ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 12 No. 1 (1987)

ECOULEMENT PLAN AUTOUR DE CERTAINS OBSTACLES DES FLUIDES VISQUEUX EN REGIME D'OSEEN

HOANG DINH ZUNG

Le mouvement plan des liquides visqueux autour des obstacles en régime d'Oseen a été étudié dans [1] – [5]. Dans ce travail on considère l'écoulement plan autour d'un segment et d'une ellipse.

Les équations des fluides visqueux par Oseen s'écrivent dans le plan complexe $z = x + iy$ comme suit [1]

$$\begin{aligned} \rho U^0 \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} &= \mu \Delta u, \\ \rho U^0 \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} &= \mu \Delta v, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

où $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont les composantes du vecteur vitesse de courant sur les axes Ox et Oy respectivement, U^0 est la vitesse a l'infini, ρ la densité du fluide, μ le coefficient de viscosité, $p(x, y)$ la pression du fluide et Δ l'opérateur de Laplace.

Comme nous l'avons montré dans [2], la solution générale du système d'équations (1) peut être représentée sous la forme

$$u(x, y) - iv(x, y) = F(z) + ie^{\lambda x} [f(z) +$$
$$+ \lambda \int_0^1 r I_1(\lambda r \gamma) f(z(1-\gamma^2)) d\gamma + \lambda \int_0^1 \bar{z} I_0(\lambda r \gamma) \bar{f}(z(1-\gamma^2)) \gamma d\gamma], \tag{2}$$

où $F(z)$ et $f(z)$ sont des fonctions analytiques arbitraires, $I_\nu(.)$ sont les fonctions de Bessel à argument imaginaire d'ordre ν, $\lambda = \frac{\rho U^0}{2\mu}$, $r = |z|$.

Soit le segment L l'obstacle: $L = \{(x,y) : -l \leqslant x \leqslant l,\ y = 0\}$. On a les conditions aux limites suivantes [2]

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \text{ pour } -l \leqslant x \leqslant l,\ y = 0, \tag{3}$$

$$u(x, y) \to U^0,\ v(x, y) \to 0 \text{ quand } r \to \infty. \tag{4}$$

En raison de la symétrie la vitesse doit être réelle quand z est réel:

$$v(x, y) = 0 \text{ pour } l < |x| < \infty,\ y = 0. \tag{5}$$

Bornons-nous à examiner le cas spécial où λ tend vers 0 ($U^0 = 0$). En nous appuyant sur la représentation (2) et en utilisant les conditions (3) — (5), nous prenons la fonction $f(z) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ sous la forme

$$f(z) = C(l^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left[\sqrt{z^4} + \left(\sqrt{z^4}\right)^{-1}\right]\right\}. \tag{6}$$

où C est une constante réelle arbitraire et où pour les radicaux on a la détermination suivante

$$(l^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}\left[\left((l^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} + (l^2 - x^2 + y^2)\right]^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ i\,2^{-\frac{1}{2}}\left[\left((l^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} - (l^2 - x^2 + y^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

ce qui entraîne

$$(l^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} (l^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} & \text{pour } z = x,\ -l \leqslant x \leqslant l, \\ i\,(x^2 - l^2)^{\frac{1}{2}} & \text{pour } z = x,\ l < |x| < \infty, \end{cases}$$

et la partie réelle du radical choisi $\sqrt{z^4}, \left(\sqrt{z^4}\right)^{-1}$ est positive.

Reste donc à déterminer la fonction analytique $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ de manière à satisfaire aux conditions (3) — (5). De (2), (3) et (5) on déduit

$$U(x, y) = e^{\lambda x}\Big\{\beta(x, y) + \lambda \int_0^1 \left[\,|x|\, I_1(\lambda |x| \gamma) - \right. \tag{8}$$
$$\left. - x\gamma I_0(\lambda |x| \gamma)\right]\beta(x(1 - \gamma^2), y(1 - \gamma^2))d\gamma\Big\},$$
$$-l \leqslant x \leqslant l,\ y = 0,$$

$$V(x, y) = -e^{\lambda x}\Big\{\alpha(x, y) + \lambda \int_0^1 \left[\,|x|\, I_1(\lambda |x| \gamma) + \right. \tag{9}$$
$$\left. + x\gamma I_0(\lambda |x| \gamma)\right]\alpha(x(1 - \gamma^2), y(1 - \gamma^2))\,d\gamma\Big\},$$
$$-\infty < x < \infty,\ y = 0,$$

où les fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ sont déterminées par l'égalité (6).

En raison de la symétrie de l'écoulement il suffit de déterminer la fonction $F(z)$ dans le demi-plan supérieur $y > 0$. Par la méthode employée dans [6], on obtient la solution du problème mixte (8), (9) sous la forme

$$F(z) = \frac{(l+z)^{\frac{1}{2}}(l-z)^{\frac{1}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\gamma)\ (l+\gamma)^{-\frac{1}{2}}(l-\gamma)^{-\frac{1}{2}}}{\gamma - z}\, d\gamma, \tag{10}$$

où

$$P\ (x) = \begin{cases} U(x,\ 0) \text{ pour } -l \leqslant x \leqslant l, \\ i\ V\ (x,\ 0) \text{ pour } l < |\ x\ | < \infty. \end{cases}$$

Remarquons que de (9) on peut, en appliquant la formule intégrale de Schwartz, exprimer la fonction $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V\ (\gamma,\ 0)\ d\gamma}{\gamma - z}, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0. \tag{11}$$

De plus, d'après le théorème d'unicité, de (2), (6), (7), (8)-(10) et en tenant compte du comportement des fonctions considérées, on voit que la fonction analytique $F(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = -ie^{\lambda z}\Big[g\ (z) + \tag{12}$$

$$+ \lambda \int_0^1 \sqrt{z^2}\ I_1(\lambda \sqrt{z^2}\ \gamma)\ g\ (z(1-\gamma^2))\ d\gamma +$$

$$+ \lambda \int_0^1 z\ I_0\ (\lambda \sqrt{z^2}\ \gamma) \overline{g}\ (z(1-\gamma^2))\ \gamma\ d\gamma\Big],$$

où

$$g(z) = -i\ C\ (z^2 - l^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left[\sqrt{z^4} + \left(\sqrt{z^4}\right)^{-1}\right]\right\}, \tag{13}$$

$$(z^2 - l^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\left[\left((x^2 - y^2 - l^2)^2 + 4x^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} + (x^2 - y^2 - l^2)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ i\, 2^{\frac{1}{2}}\left[\left((x^2 - y^2 - l^2)^2 + 4x^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} - (x^2 - y^2 - l^2)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

On a alors

$$(z^2 - l^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} (x^2 - l^2)^{\frac{1}{2}} \text{ pour } z = x,\ l < |x| < \infty, \\ i(l^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ pour } z = x,\ -l \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Enfin, en substituant les relations (12), (6) dans (2) on obtient la solution cherchée. Il est facile de montrer que cette solution satisfait à toutes les conditions du problème considéré. Ainsi, nous obtenons finalement la solution :

$$u(x, y) - iv(x, y) = i\,[f(z) - g(z)], \tag{15}$$

où $f(z)$ et $g(z)$ sont determinées respectivement par les égalités (6) et (13).

Remarquons que si nous déterminons les fonctions analytiques $f(z)$ de manière qu'en tendant vers zéro pour $r \to \infty$ elles se comportent différemment, la solution du problème considéré n'est pas unique.

2. ECOULEMENT AUTOUR D'UNE ELLIPSE

Soit l'ellipse E l'obstacle : $E = \left\{ (x, y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0 \right\}$.

On fera de la même manière pour $a < b$.

On a les mêmes conditions que précédemment :

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \text{ pour } x, y \in E; \tag{16}$$

$$v(x, y) = 0 \text{ pour } a < |x| < \infty,\ y = 0; \tag{17}$$

$$u(x, y) \to U^0,\ v(x, y) \to 0 \text{ quand } r \to \infty. \tag{18}$$

La solution est aussi cherchée sous la forme (2). De (2), (16) et (17) on obtient

$$\begin{aligned} U(x, y) = {} & e^{\lambda x} \beta(x, y) + \\ & + \lambda e^{\lambda x} \Big\{ \int_0^1 r\, I_1(\lambda r \gamma)\, \beta(x(1-\gamma^2), y(1-\gamma^2))\, d\gamma - \\ & - \int_0^1 \gamma\, I_0(\lambda r \gamma)\, [y \alpha(x(1-\gamma^2), y(1-\gamma^2)) + x \beta(x(1-\gamma^2), y(1-\gamma^2))]\, d\gamma \Big\}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} V(x, y) = {} & -e^{\lambda x} \alpha(x, y) - \\ & - \lambda e^{\lambda x} \Big\{ \int_0^1 r\, I_1(\lambda r \gamma)\, \alpha(x(1-\gamma^2), y(1-\gamma^2))\, d\gamma + \\ & + \int_0^1 \gamma\, I_0(\lambda r \gamma)\, [x \alpha(x(1-\gamma^2), y(1-\gamma^2)) - y \beta(x(1-\gamma^2), y(1-\gamma^2))]\, d\gamma \Big\}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$x, y \in E,\ r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$V(x,y) = -e^{\lambda x}\,\alpha(x,y) -$$

$$- \lambda e^{\lambda x}\Big\{\int_0^1 |x|\, I_1(\lambda |x| \gamma)\alpha(x(1-\gamma^2), y(1-\gamma^2))d\gamma +$$

$$+\int_0^1 x\gamma\, I_0(\lambda |x| \gamma)\,\alpha(x(1-\gamma^2), y(1-\gamma^2))d\gamma\Big\}, \tag{21}$$

$$(a < |x| < \infty,\ y = 0).$$

Pour déterminer les fonctions $f(z) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ et $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, nous considérons la transformation conforme du domaine extérieur à l'ellipse E sur le plan complexe $z_1 = x_1 + iy_1$, qui ne contient pas le segment L, $L = \{(x_1, y_1) : -l \leqslant x_1 \leqslant l,\ y_1 = 0\}$, c'est-à-dire on considère la transformation du type

$$z_1 = \frac{l}{c^2}\left(az - b\left(z^2 - c^2\right)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{22}$$

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

avec

$$z = \frac{1}{l}\left(az_1 + b\left(z_1^2 - l^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

En posant

$$F(z(z_1)) \equiv F(z_1) = U_1(x_1, y_1) + iV_1(x_1, y_1), \tag{23}$$

on déduit de (19) — (22)

$$U_1(x_1, y_1) = U(x(x_1, y_1), y(x_1, y_1)) =$$

$$= U\left(\frac{a}{l}x_1,\ \frac{b}{l}\left(l^2 - x_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{24}$$

$$V_1(x_1, y_1) = V\left(\frac{a}{l}\ x_1,\ \frac{b}{l}\left(l^2 - x_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{25}$$

$$(-l \leqslant x_1 \leqslant l,\ y_1 = 0);$$

$$V_1(x_1, y_1) = V\left(\frac{ax_1 + b(x_1^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}}{l},\ 0\right), \tag{26}$$

$$(l < |x_1| < \infty,\ y_1 = 0).$$

De (2), (23) — (26) il s'ensuit qu'on peut déterminer la fonction $f(z)$ sous la forme, analogue à (6):

$$f(z) = C(l^2 - z_1^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left[\sqrt{z^4} + \left(\sqrt{z^4}\right)^{-1}\right]\right\}, \tag{27}$$

où $z_1 = z_1(z)$ est déterminée par (22) et $(l^2 - z_1^2)^{\frac{1}{2}}$ par (7) avec $z = z_1$.

Comme précédemment, on peut exprimer la fonction analytique $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = -C\,(z_1^2 - l^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left[\sqrt{z^4} + \left(\sqrt{z^4}\right)^{-1}\right]\right\}, \qquad (28)$$

où $(z_1^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}$ est donné par (14) avec $z = z_1$.

Finalement, substituant (28), (27) et (22) dans (2) ($\lambda \to 0$) on obtient la solution du problème considéré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.E. Kochin, I.A. Kibel et N.V. Roze, *Hydrodynamique théorique* (en russe), vol. 2, Moscou, 1963.

[2] Le Van Thiem, Hoang Dinh Zung, *Ecoulement plan des fluides visqueux en régime d'Oseen*, Acta Math. Vietnam, 2 (1977), 23 — 33.

[3] O.I. Panhich, *Sur la solution du système d'équations d'Oseen pour le mouvement des liquides visqueux autour d'un contour plan par la méthode potentielle* (en russe), Izv. Vych. Ucheb, Zav., Math., 1962, I. n°3, 98 – 110 ; II. n°4, 118 – 129 ; III. n°6, 73 – 84.

[4] K.B. Ranger, *A note on Oseen flow*, Quart. Appl. Math., 30 (1972), 357 — 362.

[5] W.E. Olmstead, *A homogeneous solution for viscous flow around a half-plane*, Quart. Appl. Math., 33 (1975), 165 — 169.

[6] V.C. Ragojin, *Sur la détermination de la forme d'un solide d'après la pression impulsive donnée au choc* (en russe) Prikl. Mat. i Mech., 23 (1959), n° 3, 589 — 591.

Manuscrit reçu le 8 Janvier 1985
Version corrigée reçue le 15 Août 1986

INSTITUT DE MATHEMATIQUES, P. O. BOX 631 BOHO, 10000 HANOI, VIETNAM