SUR LA CONVECTION THERMIQUE DES LIQUIDES MICROPOLAIRES

NGO DUY CAN* et NGUYEN XUAN HUY**

1. INTRODUCTION

Dans ce qui suit on désigne par Ω et S le domaine occupé par le liquide micropolaire et son bord. On choisit le système de reférence avec l'axe vertical OZ. Le système d'équations régissant le mouvement des liquides micropolaires s'écrit sous la forme [1, 2, 3]

$$div\ v = 0, \tag{1. 1}$$

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\text{grad } p + (\mu + K)\,\Delta\overline{v} + K \text{ rot } \overline{w} + \overline{F}, \tag{1. 2}$$

$$J_0 \frac{d\overline{w}}{dt} = \alpha \text{ grad div} \overline{w} - \sigma \text{ rot rot} \overline{w} + K \text{rot} \overline{v} - 2K\overline{w}, \tag{1. 3}$$

$$\frac{dT}{dt} = \chi \Delta T + D, \tag{1. 4}$$

où $\overline{v}$ désigne la vitesse, p la pression, $\overline{w}$ la rotation interne, T la température D la dissipation d'énergie, ρ la masse volumique, $\overline{F}$ la force externe, J_0 le moment d'inertie micropolaire et μ, K, α, σ, χ des constantes.

Suivant l'hypothèse classique de Boussinesq on pose dans l'équation (1. 2) $\rho = \rho_0(1 - \beta T)$, où ρ_0 est la masse volumique du liquide à la température T_0 de l'état d'équilibre. Dans l'état d'équilibre on a la solution suivante du système (1. 1) – (1. 4):

$$\overline{v} = 0, \overline{w} = 0, T_0 = -az + b, \text{ grad } p_0 = g\beta\rho_0 T_0 \overline{\gamma}.$$

On considère les perturbations petites $\overline{v}_1$, $\overline{w}_1$, $p_0 + p_1$, $T_0 + T_1$. En substituant ces expressions dans (1. 1) — (1. 4) et en conservant seulement les termes linéaires on obtient:

$$\text{div } \overline{v}_1 = 0, \tag{1. 5}$$

$$\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\text{grad } p_1 + (\mu + K)\,\Delta\overline{v}_1 + K \text{ rot } \overline{w}_1 + g\beta T_1 \overline{\gamma}, \tag{1. 6}$$

$$J_0 \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial t} = \alpha \text{ grad div } \overline{w}_1 - \sigma \text{ rot rot} \overline{w}_1 + K \text{rot} \overline{v}_1 - 2 K \overline{w}_1, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \overline{v}_1 . a\overline{\gamma} + \chi \Delta T_1. \tag{1.8}$$

Pour écrire ces équations sous la forme adimensionnelle on choisit les échelles : L (longeur), $L^2/(\mu + K)$ (temps), χ/L (vitesse), $\rho_0 \chi (\mu + K)/L$ (pression), aL (température). Il vient alors :

$$\text{div } \overline{v} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = - \text{grad } p + \Delta \overline{v} + H \text{rot} \overline{w} + R \ T^{\gamma}, \tag{1.10}$$

$$J \frac{\partial \overline{w}}{\partial t} = M \text{grad div } \overline{w} - N \text{ rot rot } \overline{w} + H \text{ rot } \overline{v} - 2 H \overline{w}, \tag{1.11}$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} = \overline{v} . \overline{\gamma} + \Delta T, \tag{1.12}$$

où $R = ga\beta L^4 / \chi (\mu + K)$ (le nombre de Rayleigh),

$P = (\mu + K) / \chi$ (le nombre de Prandtl),

$M = \alpha / L^2 (\mu + K)$,

$N = \sigma / L^2 (\mu + K)$,

$H = K / (\mu + K)$,

$J = J_0 . L^2$.

Dans cet article nous allons considérer le problème avec les conditions aux limites : $\overline{v} = 0$, $\overline{w} = 0$, $T = 0$ sur S et les conditions initiales :

$$\overline{v} = \overline{v}_0, \ \overline{w} = \overline{w}_0, \ T = T_0. \tag{1.13}$$

2. ESPACES FONCTIONELS. FORMULATION OPÉRATIONELLE DU PROBLÈME

Soit $L_2(\Omega)$ l'espace des fonctions vectorielles de carré sommable sur Ω. L'espace $L_2(\Omega)$ peut être décomposé en deux sous espaces [4]:

$$L_2(\Omega) = G_2(\Omega) \oplus \tilde{L}_{2\cdot 0}(\Omega),$$

où $G_2(\Omega)$ est formé des éléments du type : $\overline{u} = \text{grad } p$, $p = 0$ sur S et $\tilde{L}_{2\cdot 0}(\Omega)$ des éléments solénoidaux dont la composante normale s'annule au bord de S.

Soit $W_2^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions vectorielles de carré sommable dont les éléments sont supposés avoir la dérivée généralisée du premier ordre. Dans l'espace $W_2^1(\Omega)$ on définit la norme :

$$\| \overline{u} \|^2_{W_2^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \int_{(\Omega)} | \nabla u_{x_i} |^2 d\Omega + \int_S | \overline{u} |^2 dS \tag{2.1}$$

Soit $W^1_{2.0}(\Omega)$ l'ensemble fermé des éléments de $W^1_2(\Omega)$ qui s'annulent au bord de S et soit $\widetilde{W}^1_{2.0}(\Omega)$ l'ensemble fermé des éléments solénoidaux de $W^1_2(\Omega)$ qui s'annulent au bord de S.

Dans le travail [5] S. G. Krein emploie la norme:

$$\|\overline{u}\|^2 = E(\overline{u},\overline{u}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_{x_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{x_k}}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega$$

qui est équivalente à la norme (2.1) [5].

Dans le présent travail nous emploierons aussi la norme:

$$\|\overline{u}\|^2_{\Omega,1} = M\int_\Omega (\operatorname{div}\overline{u})^2\, d\Omega + N\int_\Omega (\operatorname{rot}\overline{u})^2\, d\Omega. \tag{2.2}$$

LEMME 2.1. *Dans l'espace $W^1_{20}(\Omega)$ les normes définies par (2.1), (2.2) sont équivalentes.*

Demonstration. On vérifie aisément que pour deux vecteurs arbitraires qui s'annulent au bord de S les relations suivantes sont satisfaites

$$\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{u}.\overline{v}\, d\Omega = \int_\Omega \operatorname{rot}\overline{u}.\operatorname{rot}\overline{v}\, d\Omega, \tag{2.3}$$

$$-\int_\Omega \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{u}.\overline{v}\, d\Omega = \int_\Omega \operatorname{div}\overline{u}\,\operatorname{div}\overline{v}\, d\Omega. \tag{2.4}$$

Soit $K_1 = \operatorname{Max}(M,N)$. On a:

$$\|\overline{u}\|^2_{\Omega,1} = M\int_\Omega (\operatorname{div}\overline{u})^2 d\Omega + N\int_\Omega (\operatorname{rot}\underline{u})^2\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant K_1\left\{\int_\Omega (\operatorname{div}\overline{u})^2\, d\Omega + \int_\Omega (\operatorname{rot}\overline{u})^2\, d\Omega\right.$$

$$= K_1\left\{\int_\Omega (-\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{u}).\overline{u}\, d\Omega =\right.$$

$$= -K_1\int_\Omega \triangle\overline{u}.\overline{u}\, d\Omega = K_1\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} |\nabla u_{x_i}|^2\, d\Omega$$

$$= K_1\,\|\overline{u}\|^2\, W^1_{2.0}(\Omega).$$

De la même manière on a:

$$\|\overline{u}\|^2_{\Omega,1} \geqslant K_2\,\|\overline{u}\|^2\, W^1_{2.0}(\Omega),$$

où $K_2 = \operatorname{Min}(M.N)$. Le lemme est démontré.

Soit $H_2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω et soit $H_2^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev muni de la norme:

$$\| T \|^2_{H_2^1(\Omega)} = \int_\Omega (\text{grad } T)^2 d\Omega + \int_\Omega |T|^2 \, d\Omega. \tag{2.5}$$

Soit $H^1_{2.0}(\Omega)$ le sous-espace de $H_2^1(\Omega)$ formé par les éléments qui s'annulent au bord de S.

Alors les équations (1.9) — (1.12) dans les espaces $\tilde{L}_{2.0}(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $H_2(\Omega)$ peuvent s'écrire sous la forme:

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = - A_1 \overline{v} + H B_{12} \overline{w} + R B_{13} T, \tag{2.6}$$

$$J \frac{d\overline{w}}{dt} = - A_2 \overline{w} + HB_{21} \overline{v} - HB_{22} \overline{w}, \tag{2.7}$$

$$\frac{dT}{dt} = - P^{-1} A_3 T + P^{-1} B_{31} \overline{v}. \tag{2.8}$$

Dans [4, 5, 6, 7] on a montré que les opérateurs A_1, A_3 sont autoconjugués, définis positifs sur $\tilde{L}_{2.0}(\Omega)$ et $H_2(\Omega)$. Leurs opérateurs inverses appartiennent à la classe des opérateurs compacts σ_p avec $p > 3/2$ et

$$D(A_1^{1/2}) = \tilde{W}^1_{2.0}(\Omega), \quad D(A_3^{1/2}) = W^1_{2.0}(\Omega).$$

LEMME 2.2. *L'opérateur A_2 est autoconjugué, défini positif sur $L_2(\Omega)$ et $D(A_2^{1/2}) = W^1_{2,0}(\Omega)$. Son opérateur inverse est compact et appartient à la classe des opérateurs compacts σ_p avec $p > 3/2$,*

Démonstration. Soient $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2 \in D(A_2)$. Les éléments w_1, $\overline{w}_2$ satisfont aux conditions aux limites. On a:

$$(A_2 \overline{w}_1, \overline{w}_2) = \int_\Omega \left\{ - M \text{ grad div } \overline{w}_1 . \overline{w}_2 + N \text{ rot rot } \overline{w}_1 . \overline{w}_2 \right\} d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left\{ M \text{ div } \overline{w}_1 . \text{div } \overline{w}_2 + N \text{ rot } \overline{w}_1 . \text{rot } \overline{w}_2 \right\} d\Omega =$$

$$= (\overline{w}_1, A_2 \overline{w}_2). \tag{2.9}$$

En utilisant (2.2) et en posant $\overline{w}_1 = \overline{w}_2 = \overline{w}$ on a:

$$(A_2 \overline{w}, w) = M \int_\Omega (\text{div } \overline{w})^2 d\Omega + N \int_\Omega (\text{rot } \overline{w})^2 d\Omega =$$

$$= \| \overline{w} \|^2_{\Omega \cdot 1} = (A_2^{1/2} \overline{w}, A_2^{1/2} \overline{w}). \tag{2.10}$$

Par suite en tenant compte de l'immersion dense de $W^1_{2,0}(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ on a

$$(A_2\overline{w}, \overline{w}) \geqslant K \| \overline{w} \|_{L_2(\Omega)}, \text{ où } K > 0. \tag{2.11}$$

Les expressions (2.9) — (2.11) montrent que l'opérateur A_2 est autoconjugué, défini positif et $D(A_2^{1/2}) = W^1_{2.0}(\Omega)$. Son opérateur inverse A_2^{-1} est alors borné.

De plus, à l'aide de (2.10) on peut réduire le problème de valeurs propres $A_2^{-1}\, \overline{w} = \lambda\, \overline{w}$ au problème d'extrêmum de la fonctionelle [8]:

$$F(\overline{w}) = \frac{\| \overline{w} \|^2_{L_2(\Omega)}}{\| \overline{w} \|^2_{W^1_{2,0}(\Omega)}}$$

dans la classe des fonctions $W^1_{2,0}(\Omega)$. Alors l'opérateur inverse A_2^{-1} est compact et appartient à la classe des opérateurs compacts σ_p où $p > 3/2$. Le lemme est donc démontré.

Rappelons que les opérateurs B_{12}, B_{13} appliquent $L_2(\Omega)$, $H_2(\Omega)$ dans $\widetilde{L}_{2.0}(\Omega)$, les opérateurs B_{21}, B_{22} appliquent $L_{2.0}(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$, l'opérateur B_{31} applique $\widetilde{L}_{2.0}(\Omega)$ dans $H_2(\Omega)$, où:

$$B_{12}\overline{w} = \operatorname{rot} \overline{w};\ B_{13}T = \overline{\gamma}\,.\,T;\ B_{21}\overline{v} = \operatorname{rot} \overline{v};$$
$$B_{22}\overline{w} = 2\overline{w};\ B_{31}\overline{v} = \overline{\gamma}\,.\,\overline{v}. \tag{2.12}$$

3. THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE SOLUTION SPECTRE DU PROBLÈME

On considère le système (2.6) — (2.8) comme une équation dans l'espace $\widetilde{L}_{2.0}(\Omega) \times L_2(\Omega) \times H_2(\Omega)$:

$$\frac{\mathrm{d}\, X}{\mathrm{d}\, t} = -AX + BX, \tag{3.1}$$

où:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1} A_2 & 0 \\ 0 & 0 & P^{-1} A_3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} \overline{v} \\ \overline{w} \\ T \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & HB_{12} & R\, B_{13} \\ J^{-1}\, HB_{21} & J^{-1}HB_{22} & 0 \\ P^{-1}\, B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

LEMME 3.1. *L'opérateur B est dépendant de l'opérateur A au sens de S.G. Krein* [9].
Démonstration. Par suite de (3.2) on peut écrire

$$
\begin{aligned}
(BX, BX) = {} & (H B_{12}\overline{w} + RB_{13}T,\ H B_{12}\overline{w} + R B_{13}T) + \\
& + J^{-2}(H B_{21}\overline{v} + H B_{22}\overline{w},\ H B_{21}\overline{v} + H B_{22}\overline{w}) + \\
& + (P^{-1}B_{31}\overline{v},\ P^{-1}B_{13}\overline{v}) \leqslant \\
& \leqslant H^2 \| B_{12}\overline{w} \|^2 + R^2 \| B_{13}T \|^2 + 2HR \| B_{12}\overline{w} \| \cdot \| B_{13}T \| \\
& + J^{-2}H^2 \| B_{21}\overline{v} \|^2 + J^{-2}H^2 \| B_{22}\overline{w} \|^2 + \\
& + 2J^{-2}H^2 \| B_{12}\overline{v} \| \cdot \| B_{22}\overline{w} \| + P^{-2} \| B_{31}\overline{v} \|^2 \leqslant \\
& \leqslant 2H^2 \| B_{12}\overline{w} \|^2 + 2R^2 \| B_{13}T \|^2 + 2H^2 J^{-2} \| B_{21}\overline{v} \|^2 + \\
& + 2H^2 J^{-2} \| B_{22}\overline{w} \|^2 + P^{-2} \| B_{31}\overline{v} \|^2. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

En tenant compte de (2.12) on a :

$$
\begin{aligned}
H^2 \| B_{12}\overline{w} \|^2 = {} & H^2 \int_\Omega (\mathrm{rot}\ \overline{w})^2 d\Omega \leqslant K_3 \| \overline{w} \|^2_{W^1_{2.0}(\Omega)} = \\
& = K_3(A_2\overline{w}, \overline{w}) \leqslant K_4 \| A_2\overline{w} \|_{L_2(\Omega)} \cdot \| \overline{w} \|_{L_2(\Omega)}, \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

$$
R^2 \| B_{13}T \|^2 \leqslant K_5 \| T \|^2 \leqslant K_6 \| A_3 T \|_{H_2(\Omega)} \cdot \| T \|_{H_2(\Omega)}, \qquad (3.5)
$$

$$
\begin{aligned}
H^2 J^{-2} \| B_{21}\overline{v} \|^2 \leqslant {} & H^2 J^{-2} \int_\Omega (\mathrm{rot}\ \overline{v})^2 d\Omega \leqslant K_7 \| \overline{v} \|^2_{W^1_{2.0}(\Omega)} \leqslant \\
& \leqslant K_8\, E(\overline{v}, \overline{v}) = K_8 (A_1\overline{v}, \overline{v}) \leqslant \\
& \leqslant K_8 \| A_1\overline{v} \|_{\widetilde{L}_{2.0}(\Omega)} \cdot \| v \|_{\widetilde{L}_{2.0}(\Omega)}, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

$$
H^2 J^{-2} \| B_{22}\overline{w} \|^2 \leqslant H^2 J^{-2} \| \overline{w} \|^2 \leqslant K_9 \| A_2\overline{w} \|_{L_2(\Omega)} \cdot \| \overline{w} \|_{L_2(\Omega)}, \qquad (3.7)
$$

$$
P^{-2} \| B_{31}\overline{v} \|^2 \leqslant K_{10} \| \overline{v} \|^2 K_{10} \| A_1\overline{v} \|_{\widetilde{L}_{2.0}(\Omega)} \cdot \| v \|_{\widetilde{L}_{2.0}(\Omega)}. \qquad (3.8)
$$

A l'aide des estimations (3.4) — (3.8) on peut maintenant écrire l'inégalité (3.3) sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\| BX \|^2 \leqslant {} & K_{11} \left\{ \| A_1\overline{v} \| \cdot \| \overline{v} \| + \| A_2\overline{w} \| \cdot \| \overline{w} \| + \| A_3 T \| \cdot \| T \| \right\} \leqslant \\
& \leqslant K_{11} \left\{ \| A_1\overline{v} \| + \| A_2\overline{w} \| + \| A_3 T \| \right\} \cdot \left\{ \| \overline{v} \| + \| \overline{w} \| + \| T \| \right\} \leqslant \\
& \leqslant 3K_{11} \left\{ \| A_1\overline{v} \|^2 + \| A_2\overline{w} \|^2 + \| A_3 T \|^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \| \overline{v} \|^2 + \| \overline{w} \|^2 + \| T \|^2 \right\}^{1/2} = \\
& = 3K_{11} \| AX \| \cdot \| X \|, \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

d'où : $\| BX \| = \sqrt{3K_{11}} \| AX \|^{1/2} \cdot \| X \|^{1/2}$.

Cette relation montre que l'opérateur B est bien dépendant de l'opérateur A.

Notons que dans le calcul précédent on a employé l'inégalité :

$$(a + b + c)^2 \leqslant 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

qui s'obtient aisément à partir de l'inégalité ;

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

Les opérateurs A_1, A_2, A_3 sont autoconjugués, définis positifs respectivement sur $\widetilde{L}_{2.0}(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $H_2(\Omega)$. Alors l'opérateur A est autoconjugué, défini positif sur l'espace

$$\widetilde{L}_{2\cdot 0}(\Omega) \times L_2(\Omega) \times H_2(\Omega).$$

En utilisant le lemme (3.1) et en appliquant les résultats de [9] on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. *L'équation (3.1) est une équation parabolique abstraite dont le problème de Cauchy est correct uniformément et admet une solution unique. Son semigroupe de solutions est analytique dans le secteur contenant l'axe positif.*

Pour étudier les perturbations on cherche les solutions de l'équation (3.1) sous la forme :

$$X(x, y, z, t) = e^{-\lambda t}\, X_1(x, y, z). \tag{3.10}$$

On arrive ainsi au problème de valeurs propres

$$\lambda X_1 = AX_1 - BX_1. \tag{3.11}$$

THÉORÈME 3.2. *Le spectre du problème (3.11) est discret. Tous les points du spectre, sauf, peut être, un nombre fini de points, sont contenus dans le secteur* $-\varepsilon < \arg\lambda < \varepsilon$, $\pi - \varepsilon < \arg\lambda < \pi + \varepsilon$. *Le système des vecteurs propres de ce problème est complet dans l'espace :*

$$\widetilde{W}^1_{2\cdot 0}(\Omega) \times W^1_{2\cdot 0}(\Omega) \times H^1_{2\cdot 0}(\Omega).$$

Démonstration. Les opérateurs A_1, A_2, A_3 sont autoconjugués, définis positifs. Leurs opérateurs inverses sont compacts et d'ordre fini. Alors, évidemment, les spectres de ces opérateurs sont discrets [10]. Par suite, l'opérateur A est autoconjugué, défini positif, à spectre discret et d'ordre fini.

Il résulte de (3.2) que

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & HA_1^{-1}B_{12} & RA_1^{-1}B_{13} \\ HA_2^{-1}B_{21} & HA_2^{-1}B_{22} & 0 \\ A_3^{-1}B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant les estimations (3.4) — (3.8) on peut montrer sans peine que les opérateurs $A_1^{-1}B_{12}$, $A_1^{-1}B_{13}$, $A_2^{-1}B_{21}$, $A_2^{-1}B_{22}$, $A_3^{-1}B_{31}$ sont bornés. Il en est alors de même de l'opérateur $A^{-1}B$.

L'opérateur $A^{-1}BA^{-1}$, étant le produit d'un opérateur borné par un opérateur compact est borné. Donc:

$$S_j(A^{-1}BA^{-1}) \leqslant | A^{-1}B | \, S_j(A^{-1}).$$

L'opérateur $A^{-1}BA^{-1}$ est d'ordre fini parce qu'il en est ainsi de l'opérateur A^{-1}. L'opérateur $A-B$ satisfait aux conditions du théorème (10.1) dans [11]. La démonstration du théorème est donc achevée.

4. THÉORÈME DE CHANGEMENT UNIFORME DES PERTURBATIONS

Si on utilise les solutions du type (3.10) le système d'équations (2.6) — (2.8) peut s'écrire sous la forme:

$$\lambda \bar{v}_1 = A_1 \bar{v}_1 - HB_{12}\overline{w}_1 - RB_{13}T_1 \tag{4.1}$$

$$\lambda J\overline{w}_1 = A_2\overline{w}_1 - HB_{21}\bar{v}_1 + HB_{22}\overline{w}_1 \tag{4.2}$$

$$\lambda T_1 = P^{-1}A_3T_1 - P^{-1}B_{31}\bar{v}_1, \tag{4.3}$$

où $\bar{v}_1$, $\overline{w}_1$, T_1 satisfont aux conditions homogènes aux limites.

Parallèlement, on considère la solution complexe conjugués λ^*, $\bar{v}_1^*$, $\overline{w}_1^*$, T_1^* où le signe * indique les valeurs complexes conjuguées à λ, $\bar{v}$, $\overline{w}$, T_1.

En multipliant les équations (4.1) — (4.3) respectivement par $\bar{v}_1^*$, $\overline{w}_1^*$, T_1^* et intégrant les produits sur le domaine Ω on obtient:

$$\lambda \| \bar{v}_1 \|^2 = \| A_1^{1/2}\bar{v}_1 \|^2 - H(B_{12}\overline{w}_1, \bar{v}_1^*) - R(B_{13}T_1, \bar{v}_1^*), \tag{4.4}$$

$$\lambda J \| \overline{w}_1 \|^2 = \| A_1^{1/2}\overline{w}_1 \|^2 - H(B_{21}\bar{v}_1, \overline{w}_1^*) + H(B_{22}\overline{w}_1, \overline{w}_1^*), \tag{4.5}$$

$$\lambda \| T_1 \|^2 = P^{-1} \| A_3^{1/2}T_1 \|^2 - P^{-1}(B_{31}\bar{v}_1, T_1^*) \tag{4.6}$$

De la même manière on a:

$$\lambda^* \| \bar{v}_1 \|^2 = \| A_1^{1/2}\bar{v}_1 \|^2 - H(B_{12}\overline{w}_1^*, \bar{v}_1) - R(B_{13}T_1^*, \bar{v}_1), \tag{4.7}$$

$$\lambda^* J \| \overline{w}_1 \|^2 = \| A_2^{1/2}\overline{w}_1 \|^2 - H(B_{21}\bar{v}_1^*, \overline{w}_1) + H(B_{22}\overline{w}_1^*, w_1). \tag{4.8}$$

$$\lambda^* \| T_1 \|^2 = P^{-1} \| A_3^{1/2}T_1 \|^2 - P^{-1}(B_{31}\bar{v}_1^*, T_1). \tag{4.9}$$

Des relations (4.4) — (4.9) on peut déduire

$$(\lambda^* - \lambda) \| \bar{v}_1 \|^2 = H(B_{12}\overline{w}_1, \bar{v}_1^*) - H(B_{12}\overline{w}_1^*, \bar{v}_1) + \\ + R(B_{13}T_1, \bar{v}_1^*) - R(B_{13}T_1^*, \bar{v}_1), \tag{4.10}$$

$$J(\lambda^* - \lambda) \| \overline{w}_1 \|^2 = H(B_{21}\bar{v}_1, \overline{w}_1^*) - H(B_{21}\bar{v}_1^*, \overline{w}_1), \tag{4.11}$$

$$(\lambda^* - \lambda) \| T_1 \|^2 = P^{-1}(B_{31}\bar{v}_1, T_1^*) - P^{-1}(B_{31}\bar{v}_1^*, T_1) \tag{4.12}$$

$$(\lambda^* + \lambda) \| \bar{v}_1 \|^2 = 2 \| A_2^{1/2}\bar{v}_1 \|^2 - H(B_{12}\overline{w}_1, \bar{v}_1^*) - H(B_{12}\overline{w}_1^*, \bar{v}_1) \\ - R(B_{13}T_1, \bar{v}_1^*) - R(B_{13}T_1^*, \bar{v}_1), \tag{4.13}$$

$$J(\lambda^* + \lambda) \| \overline{w}_1 \|^2 = 2 \| A_2^{1/2}\overline{w}_1 \|^2 - H(B_{21}\bar{v}_1, \overline{w}_1^*) - \\ - H(B_{21}\bar{v}_1^*, \overline{w}_1) + 4H \| \overline{w}_1 \|^2, \tag{4.14}$$

$$(\lambda^* + \lambda) \| T_1 \|^2 = 2P^{-1} \| A_3^{1/2} T_1 \|^2 - P^{-1}(B_{31} \overline{v}_1, T_1^*) - P^{-1}(B_{31} \overline{v}_1^*, T_1) \quad (4.15)$$

Remarquons que

$$(B_{12} \overline{w}_1, \overline{v}_1^*) = \int_\Omega rot\ \overline{w}_1 . \overline{v}_1^*\, d\Omega = \int_\Omega \overline{w}_1 . rot\ \overline{v}_1^*\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega rot\ \overline{v}_1^* . \overline{w}_1 d\Omega = (B_{21} \overline{v}_1^*, \overline{w}_1) \quad (4.16)$$

De la même manière on a:

$$(B_{13} T_1, \overline{v}_1^*) = (B_{31} \overline{v}_1^*, T_1). \quad (4.17)$$

En additionant (4.10), (4.11) et (4.12) multipliée par RP, et tenant compte de (4.16), (4.17) on obtient:

$$(\lambda^* - \lambda) \{ \| \overline{v}_1 \|^2 + J \| \overline{w}_1 \|^2 + RP \| T_1 \|^2 \} = 0, \quad (4.18)$$

De la même manière, en utilisant les relations (4.13), (4.14), (4.15) on a:

$$\begin{aligned}
&(\lambda^* + \lambda)\{ \| \overline{v}_1 \|^2 + J \| \overline{w}_1 \|^2 - RP \| T_1 \|^2\} = \\
&= 2 \| A_2^{1/2} \overline{v}_1 \|^2 + 2 \| A_2^{1/2} \overline{w}_1 \|^2 - 2R \| A_3^{1/2} T_1 \|^2 - 2H(B_{21} \overline{v}_1^*, \overline{w}_1) - \\
&\quad - 2H(B_{21} \overline{v}_1, \overline{w}_1^*) + 4H \| \overline{w}_1 \|^2 = \\
&= 2(B_{21} \overline{v}_1, B_{21} \overline{v}_1^*) + 2 \| A_2^{1/2} \overline{w}_1 \|^2 - 2R \| A_2^{1/2} T_1 \|^2 - \\
&- 2H (B_{21} \overline{v}_1, \overline{w}_1) - 2H(B_{21} \overline{v}_1^*, \overline{w}_1) + 4H \| \overline{w}_1 \|^2 = \\
&= 2(B_{21} \overline{v}_1 - H \overline{w}_1, B_{21} v_1^* - H \overline{w}_1^*) + 2 \| A_2^{1/2} \overline{w}_1 \|^2 - \\
&- 2R \| A_3^{1/2} T_1 \|^2 + 2H(2 - H) \| \overline{w}_1 \|^2 = \\
&= 2 \| B_{21} \overline{v}_1 - H \overline{w}_1 \|^2 + 2 \| A_2^{1/2} \overline{w}_1 \|^2 - \\
&- 2R \| A_3^{1/2} T_1 \|^2 + 2H(2 - H) \| \overline{w}_1 \|^2.
\end{aligned} \quad (4.19)$$

Dans le cas où le liquide est chauffé par le dessus ($R < 0$) l'expression (4.19) montre que

$$\lambda^* + \lambda = 2Re\ \lambda = \Big\{ 2 \| B_{21} \overline{v}_1 - H \overline{w}_1 \|^2 + 2H \| A_2^{1/2} \overline{w}_1 \|^2 - $$

$$- 2R \| A_3^{1/2} + 2H(2 - H) \| \overline{w}_1 \|^2 \Big\} \Big/ \Big\{ \| \overline{v}_1 \|^2 + J \| \overline{w}_1 \|^2 - RP \| T_1 \|^2 \Big\}$$

Il est évident que Re $\lambda > 0$, c'est-à-dire que, toutes les perturbations s'éteignent.

Dans le cas où le liquide est chauffé par le dessous ($R > 0$) la relation (4.18) montre que λ est réel. Ce nombre λ peut être positif ou négatif. Les perturbations peuvent alors s'accroître ou diminuer d'une façon monotone. C'est là le principe du changement uniforme des perturbations. On a la valeur du nombre λ:

$$\lambda = \frac{\| B_{21}\bar{v}_1 - H\bar{w}_1 \|^2 + H \| A_2^{1/2}\bar{w}_1 \|^2 - R \| A_3^{1/2} T_1 \|^2 + H(2-H) \| \bar{w}_1 \|^2}{\| \bar{v}_1 \|^2 + J \| \bar{w}_1 \|^2 - RP \| T_1 \|^2}$$

L'état critique correspond à $\lambda = 0$: En ce moment s'effectue la transition de la zone de stabilité vers la zone d'instabilité.

La valeur critique du nombre de Rayleigh est:

$$R_{\min} = \frac{\| B_{21}\bar{v}_1 - H\bar{w}_1 \|^2 + \| A_2^{1/2}\bar{w}_1 \|^2 + H(2-H) \| \bar{w}_1 \|^2}{\| A_3^{1/2} T_1 \|^2} \tag{4.20}$$

Pout $\lambda = 0$ on peut écrire l'équation (4.2) sous la forme:

$$0 = A_2\bar{w}_1 - HB_{21}\bar{v}_1 + HB_{22}\bar{w}_1.$$

En multipliant cette expression par w_1 et en intégrant le produit sur le domaine Ω on a:

$$H(B_{21}\bar{v}_1, \bar{w}_1) = \| A_2^{1/2}\bar{w}_1 \|^2 + 2H \quad \bar{w}_1 \|^2. \tag{4.21}$$

En substituant (4.21) dans (4.20) il vie. t f .lement:

$$R_{\min} = \frac{\| B_{21}\bar{v}_1 \|^2 - \| A_2^{1/2} w_1 \|^2 - 2H \| \bar{w}_1 \|^2}{\| A_3^{1/2} T_1 \|^2}.$$

Les auteurs remercient Dr. Nguyen Van Điep pour les discussions utiles concernant les résultats de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Nguyen Van Điep, *Quelques problèmes de l'hydrodynamique des liquides structurels*, Thèse de candidats, Voronej, URSS, 1968 (en russe).

[2] A.C.Eringen, *Micropolar fluids*, Jour. of Math, Mech., 16 (1966), 1-19.

[3] G.Maiti, *Convective heat transfer in micropolar fluids flow through a horizontal parallel plate channel*, Z. Angew. Math. Mech., 55 (1975), 105-111.

[4] D.A.Ladijenskaia, *Problèmes mathématiques de la dynamique du liquide visquex incompressible*, Moscou, 1970 (en russe).

[5] S.G.Krein, *Sur les vibrations du liquide visquex dans les vases*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 159 (1964), 262-265 (en russe).

[6] N.D.Copashevskii, *Sur les vibrations du liquide visquex rotatif capillaire*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 219 (1974), 1065-1068, (en russe).

[7] Ngo Duy Can, *Sur la rotation du corps solide avec des cavités partiellement occupées des liquides*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 21 (1981), 990-1002, (en russe).

[8] G. Metivier, *Valeurs propres d'opérateurs définis par la retriction des systèmes variationels à des sous-espaces*, J. Math. Pures Appl., 57 (1978), 133-156.

[9] S.G.Krein, *Equations différentielles linéaires dans l'espace de Banach*, Moscou, 1967 (en russe).

[10] S.G.Michlin, *Méthodes variationelles de la physique mathématique*, Moscou, 1970 (en russe).

[11] I.Ts.Gochberg et M.G.Krein, *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non-autoconjugués dans l'espace de Hilbert*, Moscou, 1965 (en russe).

Manuscrit reçu le 12 janvier 1985.

* INSTITUT DE MÉCANIQUE, HANOI RSVN.

** FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE HANOI, HANOI, RSVN.