ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Vol II $N_0 2$ (1986)

О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

ФАМ КИ АНЬ и ЧАН ДАНГ ХОНГ

В данной заметке предлагается один легко реализуемый на ЭВМ метод решения нелинейной периодической граничной задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} + f(t, x, \dot{x}) = 0, \\ x(0) = x(1). \end{cases} \tag{1}$$

Суть метода заключается в следующем: Вместо задачи (1) рассматривается её конечно-разностная аппроксимация:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - hf(t_i, x_i, (x_{i+1} - x_i)/h), \\ x_0 = x_N \ (i = 0, 1, \ldots, N-1). \end{cases} \tag{2}$$

а последняя решается особым итерационным методом. Показывается, что при выполнении некоторых условий разностная схема (2) устойчива, наш итерационный метод сходится и приближенное решение (2) сходится к точному решению (1). Даётся оценка скорости сходимости метода и приводятся примеры.

§1 НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ ФРЕДГОЛЬМОВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассматривается уравнение:

$$Ax + F(x) = 0, \tag{3}$$

где A — линейный ограниченный фредгольмов оператор индекса нуль, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y, а $F : X \to Y$ некоторый нелинейный оператор. Разложим X, Y в прямые суммы замкнутых подпространств $X = X_1 \oplus X_2$; $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где $X_2 + \operatorname{Ker} A$ конечномерно, $Y_1 = \operatorname{Im} A$ замкнуто и $\dim X_2 = \operatorname{codim} Y_1$. Обозначим через $\widehat{A}$ обратимое сужение оператора A на X. Пусть Q — линейный ограниченный проектор, для которого $\operatorname{Im} Q = Y_2$; $\operatorname{Ker} Q = Y_1$ и положим $P = I - Q$. Имеет место следующая (см [1,2])

ТЕОРЕМА 1. *Пусть оператор F непрерывно дифференцируем по фреше в некотором открытом множестве, содержащем замкнутый шар S с центром x_0, радиусом*

$r > 0$. *Пусть для всех* $x, y \in S$; $\| PF'(x) \| \leqslant \alpha$; $\| QF'(x) \| \leqslant \beta$; $\| [QF'(x)]_{X_2}^{-1} \| \leqslant \gamma$;

$$\| QF'(x) - QF'(y) \| \leqslant L \| x - y \| .$$

Здесь $[QF'(x)]_{X_2}^{-1}$ *есть обратный к сужению на* X_2 *оператора* $QF'(x)$.

Если коэффициент α, *радиус* r *и начальное приближение* x_0 *таковы, что:*

$$q = 2\alpha\beta\gamma \| \widehat{A}^{-1} \| + L\delta\gamma < 1; \; 2\delta(1 - q)^{-1} < r,$$

где невязка $\delta = \beta\gamma \| \widehat{A}^{-1} \| \; \| Ax_0 + PF(x_0) \| + \Upsilon \| QF(x_0) \|$, *то последовательность* $\{x_n\}$, *определенная по формулам*

$$u_{n+1} = -\widehat{A}^{-1} PF(x_n); \; \tilde{x}_n = u_{n+1} + v_n,$$

$$v_{n+1} = v_n - [QF'(\tilde{x}_n)]_{X_2}^{-1} \; QF(\tilde{x}_n),$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} \; (u_n \in X_1; \; v_n \in X_2; \; n \geqslant 0)$$

будет сходиться к некоторому решению $x^* \in S$ *уравнения (3), при этом имеет место оценка:*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant 2\delta \, (1 - q)^{-1} q^n < rq^n. \tag{4}$$

В [2] даны некоторые обобщения и модификации теоремы 1 а также их применения к различным функциональным уравнениям.

Лемма 1. *Пусть все условия теоремы 1 выполнены, более того, пусть* $\dim \operatorname{Ker} A = 1$. *Тогда уравнение (3) имеет единственное решение в множестве*

$$\Omega_0 = \{x \in X : \| u - u_0 \| \leqslant r/2; \; \| v - v_0 \| \leqslant r/2\} \subset S.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 (см. напр. [2]) устанавливаются оценки $\| u_{n+1} - u_n \| \leqslant \delta q^n$; $\| v_{n+1} - v_n \| \leqslant \delta q^n$. Из первой оценки следует, что $\| u_{n+m} - u_n \| \leqslant \delta (1 - q)^{-1} q^n$. Устремляя m к бесконечности, получим: $\| u_n - u^* \| \leqslant \delta (1 - q)^{-1} q^n$ $(n \geqslant 0)$, следовательно $\| u^* - u_0 \| \leqslant \delta (1 - q)^{-1} < r/2$. Аналогично $\| v^* - v_0 \| < r/2$ и таким образом $x^* \in \Omega_0 \subset S$. Допустим что уравнение (3) имеет в Ω_0 два решения:

$$x^* = u^* + v^*; \; \tilde{x} = \tilde{u} + \tilde{v}. \text{ Возьмём } \widehat{x} = u^* + \tilde{v} \in \Omega_0.$$

Имеем

$$\| u^* - \tilde{u} \| = \| \widehat{A}^{-1} [PF(x^*) - PF(\tilde{x})] \| \leqslant \alpha \| \widehat{A}^{-1} \| \| x^* - \tilde{x} \| . \tag{5}$$

Ввиду $QF(x^*) = QF(\tilde{x}) = 0$ имеем неравенство

$$\| QF(x^*) - QF(\widehat{x}) \| = \| QF(\widehat{x}) - QF(\tilde{x}) \| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 \| QF'(\tilde{x} + t(\widehat{x} - \tilde{x})) \| \, dt \right) \| \widehat{x} - \tilde{x} \| \leqslant \beta \| \widehat{x} - \tilde{x} \| = \beta \| u^* - \tilde{u} \| . \tag{6}$$

С другой стороны, положим $\varphi(t) = QF(\widehat{x} + t(x^* - \widehat{x}))$; $(t \in [0,1])$.

В силу того, что $\dim X_2 = \dim Y_2 = 1$ то $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}^1$ и по формуле конечных приращений, имеем

$$QF(x^*) - QF(\widehat{x}) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) = [QF'(\widehat{x} + \xi(x^* - \widehat{x}))]_{X_2}(v^* - \widetilde{v}).$$

Так как для всех $x \in S$; $\| [QF'(x)]_{X_2}^{-1} \| \leqslant \gamma$, то

$$\| QF(x^*) - QF(\widehat{x}) \| = \| [QF'(\widehat{x} + \xi(x^* - \widehat{x}))]_{X_2}(v^* - \widetilde{v}) \| \geqslant \gamma^{-1} \| v^* - \widetilde{v} \|$$

Из (6) следует, что: $\|v^* - \widetilde{v}\| \leqslant \beta\gamma \|u^* - \widetilde{u}\|$, а в силу (5)

$$\|x^* - \widetilde{x}\| \leqslant \|u^* - \widetilde{u}\| + \|v^* - \widetilde{v}\| \leqslant (1 + \beta\gamma)\|u^* - \widetilde{u}\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \|\widehat{A}^{-1}\| (1 + \beta\gamma) \|x^* - \widetilde{x}\|.$$

Учитывая, что $1 = \| [QF'(x_0)]_{X_2}^{-1} [QF'(x_0)]_{X_2} \| \leqslant \gamma \| QF'(x_0) \| \leqslant \beta\gamma$, имеем

$$\alpha \| \widehat{A}^{-1} \| (1 + \beta\gamma) \leqslant 2\alpha\beta\gamma \| \widehat{A}^{-1} \| \leqslant q < 1.$$

Следовательно $x^* = \widehat{x}$. Лемма доказана.

Замечание 1. В условиях леммы 1, существует единственное решение уравнения (3) в множестве

$$\widetilde{\Omega}_0 = \{x \in S : \| v - v_0 \| \leqslant r/2\}.$$

В самом деле, в доказательстве леммы 1, мы использовались лишь тем фактом что

$$\widetilde{x} = \widetilde{u} + \widetilde{v} \in S, \| \widetilde{v} - v_0 \| \leqslant r/2.$$

Известно [1], что периодическая граничная задача (1) сводится к операторному виду (3) путем введения следующих пространств и операторов:

$$Y = C[0,1]; \|y\| = \max_t |y(t)|; \ X = \{x \in C^1[0,1]; x(0) = x(1)\};$$

$$|||x||| = \|x\| + \|\dot{x}\|; \ Ax = \dot{x}; F(x) = f(t, x, \dot{x}),$$

$$X_1 = \{x \in X : \int_0^1 x(s)\, ds = 0\}; \ Y_1 = \{y \in Y : \int_0^1 y(s)\, ds = 0\};$$

$$X_2 = Y_2 = \{const\}; \ Qy = \int_0^1 y(s)\, ds; \ Py = y - Qy.$$

При этом, $\| Q \| = 1$; $\| P \| \leqslant 2$; $\| \widehat{A}^{-1} \| \leqslant 3/2$, где оператор $\widehat{A}^{-1}$: $Y_1 \to X_1$ легко вычисляется по формуле

$$\widehat{A}^{-1} y = \int_0^t s y(s)\, ds + \int_t^1 (s-1)\, y(s)\, ds$$

В дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия:

а) Функция $f(t, x, u)$ и её частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$ непрерывны по совокупности переменных в области

$$I = \{(t, x, u): 0 \leqslant t \leqslant 1;\ |x| \leqslant R;\ |u| \leqslant R\},$$

более того, $\forall\ (t, x, u), (t, \tilde{x}, \tilde{u}) \in I: \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u)\right| \leqslant \alpha;\ \left|\frac{\partial f}{\partial u}(t, x, u)\right| \leqslant \alpha,$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, \tilde{x}, \tilde{u})\right| \leqslant L(|x - \tilde{x}| + |u - \tilde{u}|),$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(t, x, u) - \frac{\partial f}{\partial u}(t, \tilde{x}, \tilde{u})\right| \leqslant L(|x - \tilde{x}| + |u - \tilde{u}|).$$

б) Существует такая интегрируемая функция $a(t)$ с неотрицательным интегралом $\int_0^1 a(t)\,dt > 0$, что

$$\forall\ (t, x, u) \in I, \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u) \geqslant a(t).$$

в) Существует функция $x_0 \in X$, $|||x_0||| < R$ такая что

$$q := 6\alpha^2\gamma + L\delta\gamma/2 < 1;\ 2\delta(1 - q)^{-1} < r \equiv R - |||x_0|||,$$

где $\gamma^{-1} \equiv \int_0^1 a(s)\,ds;\ \delta = \frac{3\alpha\gamma}{2} \max_t |\dot{x}_0 + f(t, x_0, \dot{x}_0) - \int_0^1 f(s, x_0, \dot{x}_0)\,ds| +$

$$+ \gamma \left|\int_0^1 f(s, x_0, \dot{x}_0)\,ds\right|.$$

Замечание 2. – Условие б) выполнено, если, например

$$f(t, x, u) = a(t)x + \varphi(t, x, u), \quad \text{где } \frac{\partial\varphi}{\partial x} \geqslant 0.$$

— Условие в) выполнено, если коэффициент α и невязка δ достаточно малы.

ТЕОРЕМА 2 [1]. *Пусть выполнены условия* а) — в), *тогда последовательность* $\{x_k\}$, *определенная по формулам:*

$$y_k(t) = \int_0^1 f(s, x_k, \dot{x}_k)ds - f(t, x_k, \dot{x}_k) \quad (k \geqslant 0)$$

$$u_{k+1}(t) = \int_0^t s y_k(s)ds + \int_t^1 (s - 1)y_k(s)ds$$

$$v_{k+1} = v_k - \frac{\int_0^1 f(s, u_{k+1} + v_k, \dot{u}_{k+1})ds}{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(s, u_{k+1}+v_k, \dot{u}_{k+1})ds}$$

$$x_{k+1}(t) = u_{k+1}(t) + v_{k+1}; \quad (u_k \in X_1; \quad v_k \in X_2)$$

сходится к некоторому решению x^* задачи (1), при этом справедлива оценка:

$$|||x_k - x^*||| \leqslant rq^k \ (k = 0,1,\ldots).$$

§2. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теорема 2 не только гарантирует существование решения задачи (1), но и даёт способ построения приближенного решения. Недостаток метода, пожалуй, состоит в требовании точного вычисления всюду встречаемых интегралов. Чтобы избежать эту неприятность, наряду с системой (1) мы рассмотрим её конечно-разностную аппрокси мацию (2), которая записывается в операторной форме:

$$A_h x^h + F_h(x^h) = 0 \tag{7}$$

где
$$X_h = \{x(x_0, x_1, \ldots, x^N) \in \mathbf{R}^{N+1} : x_0 = x_N\},$$

$$|||x|||_h = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i| + \frac{1}{h} \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} |x_{j+1} - x_j|$$

$$Y_h = \{y(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}) \in \mathbf{R}^N\}; \ \|y\|_h = \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} |y_j|$$

Операторы $A_h, F_h : X_h \to Y_h$ определяются по формулам:

$$[A_h(x)]_j = \frac{1}{h}(x_{j+1} - x_j),$$

$$[F_h(x)]_j = f(t_j, x_j, (x_{j+1} - x_j)/h) \quad (j = 0,1,\ldots, N-1).$$

ЛЕММА 2. *X_h, Y_h являются банаховыми пространствами со следующими разложениями:*

$$X_h = X_1^h \oplus X_2^h; \ Y_h = Y_1^h \oplus Y_2^h, \tag{8}$$

где
$$X_1^h = \{x \in X_h : \sum_{i=0}^{N} x_i = 0\}; \ X_2^h = \{x \in X_h : x_0 = x_1 = \ldots = x_N\},$$

$$Y_1^h = \{y \in Y_h : \sum_{j=0}^{N-1} y_j = 0\}; \ Y_2^h = \{y \in Y_h : y_0 = y_1 = \ldots = y_{N-1}\}.$$

Далее, $A_h : X_h \to Y_h$ *является линейным ограниченным оператором* $\operatorname{Ker} A_h = X_2^h$ *;* $\operatorname{Im} A_h = Y_1^h$ *и сужение* $\widehat{A}_h$ *на* X_1^h *непрерывно обратимо:*

$$(\widehat{A}_h^{-1} y)_i = \begin{cases} \dfrac{h}{N+1} \sum\limits_{j=0}^{N-1} (j+1) y_j - h \sum\limits_{j=i}^{N-1} y_j & (0 \leqslant i \leqslant N-1), \\ \dfrac{h}{N+1} \sum\limits_{j=0}^{N-1} (j+1) y_j & (i=N). \end{cases} \tag{9}$$

Наконец, имеет место оценка

$$\| \widehat{A}_h^{-1} \| \leqslant 3/2. \tag{10}$$

Доказательство. Легко видеть, что пространства X_h, Y_h банаховы и имеют место разложения (8). Далее, очевидно, что $\operatorname{Ker} A_h = X_2^h$. Пусть теперь $y \in \operatorname{Im} A_h$. Тогда существует $x \in X_h$ такой, что $y = A_h x$, поэтому

$$\sum_{j=0}^{N-1} y_j = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{h} (x_N - x_0) = 0,$$

что означает $\operatorname{Im} A_h \subset Y_1^h$. Наоборот, пусть $y \in Y_1^h$, построим вектор $x = x(c) \in X_h$ по формуле:

$$x_i = \begin{cases} c - h \sum\limits_{j=1}^{N-1} y_j & (0 \leqslant i \leqslant N-1), \\ c & (i=N), \end{cases} \tag{11}$$

где постоянное c будет определено позже. Заметив, что

$$x_0 = c - h \sum_{j=0}^{N-1} y_j = c = x_N, \qquad \text{имеем } x \in X_h.$$

Далее, для всех $0 \leqslant i \leqslant N-2$

$$(A_h x)_i = + \frac{1}{h} \left\{ h \sum_{j=i}^{N-1} y_j - h \sum_{j=i+1}^{N-1} y_j \right\} = y_j,$$

$$(A_h x)_{N-1} = \frac{1}{h} \left\{ c - (c - h y_{N-1}) \right\} = y_{N-1}.$$

Следовательно $y \in \operatorname{Im} A_h$ и таким образом $\operatorname{Im} A_h = Y_1{}^h$.

Выберем теперь постоянное c такое, что $x = x(c) \in X_1{}^h$

$$0 = \sum_{i=0}^{N} x_i = \sum_{i=0}^{N-1} \left[c - h \sum_{j=i}^{N-1} y_j \right] + c = (N+1)c - h \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i}^{N-1} y_j$$

поэтому

$$c = \frac{h}{N+1}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i}^{N-1} y_j = \frac{h}{N+1}\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)y_j$$

и так, формула (9) доказана. Из (9) следует, что: $|(\widehat{A}_h^{-1} y)_0| =$

$$= \left|\frac{h}{N+1}\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)y_j - h\sum_{j=0}^{N-1} y_j\right| = \left|\frac{h}{N+1}\sum_{j=0}^{N-1}(N-j)y_j\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{N+1}\,\|y\|_h\sum_{j=0}^{N-1}(N-j) = \frac{\|y\|_h}{2}.$$

Далее, $|(\widehat{A}_h^{-1} y)_N| \leqslant \frac{h}{N+1}\,\|y\|_h\sum_{j=0}^{N-1}(j+1) = \frac{\|y\|_h}{2}$.

Наконец. для всех $0 < i < N$ имеем $(\widehat{A}_h^{-1} y)_i = \frac{h}{N+1}\sum_{j=0}^{0-1}(j+1)y_j -$

$- \frac{h}{N+1}\sum_{j=i}^{N-1}(N-j)y_j$. Поэтому $|(\widehat{A}_h^{-1} y)_i| \leqslant \frac{h}{N+1}\,\|y\|_h\Big\{\sum_{j=0}^{i-1}(j+1) +$

$$+ \sum_{j=i}^{N-1}(N-j)\Big\} = \left[i(i-N) + \frac{N(N+1)}{2}\right]\frac{h}{N+1}\,\|y\|_h \leqslant \frac{\|y\|_h}{2}.$$

Следовательно $\|\widehat{A}_h^{-1} y\|_h \leqslant \frac{\|y\|_h}{2}\ (y \in Y_1)$. Таким образом,

$$|||\widehat{A}_h^{-1} y|||_h = \|\widehat{A}_h^{-1} y\|_h + \|y\|_h \leqslant \frac{3}{2}\,\|y\|_h,\ \text{т.е. } \|\widehat{A}_h^{-1}\| \leqslant 3/2.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $Q_h : Y_h \to Y_h$ линейный ограниченный проектор, определенный формулой:

$$(Q_h y)_j = h\sum_{S=0}^{N-1} y_s, \quad (j = 0, 1, \ldots, N-1),$$

Положим $P_h = I_h - Q_h$, где I_h - тождественный оператор в Y_h. Ясно, что $P_h : Y_h \to Y_h$ также является линейным ограниченным проектором $Im P_h = Y_1^h$; $\operatorname{Ker} P_h = Y_2^h$ и кроме того, $\|Q_h\| \leqslant 1$; $\|P_h\| \leqslant 2$.

ЛЕММА 3. *Пусть выполнены условия а) б). Тогда оператор* $F_h : X_h \to Y_h$ *непрерывно дифференцируем в замкнутом шаре* $S_h = \{x \in X_h : \| x \|_h \leqslant R\}$, *и для всех* $x, y \in S_h$ $\| P_h F'_h(x) \|_h \leqslant 2\alpha$;

$$\| Q_h F'_h(x) \|_h \leqslant \alpha, \quad \| Q_h F'_h(x) - Q_h F'_h(y) \|_h \leqslant L \| x - y \|_h .$$

Далее, для любого $\varepsilon \in (0, \gamma^{-1})$ *существует* $h(\varepsilon) > 0$ *такое, что при всех* $h \in (0, h(\varepsilon))$, *сужение* $Q_h F'_h(x)$ *на* X_2^h *имеет равномерно ограниченный обратный:*

$$\| [Q_h F'_h(x)]^{-1}_{X_2^h} \|_h \leqslant \gamma_\varepsilon \equiv \gamma(1 - \gamma\varepsilon)^{-1}.$$

Доказательство. Для всех $x \in S_h$, $v \in X_h$

$$[F'_h(x)v]_j = \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j, (x_{j+1} - x_j)/h)\, v_j + $$
$$+ \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j, (x_{j+1} - x_j)/h)(v_{j+1} - v_j).$$

В силу предположения а), имеем

$$|[F'_h(x)v]_j| \leqslant \alpha(|v_j| + \frac{1}{h}|v_{j+1} - v_j|) \leqslant \alpha \| v \|_h .$$

Далее, для всех $x, y \in S_h$; $v \in X_h$, $\{[F'_h(x) - F'_h(y)]\, v\}_j =$

$$= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j, (x_{j+1} - x_j)/h) - \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, y_j, (y_{j+1} - y_j)/h \right\} v_j +$$

$$+ \frac{1}{h}\left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(t_j, x_j, (x_{j+1} - x_j)/h) - \frac{\partial f}{\partial u}(t_j, y_j, (y_{j+1} - y_j)/h \right\}(v_{j+1} - v_j).$$

Отсюда, в силу предположения а) получим: $| \{ [F'_h(x) - F'_h(y)]\, v \}_j | \leqslant$

$$\leqslant L(|x_j - y_j| + |x_{j+1} - y_{j+1} - x_j + y_j|/h)(|v_j| + |v_{j+1} - v_j|/h) \leqslant$$

$\leqslant L \| x - y \|_h \| v \|_h$. Таким образом, $\| F'_h(x) - F'_h(y) \|_h \leqslant L \| x - y \|_h$

и, следовательно, $\| Q_h F'_h(x) - Q_h F'_h(y) \|_h \leqslant L \| x - y \|_h$.

Наконец, так как $h \sum_{i=0}^{N-1} a(ih) \to \int_0^1 a(s)\, ds = \gamma^{-1}$, то для всякого $\varepsilon \in (0, \gamma^{-1})$

найдётся $h(\varepsilon)$ такое, что при всех $h \in (0, h(\varepsilon))$ $\quad h\left(\sum_{i=0}^{N-1} a(ih)\right) \geqslant \gamma^{-1} - \varepsilon > 0.$

При любых $x \in S_h$; $v \in X_2^h$, имеем

$$[Q_h F'_h(x)\, v]_j = h \sum_{s=0}^{N-1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(t_s, x_s, (x_{s+1} - x_s)/h) v_s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial u}(t_s, x_s, (x_{s+1} - x_s)/h)(v_{s+1} - v_s) \right\}.$$

Поскольку $v \in X_2^h$, $v_0 = v_1 = \ldots = v_N$, то

$$|[Q_h F'_h(x)\ v]_j| = h \left| \sum_{S=0}^{N-1} \frac{\partial f}{\partial x}(t_s, x_s, (x_{s+1} - x_s)/h) \right| \||v\||_h .$$

Используя предположение б), получим :

$$|[Q_h F'_h(x)\, v]_j| \geqslant h \left(\sum_{S=0}^{N-1} a(sh)\right) \||v\||_h \geqslant (\gamma^{-1} - \varepsilon) \||v\||_h .$$

Таким образом, $[Q_h F'_h(x)]_{X_2^h}$ имеет равномерно ограниченный обратный:

$$\|[Q_h F'_h(x)]^{-1}_{X_2^h}\| \leqslant \gamma_\varepsilon \equiv \gamma (1 - \gamma \varepsilon)^{-1}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $\Pi_h : X \to X_h$; $\tau_h : Y \to Y_h$ операторы проектирования

$$\forall x \in X \ (\Pi_h x)_i = x(t_i) \quad (t_i = ih;\ 0 = 0, 1, \ldots, N),$$

$$\forall y \in Y \ (\tau_h y)_j = y(t_j) \quad (t_j = jh;\ j = 0, 1, \ldots, N-1)$$

Легко видеть, что $\|\Pi_h\| \leqslant 1$; $\|\tau_h\| \leqslant 1$. Положим $x_0^h = \Pi_h x_0$; $r_h = R - \||x_0^h\||_h$, где функция $x_0 \in X$ фигурируется в предположении в)

В дальнейшем, при каждом фиксированом h будем употреблять следующие обозначения :

$$K_h = \{x \in X_h :\ \||x - x_0^h\||_h \leqslant r_h\} \subset S_h ;$$

$$x^{(0)} := x_0^h = u_0^h + v_0^h;\ x^{(m)} = (x_0^{(m)}, \ldots, x_N^{(m)})(m \geqslant 0);$$

$$x^{(m)} = u^{(m)} + w^{(m)} ;\ u^{(m)} = (u_0^{(m)}, \ldots, u_N^{(m)}) \in X_1^h ;$$

$$w^{(m)} = (v^{(m)},\ v^{(m)}, \ldots, v^{(m)}) \in X_2^h;\ f_j^{(m)} = f(t_j, x_j^{(m)}, (x_{j+1}^{(m)} - x_{j+1}^{(m)})/h);$$

$$\tilde{f}_j^{(m)} = f(t_j,\ u_j^{(m+1)} + v^{(m)},\ (u_{j+1}^{(m+1)} - u_j^{(m+1)})/h,$$

$$\frac{\partial f_j^{(m)}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(t_j,\ u_j^{(m+1)} + v^{(m)},\ (u_{j+1}^{(m+1)} - u_j^{(m+1)})/h)$$

$$(j = 0,1,\dots, N-1).$$

Предположим, что m-ое приближенное $x^{(m)}$ уже построено. Мы определим $x^{(m+1)}$ следующим образом:

$$y_j^{(m)} = f_j^{(m)} - h\sum_{s=0}^{N-1} f_s^{(m)} \qquad (j = 0,1,\dots, N-1), \tag{12а}$$

$$u_i^{(m+1)} = \begin{cases} \dfrac{h}{N+1}\sum\limits_{j=0}^{N-1}(j+1)\ y_j^{(m)} - h\sum\limits_{j=1}^{N-1} y_j^{(m)} & (0 \leqslant 0 \leqslant N-1), \\ \dfrac{h}{N+1}\sum\limits_{j=0}^{N-1}(j+1)\ y_j^{(m)} & (i = N), \end{cases} \tag{12б}$$

$$v^{(m+1)} = v^{(m)} - \left\{\sum_{j=0}^{N-1}\tilde{f}_j^{(m)}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\partial \tilde{f}_j^{(m)}}{\partial x}\right\}^{-1}, \tag{12в}$$

$$x^{(m+1)} = u^{(m+1)} + w^{(m+1)};\ u^{(m+1)} \in X_1^h;\ w^{(m+1)} = (v^{(m+1)},\dots, v^{(m+1)}) \in X_2^h. \tag{12г}$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнены условия а) — в) и пусть $x_0 \in X$ имеет ограниченную вторую производную. Тогда найдётся такое $\tilde{h} > 0$, что при каждом фиксированном $h \in (0, \tilde{h})$ итерационный процесс (12а — 12г), начатый с $x^{(0)} = x_0^h = \Pi_h x_0$, сходится к решению $\bar{x}^h \in K_h$ задачи (2). При этом имеет место оценка: $\| x^{(m)} - \bar{x}^h \|_h \leqslant r_h q_h^m$, где $q_h \in (0,1)$.*

Доказательство. В силу предположения (в), $q = 6\alpha^2\gamma + L\delta\Upsilon/2 < 1$; $2\delta(1-q)^{-1} < r$, где $\delta = (3\alpha\Upsilon/2)\max\limits_t \left| \dot{x}_0 + f(t, x_0, \dot{x}_0) - \int_0^1 f(s, x_0, \dot{x})\, ds \right| + \Upsilon \left| \int_0^1 f(s,\ x_0,\ \dot{x}_0) ds\right.$. Положим $\delta(\cdot) = (3\alpha\Upsilon_\varepsilon/2)\max\limits_t \left| \dot{x}_0 + f(t, x_0, x_0) - \int_0^1 f(s, x_0, \dot{x}_0)\, ds \right| + \Upsilon_\varepsilon \left| \int_0^1 f(s, x_0, \dot{x}_0)\, ds \right|$; $q(\varepsilon) = 6\alpha^2\Upsilon_\varepsilon + L\delta(\varepsilon)\Upsilon_\varepsilon/2$. При $\varepsilon \to 0$ мы видим что $q(\varepsilon) \to q$; $\delta(\cdot) \to \delta$. Следовательно, найдётся $\tilde{\varepsilon} > 0$ такое, что $\tilde{q} = q(\tilde{\varepsilon}) < 1$; $2\tilde{\delta}(1-\tilde{q})^{-1} < r$, где $\tilde{\delta} = \delta(\tilde{\varepsilon})$.

Согласно лемме 3 для всех $h \in (0, h(\tilde{\varepsilon}))$ сужение $Q_h F'_h(x)$ на X_2^h имеет равномерно ограниченный обратный: $\| [Q_h F'_h(x)]^{-1}_{X_2^h} \| \leqslant \tilde{\gamma}$ $(x \in S_h)$, где $\tilde{\gamma} \equiv \gamma(1 - \gamma\tilde{\varepsilon})^{-1}$. Пусть

$$\delta_h = (3\alpha\tilde{\gamma}/2) \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} | (x_{j+1}^{(0)} - x_j^{(0)})/h + f_j^{(0)} - h \sum_{s=0}^{N-1} f_s^{(0)} | + h\tilde{\gamma} | \sum_{s=0}^{N-1} f_s^{(0)} | .$$

Положим $q_h = 6\alpha^2\tilde{\gamma} + L\delta_h\tilde{\gamma}/2$; $\varphi_0 = 2\tilde{\delta}(1 - \tilde{q})^{-1} - r$; $\varphi_h = 2\delta_h(1 - q_h)^{-1} - r_h$.

Так как $\delta_h \to \tilde{\delta}$; $q_h \to \tilde{q}$; $r_h \to r$, то $\varphi_h \to \varphi_0 < 0$ при $h \to 0$. Следовательно найдётся $\tilde{h} < h(\tilde{\varepsilon})$, что при всех $h \in (0, \tilde{h})$; $q_h < 1$; $\varphi_h < 0$. Применение лемм 2, 3, теоремы 1 и заканчивает доказательство теоремы 3.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Заметим сначала, что если решение $x^* \in S$ задачи (1) имеет ограниченную вторую производную, то уравнение (7) аппроксимирует уравнение (3) в точке x^*. В самом деле, имеем

$$\| A_h(\Pi_h x^*) - \tau_h(Ax^*) \|_h = \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} | (x_{j+1}^* - x_j^*)/h - \dot{x}^*(t_j) | \leqslant Ch.$$

Далее, в силу предположения а), $\| F_h(\Pi_h x^*) - \tau_h(F(x^*)) \|_h =$

$= \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant N-1} | f(t_j, x_j^*, (x_{j+1}^* - x_j^*)/h) - f(t_j, x_j^*, \dot{x}_j^*) | \leqslant \alpha Ch$. Таким образом,

$$\| A_h(\Pi_h x^*) + F_h(\Pi_h x^*) - \tau_h(Ax^* + F(x^*)) \|_h \leqslant (1 + \alpha)Ch.$$

ЛЕММА 4. *Разностная схема (7) устойчива, т.е существует $h_0 > 0$; $\varepsilon > 0$ что при всех $h < h_0$, и для всех $б \in Y_h$ $\| б \|_h < \varepsilon$ выполнены условия:*

1. Существует единственное в множестве

$$\Omega_h = \{X_h \ni x = u + v : u \in X_1^h ; v \in X_2^h ; \|| u - u_0^h \||_h \leqslant r_h/2 ; \|| v - v_0^h \||_h \leqslant r_h/2\}$$

решение задачи:

$$A_h x + F_h(x) = б. \qquad (13)$$

$$2. \qquad \||x^h - \overline{x}^h\||_h \leqslant c \, \| б \|_h , \qquad (14)$$

где x^h, $\overline{x}^h$ *— решения задачи (13) и (7) соответственно, а коэффициент* c *не зависит от* h.

Доказательство. Положим $\widetilde{F}_h(x) = F_h(x) - б$. Задача (13) теперь имеет вид: $A_h x + \widetilde{F}_h(x) = 0$, причём $\widetilde{F}'_h(x) = F'_h(x)$. Следовательно все выводы леммы 3 также справедливы для $\widetilde{F}_h(x)$. Найдём невязку $\delta(б) = (3\alpha\widetilde{\gamma}/2) \| A_h x_o^h + P_h \widetilde{F}_h(x_o^h) \|_h + \widetilde{\gamma} \| Q_h \widetilde{F}_h(x_o^h) \|_h$ и величину $q(б) = 6\alpha^2\widetilde{\gamma} + L\delta(б)\widetilde{\gamma}/2$.

Поскольку $\delta(б) \to \delta_h (б \to 0)$, $q(б) \to q_h (б \to 0)$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при всех $б \in Y_h$, $\| б' \|_h < \varepsilon$ имеем $q(б) < 1$ и $2\delta(б)(1 - q(б))^{-1} < r_h$. В силу теоремы 1 и леммы 1 задача (13) имеет единственное решение в Ω_h. Перейдём к оценке (14), имеем

$$u^h - \overline{u}^h = -\widehat{A}_h^{-1} \{ P_h [F_h(x^h) - F_h(\overline{x}^h)] - P_h б \},$$

$$Q_h F_h(x^h) = Q_h б.$$

Из первого соотношения следует, что

$$\||u^h - \overline{u}^h\||_h \leqslant \frac{3}{2} \left\{ 2\alpha \||x^h - \overline{x}^h\||_h + 2\|б\|_h \right\} = 3\alpha \||x^h - \overline{x}^h\||_h + 3\|б\|_h . \qquad (15)$$

Возьмем $\widehat{x}^h = u^h + \overline{v}^h$, имеем: $Q_h б = Q_h F_h(x^h) = Q_h F_h(x^h) - Q_h F_h(\widehat{x}^h) + Q_h F_h(\widehat{x}^h) - Q_h F_h(\overline{x}^h)$. С одной стороны $\| Q_h F_h(x^h) - Q_h F_h(\widehat{x}_h) \|_h \leqslant \| Q_h F_h(\widehat{x}^h) - Q_h F_h(\overline{x}^h) \|_h + \| Q_h б \|_h \leqslant \alpha \||u^h - \overline{u}^h\||_h + \| б \|_h$. С другой стороны, так как $\dim X_2^h = \dim Y_2^h = 1$, то по формуле конечных приращений

$$\| Q_h F_h(x^h) - Q_h F_h(\widehat{x}^h) \|_h = \| [Q_h F'_h(\widehat{x}^h + \xi(v^h - \overline{v}^h))]_{X_2^h} (v^h - \overline{v}^h) \|_h \geqslant$$

$$\geqslant \widetilde{\gamma}^{-1} \||v^h - \overline{v}^h\||_h .$$ В итоге, $\||v^h - \overline{v}^h\||_h \leqslant \alpha\widetilde{\gamma} \||u^h - \overline{u}^h\||_h + \widetilde{\gamma} \| б \|_h$.

Из (15) следует, что $\||x^h - \overline{x}^h\||_h \leqslant \||u^h - \overline{u}^h\||_h + \||v^h - \overline{v}^h\||_h \leqslant$

$$\leqslant (1 + \alpha\widetilde{\gamma}) \| u^h - \widetilde{u}^h \||_h + \gamma \| б \|_h \leqslant 3\alpha (1 + \alpha\widetilde{\gamma}) \||x^h - \overline{x}^h\||_h + (3(1 + \alpha\widetilde{\gamma}) + \gamma) \| б \|_h .$$

Заметив, что $3\alpha(1+\alpha\tilde{\gamma}) < 6\alpha^2\tilde{\gamma} < q_h < 1$, получим окончательно

$$|||x^h - \bar{x}^h|||_h \leqslant \frac{3(1+\alpha\tilde{\gamma}) + \tilde{\gamma}}{1 - 3\alpha(1+\alpha\tilde{\gamma})} \|б\|_h, \tag{16}$$

лемма доказана.

Замечание 3. Лемма 4 остается справедливой если вместо Ω_h рассматривается множество

$$\tilde{\Omega}_h = \{x \in X_h : |||x - x_0^h|||_h \leqslant r_h; \quad |||v - v_0^h|||_h \leqslant r_h/2\}.$$

Пусть $x^* \in \Omega_0$; $\bar{x}^h \in \Omega_h$ решения задачи (3), (7) соответственно. Положим $б^h = A_h(\Pi_h x^*) + F_h(\Pi_h x^*)$. Имеем

$$\|б^h\|_h \leqslant \|A_h(\Pi_h x^*) - \tau_h(Ax^*)\|_h + \|F_h(\Pi_h x^*) - \tau_h(F(x^*))\|_h \leqslant (1+\alpha)Ch.$$

Следовательно, при малом h, $\|б^h\|_h < \varepsilon$. Покажем, что $\Pi_h x^*$ является единственным решением уравнения $A_h x + F_h(x) = б^h$ в множестве $\tilde{\Omega}_h$. В самом деле, $|||\Pi_h x^* - x_0^h|||_h = |||\Pi_h(x^* - x_0)|||_h \leqslant \|\Pi_h\| \, |||x^* - x_0||| \leqslant r \leqslant r_h$. Далее,

$$\Pi_h x^* = u_h^* + v_h^*; \quad v_h^* = \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^{N} x^*(t_s); \quad |||v_h^* - v_0^h|||_h =$$

$$= \frac{1}{N+1}\left| \sum_{s=0}^{N} (x^*(t_s) - x_0(t_s)) \right| \xrightarrow[N\to\infty]{} \left| \int_0^1 (x^*(s) - x_0(s))\, ds \right| =$$

$= |||v^* - v^0|||_h < r/2 \leqslant r_h/2$ (см. лемму 1). Следовательно, при достаточно большом N (т.е. при малом h) $|||v_h^* - v_0^h|||_h < r_h/2$. Применив лемму 4, мы придем к следующему результату.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть решение $x^* \in \Omega^0$ задачи (1) имеет ограниченную вторую производную и пусть выполнены условия а) в). Тогда при малом h система (2) имеет единственное в Ω_h решение $\bar{x}^h$, при этом справедлива оценка:*

$$|||\bar{x}^h - \Pi_h x^*|||_h \leqslant \frac{3(1+\alpha\tilde{\gamma}) + \tilde{\gamma}}{1 - 3\alpha(1+\alpha\tilde{\gamma})} (1+\alpha)\, Ch.$$

На основании теорем 3, 4 мы сформулируем окончательный результат:

ТЕОРЕМА 5. *Пусть выполнены условия а) — в). Далее, пусть* $x_0 \in X$ *и решение* $x^* \in \Omega_0$ *(если такое существует) имеют ограниченные вторые производные:* $\max_t \{\sup_t |\ddot{x}_0|, \sup_t |\ddot{x}^*|\} = C < \infty$. *Тогда при достаточно малом* h, *итерационный процесс (12а — 12г), начатый с* $x^{(0)} = \Pi_h x_0$, *будет сходиться к решению (1). При этом имеет место оценка* $|||x^{(m)} - \Pi_h x^*|||_h \leqslant \tilde{r}\, q_h^m + C_1 h$, *где* $\tilde{r}$ *любое большее чем* r *число, а*

$$C_1 = \{3(1 + \alpha\tilde{\gamma}) + \tilde{\gamma}\}\{1 - 3\alpha(1 + \alpha\tilde{\gamma})\}^{-1}(1 + \alpha)\, C.$$

И так, если требуется вычислять решение задачи (1) с точностью ε, то выберем сначала шаг h настолько малым, что $C_1 h < \varepsilon/2$, а затем нужно делать $m \geqslant \ln(\varepsilon/\widetilde{2r}) / \ln q_h$ итераций по формулам (12а — 12г).

ПРИМЕРЫ

Рассматривается периодическая граничная задача с малым параметром

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} + \varepsilon t^{\nu}(mx + \varphi(t)\sin\dot{x} + \psi(t) = 0, \\ x(0) = x(1) \end{array} \right. \tag{17}$$

где m, ν — const ($\nu \geqslant 0$; $m > 0$), а $\varphi, \psi \in C\,[0,1]$ — заданные функции, причём $\|\varphi\| > 0$. При $\varepsilon = 0$, задача (17) имеет решение $x_0 = 0$. Примем его за начальную функцию. Проверим условия а) — в):

а) $f(t, x, u) = \varepsilon t^{\nu}(mx + \varphi(t,\sin u + \psi(t)$. Очевидно, что $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial u}$ непрерывны в области

$$\mathrm{I} = \{(t, x, u) : t \in [0,1];\ |x| < \infty;\ |u| < \infty\}.$$

Более того, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant M\varepsilon$; $\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}\right| \leqslant M\varepsilon$, где $M = \max(m, \|\varphi\|)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial u}$ удовлетворяют условию Липшица с коэффициентом $L = \|\varphi\|\varepsilon$.

б) $\forall (t, x, u) \in \mathrm{I}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x} = mt^{\nu}\varepsilon$,

$$\gamma = \left\{\int_0^1 mt^{\nu}\varepsilon\, dt\right\}^{-1} = (\nu + 1)(m\varepsilon)^{-1}.$$

в) $$\delta = |K_0|(\nu+1)(m)^{-1} + K_1\varepsilon\ ;\quad K_0 = \int_0^1 \psi(t)\, t^\nu\, dt,$$

$$K_1 = 3M(\nu+1)(2m)^{-1} \max_t |t^\nu \psi(t) - K_0|,$$

$q = 6M^2(\nu+1)\varepsilon m^{-1} + \|\varphi\|(\nu+1)\,\delta\,(2m)^{-1}$. Условие $q < 1$ эквивалентно тому, что

$$|K_0| < \frac{m}{\nu+1}\left\{\frac{2m}{(\nu+1)\|\varphi\|}\left[1 - \frac{6M^2}{m}(\nu+1)\varepsilon\right] - K_1\varepsilon\right\}. \tag{18}$$

Поскольку $|K_0| \leqslant \|\psi\|(\nu+1)^{-1}$, то нужно лишь

$$\|\psi\| < \{2m^2(1 - 6M^2(\nu+1)\varepsilon m^{-1})[\|\varphi\|(\nu+1)]^{-1} - K_1\varepsilon\}. \tag{19}$$

Если $\|\psi\| < 2m^2(\|\varphi\|(\nu+1))^{-1}$, то при достаточно малом ε условие (19) будет выполнено. Условие $2\delta(1-q)^{-1} < r$ выполняется автоматически, ибо в нашем случае $r = R - \|x_0\| = R = +\infty$.

И так, мы приходим к выводу, ито если $\|\varphi\|\,\|\psi\|(\nu+1)(2m^2)^{-1} < 1$, то при достаточно малом $\varepsilon < 0$ задача (17) имеет решение, которое может быть найдено предложенным нами методом.

Пусть например $\nu = 0$, $\varphi \equiv \psi \equiv m = 1$, т. е. рассматривается задача: $\dot{x} + \varepsilon(x + \sin\dot{x} + 1) = 0$; $x(0) = x(1)$. Начиная с $x_0 \equiv 0$ ($x_o^h = 0$), после одной итерации (12а – 12г) получим точное решение $x^* = -1$.

Рассмотрим другой пример:

$$\dot{x} = 0{,}05\,(x + \sin\dot{x} + \sin\pi t), \tag{20а}$$

$$x(0) = x(1). \tag{20б}$$

Делим отрезок $[0,1]$ на N равных частей и положим $h = 1/N$, $t_i = ih$ $(i = 0,1,\dots N)$.

Возьмем $x^{(0)} \equiv 0$, $x_j^{(0)} = 0$, $(j = 0,1,\dots,N)$. Допустим, что m - ое приближение $x_j^{(m)}$ $(j = 0,1,\dots,N)$ уже известно. Тогда $(m+1)$ - ое приближение определяется следующим образом:

$$f_j^{(m)} = 0{,}05\,(x_j^{(m)} + \sin N(x_{j+1}^{(m)} - x_j^{(m)}) + \sin\pi t_j) \qquad (j = 0,1,\dots,N-1)$$

$$y_j^{(m)} = f_j^{(m)} - N^{-1}\sum_{s=0}^{N-1} f_s^{(m)} \quad (j = 0,1,\dots,N-1),$$

$$c = [N(N+1)]^{-1}\sum_{s=0}^{N-1}(j+1)\,y_j^{(m)},$$

$$u_i^{(m+1)} = \begin{cases} c - N^{-1}\sum\limits_{j=i}^{N-1} y_j^{(m)} & (0 \leqslant i \leqslant N-1), \\ c & i = N, \end{cases}$$

$$\check{f}_j^{(m)} = (u_j^{(m+1)} + v^{(m)} + \sin N(u_{j+1}^{(m+1)} - u_j^{(m+1)}) + \sin \pi t_j) \quad (j = 0,1,.., N-1)$$

$$v^{(m+1)} = v^{(m)} - N^{-1} \sum_{s=0}^{N-1} \check{f}_s^{(m)},$$

$$x_j^{(m+1)} = u_j^{(m+1)} + v^{(m+1)} \qquad (j = 0, 1,\dots N).$$

Вычисление прекращается, если $\sum_{i=0}^{N} |x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$. Заметим, что в данном примере благодаря относительной простоты функции $f(t, x, u)$, сложность вычислительного процесса невозратает при уменьшении шага h. Вычисление проводится на микрокомпьютре « Яблоко — II » для различых $N = 10^2$, 10^3 и т. д. и $\varepsilon = 10^{-8}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фам Ки Ань и Ву Зуй Тик, *Об одном итерационном методе решения общих периодических граничных задач*, Украйн. Матем. Ж., 35 (1983), 348 — 352.

[2] Fam Ki Anh, *On the Seldel – Newton method for solving quasilinear operator equations*, Acta Math. Vietnamica, 7 (1982), 111 – 126.

Поступила в редакцию 5 октября 1985 г.

ХАНОЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ