ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. II No2 (1986)

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ПОЛИНОМОВ ИЗ ЭКСПОНЕНТ

ХА ЗУЙ БАНГ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть H - некоторое локально-выпуклое пространство и $x_n \in H$, $n = 1, 2, \ldots$. Следуя Ю. Ф. Коробейнику [1], будем говорить, что последовательность элементов $\{x_n\}$ является абсолютно представляющей системой (а.-п.с.) в H, если любой элемент x из H можно представить в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k ,$$

абсолютно сходящегося в H.

В исследованиях А. Ф. Леонтьева, подытоженных в монографии [2], впервые было показано, что для любой ограниченной выпуклой области G можно указать такую последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}$ (зависящую от G), что любую функцию $f(z)$, аналитическую в G , можно разложить в ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} ,$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри G (т. е. $\{e^{\lambda_n z}\}$ является а. -п.с. в $H(G)$ — пространстве всех аналитических в G функций с топологией компактной сходимости).

Это разложение, благодаря своей простоте, оказалось весьма удобным аппаратом представления аналитических функций, нашедшим приложения в теории операторов типа свертки, вопросах аналитического продолжения и так далее.

Теория представляющих систем в пространствах аналитических функций в последнее время сильно развивается, в основном, А. Ф. Леонтьевым, Ю. Ф. Коробейником и их учениками. По этому вопросу имеется обширный список работ (см. литературу статьи [1]. В работах [3-4] были изучены представляющие системы из экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ в банаховых пространствах аналитических функций.

В этой работе будут изучены аналогичные вопросы [3-4] для другого банахова пространства аналитических функций. Оказывается, что в этом пространстве представляющая система из экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ не существует, поэтому здесь будет изучена представляющая система вида $\{z^k e^{\lambda_n z}\}$.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть G — произвольная область комплексной плоскости. Обозначим символом $H_c(G)$ пространство всех аналитических в G и непрерывных на G функций с нормой

$$\| f \|_1 = \sup_{z\in G} | f(z) | .$$

Пусть M — множество всех целых функций $f(z)$ таких, что

$$\| f \|_2 = \sup_{n\geqslant 0} | f^{(n)}(0) | < \infty.$$

По каждой ограниченной области G введем в M норму $\| \cdot \|_G$, определенную следующим образом

$$\| f \|_G = \sup_{n\geqslant 0} \sup_{z\in G} | f^{(n)}(z) |$$

и обозначим через (M, G) пространство M с топологией, порожденной нормой $\| \cdot \|_G$.

Легко видеть, что (M, G) является B-пространством, $M \subset [1, 1]$, $M \neq [1, 1]$, где $[\rho, \sigma]$ есть класс целых функций роста не выше чем порядка ρ, и типа σ.

Пусть G_1, G_2 — произвольные ограниченные области. Тогда (M, G_1), (M, G_2) и $(M, \| \cdot \|_2)$ топологически изоморфны между собой.

Как известно из анализа, сопряженное к (M, G) пространство будет l_1, где их двойственность задается следующим образом

$$(f, d) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) d_n, \ \forall d = \{d_n\} \in l_1, \forall f \in (M, G).$$

ЛЕММА 1. *Пусть C — такое подмножество замкнутого единичного круга K_1, что C плотно в некотором $C_r = \{z : | z | = r\}$, $0 < r \leqslant 1$.*

Тогда $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda\in C}$ полно в (M, G).

Доказательство. Пусть $d \in l_1$ и $(e^{\lambda z}, d) = 0 \quad \forall\lambda \in C$. Тогда

$$0 = (e^{\lambda z}, d) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^n , \forall\lambda \in C.$$

Но C плотно в C_r поэтому по принципу максимума модуля имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = 0, \qquad \forall z : |z| \leqslant r.$$

Отсюда получим $d_n = 0, n = 0, 1,\ldots,$ т.е. $d = 0$. По известному критерию Банаха это показывает, что $\left\{ e^{\lambda z} \right\}_{\lambda \in C}$ полно в (M, G). Лемма доказана.

Пусть Q — произвольная область. Будем говорить, что область Q обладает $Л$-свойством, если для любой точки $\alpha \in \overline{Q}$ существует такая её окрестность U (U является пересечением $\overline{Q}$ с некоторым кругом с центром в точке α), что для любой $z \notin U$ отрезок, соединяющий α и z, содержится в $\overline{Q}$.

Обозначим через $H_1(Q)$ — пространство всех аналитических в Q и непрерывно дифференцируемых на $\overline{Q}$ функций. Тогда справедлива

ЛЕММА 2. *Пусть область Q обладает $Л$- свойством и $f_n(z)$ из $H_1(Q)$ такие, что*

$$\| f'_n(z) \|_1 \leqslant M < \infty, \; n = 1, 2,\ldots$$

Тогда семейство $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывно на $\overline{Q}$.

Для получения этой леммы нам понадобится следующий факт из [5, следствие 3.2.2]:

Пусть $f : [a, b] \to F$ – непрерывное отображение (где F — банахово пространство). Предположим, что имеем правую производную $f'_П(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$ и что $\| f'_П(x) \| \leqslant K$. Тогда

$$\| f(x_2) - f(x_1) \| \leqslant K|x_2 - x_1|, \; \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Докажем теперь лемму 2. Рассмотрим произвольную точку $\alpha \in \overline{Q}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки α такая, что $\operatorname{diam} U < \varepsilon/M$. Берем произвольную точку $z_0 \in U$. Так как Q обладает $Л$ - свойством, можно считать, что отрезок $[z_0, \alpha] \subset U$. Пусть $f \in H_1(Q)$ такая, что $\| f' \|_1 \leqslant M$, Тогда для любой $z \in [z_0, \alpha]$

$$z = z(t) = z_0 + t(\alpha - z), \qquad t \in [0, 1]$$

и положим

$$g(t) = f(z(t)) = f(z_0 + t(\alpha - z_0)).$$

Тогда

$$g'(t_0) = (\alpha - z_0) f'(z(t_0)), \; |g'(t)| \leqslant M|\alpha - z_0|, \forall t \in [0,1],$$

Отсюда получим

$$|g(1) - g(0)| = |f(z_0) - f(\alpha)| \leqslant M|\alpha - z_0| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что G — некоторая фиксированная ограниченная область.

Обозначим через $E(G)$ класс всех аналитических в K_1 функций, которые допускает следущее представление в K_1:

$$h(z) = \sum_{\substack{k=0\\n=1}}^{\infty} a_n^k z^k e^{\alpha_n z}, \quad \alpha_n \in \overline{G}, \sum_{\substack{k=0\\n=1}}^{\infty} |a_n^k| < \infty. \tag{1}$$

Тогда $E(G)$ является линейным векторным пространством над полем комплексных чисел.

Положим

$$L = \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n : \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty\}$$

Тогда имеет место

ЛЕММА 3. $E(G) = L$.

Доказательство. Пусть $f \in E(G)$. Тогда существуют $\{\lambda_n\} \subset \overline{G}$, $\{a_n^k\}$ такие, что для всех $z \in K_1$

$$f(z) = \sum_{\substack{k=0\\n=1}}^{\infty} a_n^k z^k e^{\lambda_n z} = \sum_{\substack{k=0\\n=1}}^{\infty} a_n^k z^k \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^p z^p}{p!}\right) = \sum_{q=0}^{\infty} b_q z^q .$$

Отсюда получим

$$\sum_{q=0}^{\infty} |b_q| \leqslant \left(\sum_{\substack{k=0\\n=1}}^{\infty} |a_n^k|\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{|\lambda_n|^p}{p!}\right) \leqslant e^{\gamma} \sum_{\substack{k=0\\n=1}}^{\infty} |a_n^k| < \infty,$$

где $\gamma = \sup\limits_{z \in G} |z|$, т.е. $f(z) \in L$.

Наоборот, пусть $f(z) \in L$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty.$$

Берем произвольную точку $\alpha \in \overline{G}$. Тогда

$$f(z) = e^{\alpha z} e^{-\alpha z} f(z) = e^{\alpha z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=k} f_q \frac{(-\alpha)^p}{p!}\right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k e^{\alpha z},$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \leqslant \left(\sum_{q=0}^{\infty} |f_q|\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^p}{p!}\right) = e^{|\alpha|} \sum_{q=0}^{\infty} |f_q| < \infty.$$

это значит что $f(z) \in E(G)$. Лемма доказана.

Пусть $h(z) \in L$. Положим

$$\|h\| = \inf \sum_{\substack{k=0\\ n=1}}^{\infty} |a_n^k| \quad , \tag{2}$$

где inf берется по всем представлениям (1) функции $h(z)$. Введем в L еще одну норму

$$\|f\|_L = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|, \; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in L.$$

Тогда справедлива

ЛЕММА. *Пусть $f(z) \in L$. Тогда*

$$\|f\|_L \leqslant e^{\gamma} \|f\|$$

и если $0 \in \overline{G}$ то

$$\|f\| \leqslant \|f\|_L .$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in L$. Тогда из леммы 3 следует, что $f(z) \in E(G)$ и поэтому существуют $\{\lambda_n\} \subset \overline{G}$, $\{a_n^k\}$ такие, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \sum a_n^k z^k e^{\lambda_n z}, \quad \sum |a_n^k| < \infty.$$

Отсюда, как было сделано в доказательстве леммы 3, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \leqslant e^{\gamma} \sum |a_n^k|. \tag{3}$$

Так как (3) верно для всех представлений

$$f(z) = \sum a_n^k z^k e^{\gamma_n z}, \; \{\lambda_n\} \subset \overline{G}, \; \sum |a_n^k| < \infty,$$

имеем

$$\|f\|_L = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \leqslant e^{\gamma} \|f\|.$$

Далее, пусть $0 \in \overline{G}$. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k e^{0 \cdot z}.$$

Поэтому

$$\|f\|_L = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \geqslant \|f\|.$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $S = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \in \overline{G}$, причём все α_n различны, $n = 1, 2, \ldots$ Будем говорить, что S представляет L в K_1, если для любой $h(z) \in L$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\{a_n^k\}$ такая, что

$$h(z) = \Sigma\, a_n^k\, z^k\, e^{\alpha_n z}\ , \ \Sigma\, |\, a_n^k\, | \ < \|h\| + \varepsilon. \tag{4}$$

S допускает нетривиальное разложение нуля (д.н.р.н.), если существует $\{a_n^k\}$ такая, что

$$0 = \Sigma\, a_n^k z^k e^{\alpha_n z}\ , \ 0 < \Sigma\, |\, a_n^k\, | < \infty. \tag{5}$$

ЛЕММА 5. *S д.н.р.н. (5) тогда и только тогда, когда*

$$\Sigma\, a_n^k f^{(k)}(\alpha_n) = 0 \quad \forall f \in M. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $f_z(\xi) = e^{z\xi z}, \in K1$.

Тогда $f_z^{(k)}(\alpha_n) = z^k e^{\alpha_n z}$. Но, очевидно, $f_z(\xi) \in M \quad \forall z \in K_1$ поэтому из (6) вытекает (5).

Наоборот, пусть (5) выполняется. Тогда

$$\Sigma\ a_n^k f_z^{(k)}(\alpha_n) = 0 \quad \forall\, z \in K_1,$$

но из леммы 1 следует, что $\{e^{z\xi}\}_{z \in K_1}$ полно в (M, G). Отсюда немедленно получим (6). Лемма доказана.

§ 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Докажем следующую основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Сформулируем следующие утверждения:*

1) *S представляет L;*

2) $\| f \|_G = \sup\limits_{k \geqslant 0}\ \sup\limits_{n \geqslant 1}\ |\, f^{(k)}(\alpha_n)\, | \qquad \forall\ f \in M$;

3) $\partial G \subset \overline{S}$.

Тогда 3) $\Rightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 1). В случае, когда $G = \{z\ ;\ |\, z\, | < r\}$, $0 < r < \infty$, имеем 3) $\Leftrightarrow$ 2).

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2): Докажем от противного. Пусть 2) не выполняется. Тогда существует $f_0(z) \in M$ такая, что

$$\sup_{k \geqslant 0}\ \sup_{n \geqslant 1}\ |\, f_0{}^{(k)}(\alpha_n)\, | \ < \ \sup_{k \geqslant 0}\ \sup_{z \in G}\ |\, f_0{}^k(z)\, |\ .$$

Следовательно, существуют такой номер k_0 и такая точка $\alpha \in G$, что

$$|f_0^{(k_0)}(\alpha)| > \sup_{k \geqslant k_0} \sup_{n \geqslant 1} |f_0^{(k)}(\alpha)|.$$

Положим $g_0(z) = f_0^{(k_0)}(z)$. Тогда $g_0(z) \in M$ и

$$|g_0(\alpha)| > \sup_{k \geqslant 0} \sup_{n \geqslant 1} |g_0^{(k)}(\alpha_n)|.$$

Можем считать, что $g_0(z) = 1$. Тогда

$$|g_0^{(k)}(\alpha_n)| \leqslant 1 - \delta_0,\ \delta_0 > 0,\ \forall k \geqslant 0,\ \forall n \geqslant 1.$$

Рассмотрим функцию $e^{\alpha z}$. Тогда из 1) следует что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\{a_n^k\}$ такая что в K_1

$$e^{\alpha z} = \Sigma\, a_n^k\, z^k\, e^{\alpha n z},\ \Sigma\,|a_n^k| < \|e^{\alpha z}\| + \varepsilon = 1 + \varepsilon.$$

Применяя лемму 5, получим:

$$f(\alpha) - \Sigma\, a_n^k\, f^{(k)}(\alpha_n) = 0\quad \forall f \in M.$$

В частности при $f = g_0$ получим

$$g_0(\alpha) - \Sigma\, a_n^k\, g_0^{(k)}(\alpha_n) = 1 - \Sigma\, a_n^k\, g_0^{(k)}(\alpha_n) = 0. \tag{7}$$

С другой стороны, при $\varepsilon < \delta_0$ имеем

$$|\Sigma\, a_n^k\, g_0^{(k)}(\alpha_n)| \leqslant (1-\delta_0)\,\Sigma\,|a_n^k| < (1-\delta_0)(1+\varepsilon) =$$
$$= 1 + \varepsilon - \delta^0 - \delta_0\varepsilon < 1.$$

А это противоречит (7). Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана.

2) $\Rightarrow$ 1): Доказательство этой импликации проводится аналогично доказательству импликации *iii*) $\Rightarrow$ *ii*) теоремы 3 в [3].

Покажем сначала, что S представляет все экспоненты, т.е. $\forall \alpha_0 \in \overline{G}$ (можно считать, что $\alpha_0 \notin S$), $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \{a_n^k\}$:

$$e^{\alpha_0 z} = \Sigma\, a_n^k\, z^k e^{\alpha_n z},\quad \Sigma\,|a_n^k| < 1 + \varepsilon.$$

Рассмотрим отображение $T: (M, G) \to l_\infty$, определенное следующим образом

$$Tf = \{f(\alpha_0), f(\alpha_1), f(\alpha_2), f'(\alpha_1), f(\alpha_3), f'(\alpha_2), f''(\alpha_1)\ldots\}, \tag{8}$$

где в правой части (8) входят все $f^k(\alpha_n)$, $k = 0, 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots;$ $f(\alpha_0)$ и все $f^k(\alpha_n)$ записываются в (8) по одному строгому правилу.

Из 2) следует, что T является изометричным вложением (M, G) в l_∞. Положим $B = T(M)$. Тогда B — замкнутое нормированное подпространство l_∞. Покажем, что B является * — слабо замкнутым множеством. Пусть $\|\cdot\|_3$ — норма в l_∞ и пусть $c_n \in B$, $c_n \to c_0$ * - слабо. Тогда, как известно, $\{\|c_n\|_3\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена и

$$\lim_{n\to\infty} c_k^{(n)} = c_k^{(o)}, \; k = 0, 1, \ldots$$

где $c_n = \{c_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$, $n = 0, 1, \ldots$

Далее, пусть $T^{-1}(c_n) = f_n \in (M, G)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда из 2) вытекает, что $\{\| f_n \|_G\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена и существуют

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_0), \; \lim_{n\to\infty} f_n^{(j)}(\alpha_k), \; j = 0, 1, \ldots; \; k = 1, 2, \ldots$$

Пусть $z_0 \in G$, $\| f_n \|_G \leqslant M < \infty$, $n = 1, 2\ldots$ Тогда

$$\sup_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant 0} | f_n^{(k)}(z_0) | \leqslant M.$$

Отсюда получим $\forall z \in \mathbf{C}$, $\forall n \geqslant 1$, $\forall k \geqslant 0$

$$| f_n^{(k)}(z) | = \Big| \sum_{l=k}^{\infty} \frac{f_n^{(l)}(z_0)}{(l-k)!} (z-z_0)^{l-k} \Big| \leqslant M e^{|z_0|} e^{|z|}$$

Выберем число $R > 0$, чтобы $\overline{G} \subset Q = \{ z : |z| < R \}$. Тогда из (9) следует, что

$$\sup_{k\geqslant 0} \sup_{z\in Q} | f_n^{(k)}(z) | \leqslant M_1 < \infty, \; n = 1, 2, \ldots$$

В частности, имеем

$$\sup_{z\in Q} | f_n(z) | \leqslant M_1, \; \sup_{z\in Q} | f_n'(z) | \leqslant M_1, \; n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда, учитывая $Л$-свойство круга Q и применяя лемму 2 получим что $\{f_n\}$ равностепенно непрерывно на $\overline{Q}$. С другой стороны, $\{f_n\}$ равномерно ограничено на $\overline{Q}$. Следовательно по теореме Арцела-Асколи существуют последовательность $\{n_m\}$ и непрерывная на $\overline{Q}$ функция f такие, что $f_{n_m} \to f$, $m \to \infty$ равномерно на $\overline{Q}$. Отсюда следует, что $f \in H_c(Q)$. Но $\overline{G} \subset Q$ поэтому

$$\lim_{m\to\infty} f_{n_m}^{(k)}(z) = f^{(k)}(z) \quad \forall z \in \overline{G}, \; \forall k \geqslant 0,$$

$$| f^{(k)}(z_o) | = \Big| \lim_{m\to\infty} f_{n_m}^{(k)}(z_o) \Big| \leqslant \sup_{m\geqslant 1} | f_{n_m}^{(k)}(z_o) | \leqslant M.$$

Это означает, что $f \in M$.

Итак, мы показали, что существуют функция $f \in M$ и последовательность $\{n_m\}$ такие что

$$\lim_{m\to\infty} f^{(j)}_{n_m}(\alpha_k) = f^{(j)}(\alpha_k),\ j = 0, 1, \dots;\ k = 1, 2, \dots$$

С другой стороны, существуют

$$\lim_{n\to\infty} f^{(j)}_{n}(\alpha_k),\ j = 0, 1, \dots;\ k = 1, 2, \dots$$

Отсюда получим

$$\lim_{n\to\infty} f^{(j)}_{n}(\alpha_k) = f^{(j)}(\alpha_k),\ j = 0, 1, \dots;\ k = 1, 2, \dots$$

Из 2) следует, что невозможно существование одновременно двух различных функций f и g из M таких, что

$$f^{(j)}(\alpha_k) = g^{(j)}(\alpha_k),\ j = 0, 1, \dots;\ k = 1, 2, \dots,$$

Поэтому $c_0 = Tf \in B$. Тем самым мы доказали $*$-слабую замкнутость B.

Рассмотрим теперь элемент $p = (1, 0, 0, \dots)$ и покажем, что $\rho(p, B) = 1/2$. В самом деле, пусть $g_0(z) \equiv 1/2$. Тогда $g_0(z) \in M$ и Tg_0 $(\in B)$ имеет расстояние $1/2$ от точки p. Если существует функция $g \in M$ такая, что $\rho(Tg, p) < 1/2$, то это означает, что

$$|g(\alpha_0) - 1| < \frac{1}{2}, \qquad \sup_{k\geqslant 0}\ \sup_{n\geqslant 1} |g^{(k)}(\alpha_n)| < \frac{1}{2}.$$

Из $|g(\alpha_0) - 1| < \frac{1}{2}$ вытекает, что $|g(\alpha_0)| > \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$|g(\alpha_0)| > \frac{1}{2} \geqslant \sup_{k\geqslant 0}\ \sup_{n\geqslant 1} |g^{(k)}(\alpha_n)|$$

$$= \sup_{k\geqslant 0}\ \sup_{z\in G} |g^{(k)}(z)| \geqslant |g(\alpha_0)|$$

и мы получили противоречие.

Итак, $\rho(p, B) = \frac{1}{2}$. Будем использовать следующую теорему Банаха (см. теорему 6 [6]): Если E — сепарабельное банахово пространство, E^* — сопряженное векторное пространство, B — $*$-слабо замкнутое подпространство E^*, $p \notin B$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует элемент $x \in E$ такой, что

$$x \perp B,\quad (x, p) = 1,\quad \|x\| < \frac{1}{d} + \varepsilon,$$

где $d = \rho(p, B)$ и (x, p) — значение линейного функционала p в точке x.

Применяя эту теорему к нашему случаю, получим, что существует последовательность $\{a_n^k\}$ такая, что

а) $f(\alpha_0) + \Sigma a_n^k f^{(k)}(\alpha_n) = 0 \quad \forall f \in M$;

б) $\Sigma\,|\,a_n^k\,| < 1+\varepsilon$.

Заметим, что $\forall\,\xi\in K_1\quad e^{\xi t}\in M$. Поэтому из а), б) вытекает

$$e^{\xi\alpha_0}+\Sigma\, a_n^k\,\xi^k\,e^{\xi\alpha n}=0,\qquad \Sigma\,|\,a_n^k\,|<1+\varepsilon\quad\forall\,\xi\in K_1,$$

т.е.

$$e^{\alpha_0 z}=\Sigma\,(-a_n^k)\,z^k e^{\alpha_n z},\qquad \Sigma\,|\,a_n^k\,|<1+\varepsilon\qquad\forall\,z\in K_1.$$

Тем самым мы доказали, что S представляет все экспоненты. Отсюда немедленно получим, что S представляет L.

3) $\Rightarrow$ 2): Пусть $\partial G\subset S$. Тогда $\forall\,k=0,1,\ldots,\ \forall f\in M$

$$\sup_{n\geqslant 1}|\,f^{(k)}(\alpha_n)\,|=\sup_{z\in G}|\,f^{(k)}(z)\,|$$

(по принципу максимума модуля). Отсюда получим

$$\sup_{k\geqslant 0}\ \sup_{n\geqslant 1}|\,f^{(k)}(\alpha_n)\,|=\sup_{k\geqslant 0}\ \sup_{z\in G}|\,f^{(k)}(z)\,|\quad\forall f\in M,$$

т.е. условие 2) выполняется.

Пусть $G=\{z:|\,z\,|<r\}=K_r$, $0<r<\infty$ и покажем, что 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 1) Из доказанного выше следует, что нам осталось доказать 2) $\Rightarrow$ 3). Докажем это от противного ; Пусть $\partial G\not\subset S$. Тогда существуют точка $\alpha_0\in\partial G\equiv C_r$ такая, что $\alpha_0\notin\overline{S}$ и такие достаточно малые числа ρ и θ $(0<\rho<r,\ \theta>0)$, чтобы $Q(\rho,\theta,r)\cap S=\phi$, где

$$Q(\rho.\ \theta,\ r)=(K_r\setminus K_{r-\rho})\cap\{\sigma e^{i(arg\alpha_0+\varphi)}:\ \sigma>0,\ 0\leqslant|\quad|\leqslant\theta\}.$$

Положим $\rho_0=\overline{\alpha}_0/|\,\alpha_0\,|$, где $\overline{\alpha}$ — число комплексное сопряженное к α. Тогда

$$e^{\rho_0 z}\in M,\ \|\,e^{\rho_0 z}\,\|_G=\sup_{z\in G}|\,e^{\rho_0 z}\,|=e^r$$

и

$$\sup_{k\geqslant 0}\ \sup_{n\geqslant 1}|\,\rho_0^k\ e^{\rho_0\alpha_n}\,|=\sup_{n\geqslant 1}|\,e^{\rho_0\alpha_n}\,|=\sup_{n\geqslant 1}e^{|\alpha_n|\cos(-arg\alpha_0+arg\alpha_n)}$$

Но из $Q(\rho,\theta,r)\cap S=\phi$ следует что $\forall\,n\geqslant 1$,

$$|\,\alpha_n\,|\cos(\,|\arg\alpha_0+\arg\alpha_n)\leqslant\max\{(r-\rho),\ r\cos\theta)<r,$$

т.е. для функции $e^{\rho_0 z}$ условие 2) не выполняется и мы получили противоречие. Тем самым мы завершили доказательство теоремы 1.

Замечание 1. Естественно возникает вопрос об эквивалентности условий 2), 3). Оказывается, что в общих случаях из 2) не вытекает 3).

Действительно, пусть G – такая ограниченная область, что $\partial G=\bigcup\limits_{j=0}^{n}\Gamma_j$,

$\Gamma_k \cap \Gamma_j = \phi$, $k \neq j$ и контур Γ_o охватывает внутрь себя все контуры $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Тогда условие $\Gamma_o \subset \overline{S}$ является достаточным для выполнения условия 2) (это вытекает из принципа максимума модуля).

Замечание 2. В теореме 3 [3] было доказано, что S д.н.р.н. (т. е. $\exists\{a_n\}$: $\sum a_n e^{\alpha_n z} \equiv 0$, $\sum |a_a| < \infty$) тогда и только тогда $\{e^{\alpha_n z}\}$ является а.-н.с. Однако в нашей ситуации такая аналогия не получилась. А именно, пусть $\alpha, \beta \in G$, $\alpha \neq \beta$. Тогда $0 \equiv e^{-\alpha z} e^{\alpha z} - e^{-\beta z} e^{\beta z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!} z^k e^{\alpha z} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} z^k e^{\beta z}$ является нетривиальным разложением нуля системы $\{e^{\alpha z}, e^{\beta z}\}$. Это означает, что в нашем случае свойство о том, что S д.н.р.н. не дает ничего интересного.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G – некоторая ограниченная область. Тогда $(L, \|.\|)$ является банаховым пространством и его сопряженным пространством является (M, G).*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 5 [3] : Из теоремы 1 следует, что существует последовательность $S = \{\alpha_n\} \subset \overline{G}$ такая, что каждая функция из L может быть представлена в виде (1) и её норма, при этом, не увеличивается.

Пусть N – подмножество в l_1, состоящее из всех $\{a_n^k\}_{k=0,n=1}^{\infty}$ таких, что $\sum a_n^k z^k e^{\alpha_n z} \equiv 0$, $z \in K_1$. Тогда N — замкнутое линейное подпространство пространства l_1 и $(L, \|.\|)$ изоморфно фактор-пространству l_1/N, Отсюда следует, что $(L, \|.\|)$ является банаховым пространством.

Сопряженным пространством пространства l_1/N является N^+, где $N^\perp$ – множество всех элементов в l_∞, ортогональных к N.

Положим

$$B = \left\{ \{f^{(k)}(\alpha_n)\}_{k=0,\, n=1}^{\infty} : f \in M \right\}.$$

Тогда из леммы 5 вытекает, что $B^\perp = N$. Отсюда $N^\perp = B^{\perp\perp}$ есть $*$-слабое замыкание B в l_∞. С другой стороны, в ходе доказательства теоремы 1 мы показали, что B является $*$-слабо замкнутым. Отсюда получим

$$N^\perp = B^{\perp\perp} = B. \qquad (10)$$

Учитывая (10) и $\|f\|_G = \sup_{k\geq 0} \sup_{n\geq 1} |f^{(k)}(\alpha_n)|$, получим, что сопряженное к $(L, \|.\|)$ пространство изоморфно пространству (M, G). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть* $h(z) = \Sigma a_n^k z^k e^{\alpha_n z} \in L$, $f \in (M,G)$. *Тогда значение линейного функционала* f *в точке* h *определяется соотношением*

$$(h,f) = \Sigma a_n^k f^{(k)}(\alpha_n) .$$

ТЕОРЕМА 3. $S = \{\alpha_n\} \subset \overline{G}$ *представляет* L *тогда и только тогда, когда выполняется условие 4) т. е.* $\forall \xi \in \overline{G}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\{a_n^k(\xi; \varepsilon)\}$: $\forall f \in M$

$$f(\xi) = \Sigma a_n^k (\xi; \varepsilon) f^{(k)}(\alpha_n) , \quad \Sigma | a_n^k (\xi; \varepsilon) | < 1 + \varepsilon .$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 4): Пусть $\xi \in \overline{G}$, $\varepsilon > 0$. Тогда из теоремы 1 следует, что в K_1

$$e^{\xi z} = \Sigma a_n^k (\xi; \varepsilon) z^k e^{\alpha_n z}, \qquad \Sigma | a_n^k (\xi; \varepsilon) | < 1 + \varepsilon .$$

Отсюда, применяя лемму 5, получим $\forall f \in M$

$$f(\xi) = \Sigma a_n^k (\xi; \varepsilon) f^{(k)}(\alpha_n) , \qquad \Sigma | a_n^k (\xi; \varepsilon) | < 1 + \varepsilon .$$

4) $\Rightarrow$ 1): Пусть 4) выполняется. Тогда $\forall \xi \in \overline{G}$ имеем

$$e^{\xi z} = \Sigma a_n^k (\xi; \varepsilon) z^k e^{\alpha_n z} , \quad \Sigma | a_n^k(\xi; \varepsilon) | < \| e^{\xi z} \| + \varepsilon = 1 + \varepsilon ,$$

а это означает, что S представляет все экспоненты. Но тогда S также представляет L. Теорема доказана.

Из теорем 1, 3 и замечания 1 получим

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть* G *– произвольная ограниченная область. Тогда* 3) $\Rightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 1) $\Leftrightarrow$ 4); 3) $\not\Leftarrow$ 2).

На основании теоремы 3 уточним связь между условиями 2) и 3) тероремы 1:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* S *удовлетворяет условию 2). Тогда*

а) $\Gamma = \{ \xi \in \overline{G} : \ | \xi | = \gamma = \sup_{z \in G} | z | \} \subseteq \overline{S}$;

б) *Пусть область* G *такая, что* $\{\arg z : z \in G\} = [0,2\pi]$. *Тогда не существуют такие числа* φ_1, φ_2, *что* $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant \pi$, $\varphi_1 \leqslant \arg \alpha_n \leqslant \varphi_2$, $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. В обоих случаях докажем от противного:

а) Легко видеть, что $\Gamma \subset \partial G$. Пусть $\xi_0 \in \Gamma$ и $\xi_0 \notin \overline{S}$. Тогда существуют достаточно малые числа ρ и θ такие, что

$$Q(\rho, \theta, \gamma) \cap S = \varnothing .$$

Выберем точку $z_0 \in K_1$ такую, что $| z_0 | = 1$, $\arg z_0 = 2\pi - \arg \xi_0$. Тогда

$$|e^{\xi_0 z_0}| = e^{\gamma},\ |e^{\alpha_n z_0}| = e^{|\alpha_n| \cos(\arg\alpha_n - \arg\xi_0)}, \tag{11}$$

$$|\alpha_n| \cos(\arg\alpha_n - \arg\xi_0) \leqslant \max\{\gamma\cos\theta,\ \gamma - \rho\} = \gamma_1 < \gamma,\ n = 1,2,\ldots \tag{12}$$

С другой стороны, S удовлетворяет условию 2), поэтому в силу теоремы 3 имеем $\forall\xi\in\overline{G},\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \{a_n^k(\xi;\ \varepsilon)\}$:

$$e^{\xi z} = \Sigma\ a_z^k(\xi;\varepsilon)\ z^k e^{\alpha_n z},\ \Sigma\ |a_n^k(\xi;\varepsilon)| < 1+\varepsilon,\ \forall z\in K_1. \tag{13}$$

Выберем теперь $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $1+\varepsilon_0 < e^{\gamma-\gamma_1}$. Тогда из (11), (12), (13) вытекает

$$e^{\gamma} = |e^{\xi_0 z_0}| \leqslant \Sigma\ |a_n^k(\xi_0;\ \varepsilon_0)|\,|e^{\alpha_n z_0}| \leqslant \Sigma\ |a_n^k(\xi_0;\ \varepsilon_0)|\ e^{\gamma_1}.$$

Отсюда следует, что

$$1+\varepsilon_0 < e^{\gamma-\gamma_1} \leqslant \Sigma\,|a_n^k(\xi_0;\ \varepsilon_0)| < 1+\varepsilon_0,$$

и мы получили противоречие.

б) Допустим, что существуют числа φ_1, φ_2, о которых реьч идёт в условии б) теоремы 4. Тогда найдётся точка $z_0 \in \overline{K_1}$ такая, что

$$|z_0| = 1,\quad arg\,(\alpha_n z_0) \in \left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{e}\right],\ n = 1, 2,\ldots$$

Отсюда получим

$$|e^{\alpha_n z_0}| = e^{|\alpha_n|\ cos(arg\alpha_n z_0)} \leqslant 1,\qquad n = 1;\ 2,\ldots \tag{14}$$

Выборем теперь такую точку $\xi_0 \in \overline{G}$, что $\xi_0 \neq 0$, $arg\ \xi_0 z_0 = 0$. Тогда

$$|e^{\xi_0 z_0}| = e^{|\xi_0|} = 1+\delta_0,\ \delta_0 > 0. \tag{15}$$

Положим $\varepsilon = \delta_0$. Тогда из условия теоремы следует существование $\left\{ a_n^k(\xi_0;\delta_0)\right\}$, что

$$e^{\xi_0 z_0} = \Sigma\ a_n^k(\xi_0;\ \delta_0)\ z_0^k e^{\alpha_n z_0},\qquad \Sigma\ |a_n^k(\xi_0;\ \delta_0)| < 1+\delta_0. \tag{16}$$

Учитывая (14), (15), (16) имеем

$$1+\delta_0 = |e^{\xi_0 z_0}| \leqslant \Sigma\ |a_n^k(\xi_0;\delta_0)|\,|e^{\alpha_n z_0}| < 1+\delta_0,$$

и мы получили противоречие. Теорема доказана.

Замечание 3. Пусть $\{arg\ z:\ z\in\overline{G}\} = [0,2\pi]$ и S представляет L. Тогда S удовлетворяет условию б) теоремы 4,т.е. S не может быть сосредоточено в некотором конусе с углом $\leqslant \pi$.

Итак, пусть G — некоторая ограниченная область $S = \{\alpha_n\} \subset \overline{G},\ \partial G \subset \overline{S}$.

Тогда, в силу теоремы 1 $\{z^k\ e^{\alpha_n z}$ является а – п.с.в $(L, //.//)$. Учитывая неравенство $//\cdot//_L \leqslant e^{a}//.//$, увидим, что $\{z^k e^{\alpha_n z}\}$ также является а.–п. с. в $(L,\ //\cdot//_L)$. Однако в $(L,\ //\cdot//)$ и $(L,\ //\cdot//_L)$ отсуствует а.– п.с. из экспонент.

Докажем это противного и для $(L, \| \cdot \|_L)$: Пусть $\{\lambda_n\}$ — такая последовательность комплексных чисел, что $\{e^{\lambda_n z}\}$ является а. - п. с. в $(L, \| \cdot \|_L)$. По теореме 3 [1] это эквивалентно существованию такого числа $A < \infty$, что

$$\sup \{ |(y, x)| : x \in L, \|x\|_L \leqslant 1 \} \leqslant A \sup_{n \geqslant 1} \frac{|(y, e^{\lambda_n z})|}{\|e^{\lambda_n z}\|_L}, \ \forall\, y \in (L, \| \cdot \|_L)^*.$$

Но $(L, \| \cdot \|_L)^* = l_\infty$, где двойственность задается следующим образом

$$(d, f) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n f_n, \forall f(z) = \Sigma f_n z^n \in L, \ \forall\, d = \{d_n\} \in l_\infty.$$

Отсюда получим

$$\sup \{ |(d, f)| : \|f\|_L \leqslant 1 \} + \sup_{n \geqslant 0} |d_n| . \tag{17}$$

Из (17) и равенства $\|e^{\alpha z}\|_L = e^{|\alpha|}$ получим, что $\{e^{\lambda_n z}\}$ является а. — п. с. в $(L, \| \cdot \|_L)$ тогда и только тогда, когда существует число $A < \infty$, что

$$\sup_{k \geqslant 0} |d_k| \leqslant A \sup_{n \geqslant 1} \frac{|\Sigma d_k \lambda_n^k / k!|}{e^{|\lambda_n|}} \quad \forall\, d = \{d_k\} \in l_\infty. \tag{18}$$

Положив в (18) $d^{(m)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где единственная единица стоит на $m^{\text{ом}}$ месте, $m = 0, 1, \ldots$, получим

$$1 \leqslant A \sup_{n \geqslant 0} \frac{|\lambda_n^m|}{m!\, e^{|\lambda_n|}}, \ m = 0, 1, \ldots \tag{19}$$

Но, как нетрудно показать

$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{|\lambda_n^m|}{m!\, e^{|\lambda_n|}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2 \pi m}} \to 0, \qquad m \to \infty,$$

а это противоречит (19).

В заключении автор выражает благодарность профессору Ю. Ф. Коробейнику за внимание.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Ф. Коробейник, *Представляющие системы*, УМН, 36(1981), 1-83.

[2] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, М., 1976.

[3] L. Brown, A. Shields and, K. Zeller, *On absolutely convergent exponential sums*, Trans. Amer. Math. Soc., 99 (1960), 162 – 183.

[4] Ю. Ф. Коробейник, *К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям,* Мат. заметки, 31(1982), 723 – 737.

[5] А. Картан, *Дифференциальное исчисление, дифференциальные формы*, М., 1971

[6] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa-Lwow, 1932.

Поступила в Редакцию 17 Июля 1984г.
Переработанный вариант 23 Июля 1986г.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ХАНОЙ, ВЬЕТНАМ.