \text{ где } q_1 \in [0, +\infty),\ q_2 \in [0, 1). \quad (2)$$

Пусть $H_0(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl\left(\bigcup\left(F(z), z \in Z \cap S\left(x, \frac{1}{n}\right)\right)\right)$, *где* $S\left(x, \frac{1}{n}\right)$ *обозначает шар с центром* x *и радиусом* $\frac{1}{n}$. *Тогда* F *и* H_0 *имеют одни и те же неподвижные точки.*

Доказательство. Пусть x—неподвижная точка для H_0, т. е. $x \in H_0(x)$. Из определения H_0 следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $z_\varepsilon \in Z \cap S(x,\varepsilon)$ такая, что $d(x, F(z_\varepsilon)) < \varepsilon$. Воспользуемся замечанием к теореме 1. В качестве x_ε и x_* возьмем z_ε и x соответственно. Тогда x является неподвижной точкой для F. Обратно, если $x \notin H_0(x)$, тогда существует целое положительное число $n_0 \in N$ такое, что $x \notin cl \bigcup \left(F(z), z \in Z \cap S\left(x, \frac{1}{n_0}\right)\right)$. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что для всякого $z \in S\left(x, \frac{1}{n_0}\right) \cap Z$

$$d(x, F(z)) > \delta. \tag{3}$$

Мы предположим противное, что $x \in F(x)$. Тогда (2) примет вид:

$$d(x, F(z)) \leqslant q_1 \, d(x, z) + q_2 \max \{d(z, x) + d(x, F(z)), d(z, x) + d(x, F(z))\}.$$

Отсюда получим

$$(1 - q_2) \, d(x, F(z)) \leqslant (q_1 + q_2) \, d(z, x).$$

При $z \to x$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю, следовательно, $d(x, F(z)) \to 0$ при $z \to x$. Но это противоречит (3). Таким образом, x также не является неподвижной точкой для F. Лемма доказана.

2. Измеримая зависимость неподвижной точки от параметра.

Пусть X — полное метрическое пространство, (Ω, Σ, μ)-пространство с полной σ-конечной мерой. Отображение $F: \Omega \to 2^X$ называется Σ-измеримым, если прообраз всякого открытого множества $B \subset X$ принадлежит Σ, т.е. $F^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap B \neq \phi\} \in \Sigma$. Рассмотрим $C: \Omega \to CL(X)$. Отображение C называется сепарабельным, если оно измеримо и существует счетное множество $Z \subset X$ такое, что $cl\,(Z \cap C(\omega)) = C(\omega)$ для всякого $\omega \in \Omega$. Пусть $F: GrC \to CL(X)$ — отображение, удовлетворяющее условию: $F(\omega, x) \subset C(\omega)$ для всех $(\omega, x) \in GrC$, где $GrC = \{(\omega, x) \in \Omega \times X : x \in C(\omega)\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для каждого* $\omega \in \Omega$

1) существуют $q_1(\omega) \in [0, +\infty)$, $q_2(\omega) \in [0, 1)$ *такие, что*

$$H(F(\omega, x), F(\omega, y)) \leqslant q_1(\omega) \, d(x, y) +$$
$$q_2(\omega) \max \{d(x, F(\omega, x)) + d(y, F(\omega, y)), d(x, F(\omega, y)) + d(y, F(\omega, x))\}$$

для всех $x, y \in C(\omega)$,

2) отображение $F(\omega, .): C(\omega) \to 2^{C(\omega)}$ *имеет неподвижную точку,*

3) Для каждого фиксированного $x \in X$ *отображение* $F(., x): C^{-1}(x) \to CL(X)$ *Σ-измеримо. Тогда F имеет измеримую неподвижную точку, т.е. существует измеримая функция* $x: \Omega \to X$ *такая, что* $x(\omega) \in F(\omega, x(\omega))$ $\forall\, \omega \in \Omega$.

Доказательство. Пусть Z—счетное множество со свойством $cl(Z \cap C(\omega)) = C(\omega)$ для всякого $\omega \in \Omega$. Рассмотрим отображение $H_0 : \mathrm{Gr}\, C \to CL(X)$, определенное следующим соотношением:

$$H_0(\omega, x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl \bigcup \left(F(\omega, z), z \in Z \cap S\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap C(\omega)\right).$$

Мы докажем, что H_0 является $\Sigma \otimes \mathcal{B}$ - измеримым, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра в X, а $\Sigma \otimes \mathcal{B}$ — наименьшая σ - алгебра множеств в $\Omega \times X$, содержащая все множества вида $A \times B$, $A \in \Sigma$, $B \in \mathfrak{B}$. Для этого рассмотрим $H_n : Gr\, C \to 2^X$, определенное следующим образом:

$$H_n(\omega, x) = \bigcup \left(F(\omega, z), z \in Z \cap S\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap C(\omega)\right).$$

Пусть B — открытое множество в X. Имеем:

$$\overset{-1}{H_n}(B) = \left\{(\omega, x) \in GrC : \bigcup\left(F(\omega, z), z \in Z \cap C(\omega) \cap S\left(x, \frac{1}{n}\right)\right) \cap B \neq \phi\right\} =$$

$$= GrC \cap \bigcup_{z \in Z} \left(\left\{\omega \in \overset{-1}{C}(z) : F(\omega, z) \cap B \neq \phi\right\} \times S\left(z, \frac{1}{n}\right)\right) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}.$$

Это значит, что H_n является $\Sigma \otimes \mathcal{B}$ - измеримым. Но тогда замыкание $cl\, H_n$ измеримо, а отображение H_0 как пересечение счетного числа измеримых отображений также будет $\Sigma \otimes \mathcal{B}$-измеримым (см [4]). Для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ (по лемме) множества неподвижных точек у отображений $F(\omega,.)$ и $H_0(\omega,.)$ совпадают, и мы их обозначим через $G(\omega)$. По условию 2 теоремы $G(\omega) \neq \phi$. Мы докажем, что график отображения G измерим. Действительно,

$$Gr\, G = \{(\omega, x) \in Gr\, C : x \in H_0(\omega, x)\} = \{(\omega, x) \in Gr\, C : d(x, H_0(\omega, x)) = 0\} =$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{(\omega, x) \in Gr\, C : d(x, H_0(\omega, x)) < \frac{1}{n}\right\} =$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{z \in Z} \left[\left\{(\omega, x) : z \in S\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\} \cap \{(\omega, x) \in Gr\, C :\right.$$

$$\left. d(z, H_0(\omega, x)) < \frac{1}{n}\right\}\Bigg] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{z \in Z} \left[\left\{(\omega, x) : z \in S\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}\right.$$

$$\left.\cap\, Gr\, C \cap \left\{(\omega, x) : d(z, H_0(\omega, x)) < \frac{1}{n}\right\}\right] \in \Sigma \otimes \mathcal{B}.$$

Поэтому G измеримо ([4], теор. 3.4) и имеет измеримое сечение $x(\omega)$. Ясно, что $x(\omega)$ является неподвижной точкой для F. Теорема доказана.

В качестве следствия этой теоремы мы получим измеримую зависимость неподвижной точки от случайного параметра для отображения, удовлетворяющего обобщенному условию сжатости Сирика (1). Насколько нам известно, этот результат является новым.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть X — полное метрическое пространство, $C : \Omega \to CL(X)$ — сепарабельное отображение, $F : GrC \to CL(X)$ — отображение, удовлетворяющее условию: $F(\omega, x) \subset C(\omega)$ для всех $(\omega, x) \in GrC$. Пусть F удовлетворяет следующим условиям:*

1) Для каждого $\omega \in \Omega$ существует $q(\omega) \in [0, 1)$ такое, что
$$H(F(\omega, x), F(\omega, y)) \leqslant q(\omega) \max \{ d(x, y), d(x, F(\omega, x)), d(y, F(\omega, y)), d(x, F(\omega, y)), d(y, F(\omega, x)) \} \text{ для всех } x, y \in C(\omega),$$

2) Для каждого фиксированного $x \in X$, $F(., x) : C^{-1}(x) \to CL(X)$ является Σ-измеримым. Тогда существует измеримая функция $x(\omega)$ такая, что $x(\omega) \in C(\omega) \bigcap F(\omega, x(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Из условия 1) следует, что условие 1) теоремы 2 выполняется при $q_1(\omega) = q_2(\omega) = q(\omega)$. Условие 2) выполняется в силу теоремы A. Условие 3) есть условие 2) в следствии. Таким образом, все условия теоремы 2 выполняются.

Замечание. В нашей теореме 2 случайная область определения $C(\omega)$ предполагается измеримой и E предполагается измеримым по ω, а коэффициенты $q_1(\omega)$, $q_2(\omega)$ являются произвольными.

Автор благодарит Ф. В. Чыонг за подробные обсуждения при постановке задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Phan Van Chương a) *Random Versions of Kakutani — Ky Fan's Fixed point theorem*, J. Math. Annal. Appl., 82 (1982), 473-490.

b) *Théorèmes de point fixe pour les multiapplications aléatoires de type contraction sans hypothèses de continuité*, Acta Math. Vietnamica, 5 (1980), 24 — 41.

[2] L. Ciric, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974), 267 — 273.

[3] W. Engl Heinz, *Random fixed point theorems for multivalued mappings*, Pac. J. Math., 76(1978), 351 — 359.

[4] C. J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund Math., 87(1975), 52 — 72.

Поступила в редакцию 10 Марта 1986г

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ХАНОЙ, ВЬЕТНАМ