ACTA MATHÉMATICA VIETNAMICA
Vol. II No. 2 (1986)

EXPOSANTS POLAIRES ET RESOLUTION DES SURFACES

LE DUNG TRANG

O. INTRODUCTION

(0.1) Soit $(V, 0)$ un germe de surface analytique complexe équidimensionnel. Supposons que $0 \in V$ soit une singularité isolée de $(S, 0)$.

Soit $f: (V, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction analytique complexe sur $(V, 0)$:

$$f \in \mathcal{O}_{V,0}$$

où $\mathcal{O}_{V,0}$ est l'anneau local de $(V, 0)$.

On notera $V \subset U \subset \mathbf{C}^N$ un représentant de $(V, 0)$ que nous supposerons fermé dans l'ouvert U de $\mathbf{C}^N$ et défini par les équations $f_1 = \dots = f_k = 0$, où f_i est défini sur U et est analytique complexe. En particulier on a :

$$\mathcal{O}_{V,0} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{C}^N,0} / (f_1, \dots, f_k)$$

où $(f_1, \dots, f_k)$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^N,0}$ engendré par les germes en 0 de $f_1, \dots, f_k$.

On supposera que le germe f a un représentant, encore noté f, défini sur $U \cap V$ et que V, ainsi que le sous-espace analytique de $U \cap V$ défini par $f = 0$, sont non singuliers en dehors de 0.

On sait que (comparer à [M] corollary 2. 9 et theorem 2.10) :

(0.2) LEMME. *Il existe $\varepsilon_1 > 0$, tel que, pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, la sphère S_ε de $\mathbf{C}^N$ centrée en 0 et de rayon ε, coupe V transversalement et, pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, les paires de variétés différentiables $(S_\varepsilon, S_\varepsilon \cap V)$ sont difféomorphes.*

Nous noterons $K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap V$ et nous appellerons le type topologique de la paire $(S_\varepsilon, K_\varepsilon)$ le *nœud algébrique* défini par $(V, 0)$.

Reprenant la remarque de Waldhausen que la variété différentiable K_ε est une variété de dimension 3 qui est union disjointe de fibrés de Seifert et de tores (i. e. K_ε est une variété de Waldhausen), W. Neumann démontre le théorème suivant (cf. [N]):

(0.3) THÉORÈME. *La topologie d'une bonne résolution minimale de $(V, 0)$ est déterminée par le type d'homéomorphisme orienté de K_ε .*

(0.4) Dans cette communication nous donnons une description de la topologie de la variété de dimension 3 à bord $M_{\varepsilon,\eta} = K_\varepsilon - f^{-1}(\mathring{D}_\eta)$, où $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon > 0$ et $\mathring{D}_\eta$ est le disque ouvert de $\mathbf{C}$ centré en 0 de rayon η, $\varepsilon \gg \eta > 0$.

Comme seule cette variété va nous intéresser et que nous nous limiterons au cas où $M_{\varepsilon,\eta}$ est *connexe*, nous supposerons désormais que $(V, 0)$ est le germe d'une surface *normale*.

Dans le cas où $(V, 0) \simeq (\mathbf{C}^2, 0)$, i. e. V est non singulier en 0, ces résultats sont ceux que F. Michel, C. Weber et moi-même avons déjà obtenus dans [LMW] (voir l'annonce dans [L4]).

1. COURBES POLAIRES ET DIRIMANTS

Dans ce paragraphe nous rappelons la définition de la courbe polaire relative de f en 0 (cf. [L1], [L3], [T2] et [HMS] §4).

(1.1) LEMME. *Il existe un ouvert conique dense Ω dans l'espace des formes linéaires non nulles de $\mathbf{C}^N$ tel que, pour tout $e \in \Omega$, le germe $(\Gamma, 0)$ en 0 de la fermeture dans V du lieu critique de $\Phi : V - \{f = 0\} \to \mathbf{C}^2$ défini par $\Phi(z) = (e(z), f(z))$ est, soit toujours Φ, soit un germe de courbe réduite tel que:*

i) *la multiplicité de $(\Gamma,0)$ est un invariant analytique de $f \in \mathcal{O}_{V,0}$;*

ii) *la restriction de Φ à $(\Gamma,0)$ est un morphisme biméromorphe de $(\Gamma,0)$ sur son image $(\Delta,0)$;*

iii) *le type topologique de $(\Delta,0)$ (cf. (0.2)) est un invariant analytique de $f \in \mathcal{O}_{V,0}$.*

(1.2) DÉFINITION. *Nous appellerons un germe de courbe $(\Gamma,0)$ défini comme dans (1.1) la courbe polaire relative de f (définie par e) et $(\Delta,0)$ le dirimant relatif de f (défini par e).*

Il y a une autre façon d'introduire la courbe polaire relative de f (cf. [L2], voir aussi [T2] [HMS] §4).

On peut supposer que la restriction de f à $V - f^{-1}(0)$ n'a pas de point critique si U est assez petit (cf. [M] Corollary 2.8 dans le cas algébrique).

Considérons $\gamma_f : V - f^{-1}(0) \to \mathbf{P}^{N-1}$ — l'application analytique qui, à $z \in V - f^{-1}(0)$ fait correspondre la droite tangente $T_z\,(f^{-1}(f(z)))$ (quand f n'est pas constante).

(1. 3) Le graphe de γ_f est un sous-espace de $V \times \mathbf{P}^{N-1}$ qui se projette sur $V - f^{-1}(0)$ et lui est isomorphe par cette projection. Notons $N_f(V)$ la fermeture de ce graphe dans $V \times \mathbf{P}^{N-1}$. Les projections sur V et $\mathbf{P}^{N-1}$ induisent $\nu_f : N_f(V) \to V$ et $\tilde{\gamma}_f : N_f(V) \to \mathbf{P}^{N-1}$.

On appellera ν_f la transformation de Nash relative de f.

(1.4) THÉORÈME. *Il existe un ouvert de Zariski dense $\Omega_0 \subset \mathbf{P}^{N-1}$ tel que, pour tout $L \in \Omega_0$, le germe de $\nu_f(\tilde{\gamma}_f^{-1}(\mathrm{L}))$ en 0 soit une courbe polaire relative de f.*

(1.5) Remarquons que si f est définie par une forme linéaire assez générale de $\mathbf{C}^N$, la courbe polaire relative de f est la courbe polaire de V en 0 (cf. [LT]).

2. FILTRATION POLAIRE DE LA MONODROMIE

D'après [L2] (Theorem 1.1) (voir aussi [LT] théorème (2.3.1)) nous avons:
(2.1) THÉORÈME. *Il existe $\varepsilon_2 > 0$, tel que, pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, il existe η_ε, tel que, pour tout η, $0 < \eta \leqslant \eta_\varepsilon$ l'application:*

$$\varphi_{\varepsilon,\eta} : B_\varepsilon \cap f^{-1}(\partial D_\eta) \to \partial D_\eta$$

induite par f, soit une fibration C^∞ localement triviale. De plus il existe un ouvert semi-analytique E de $\mathbf{R}^2$ qui contient $[0,\varepsilon_2[\times\{0\}$ dans son adhérence tel que, pour tout $(\varepsilon, \eta) \in E$, les fibrations $\varphi_{\varepsilon,\eta}$ sont isomorphes.

Choisissons alors $e \in \Omega$ comme dans (1.1). On supposera pour simplifier que e est la première coordonnée X_1 de $\mathbf{C}^N$. Alors on a:

(2.2) THÉORÈME. *Il existe $\varepsilon_3 > 0$ tel que, pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_3$, il existe $r_\varepsilon > 0$, tel que, pour tout r, $0 < r \leqslant r_\varepsilon$, il existe un disque fermé $D(r)$ centré en 0 dans $\mathbf{C}$ tel que l'application*

$$\psi_{\varepsilon,r} : (D(r) \times B_\varepsilon^{N-1}) \cap f^{-1}(\partial D_r) \to \partial D_r$$

induite par f soit une fibration C^∞ localement triviale isomorphe à $\varphi_{\varepsilon,\eta}$, avec $(\varepsilon,\eta) \in E$.

Comme dans (2.1) on peut montrer l'existence d'un ouvert semi-analytique E_1 de $\mathbf{R}^2$ qui contient $]0, \varepsilon_3[\times \{0\}$ dans son adhérence tel que, pour tout $(\varepsilon,r) \in E_1$ et $(\varepsilon, \eta) \in E$, les fibrations $\psi_{\varepsilon, r}$ et $\varphi_{\varepsilon, \eta}$ sont isomorphes.

La différence entre les deux situations est d'avoir remplacé B_ε par le produit $D(r) \times B_\varepsilon^{N-1}$ du disque $D(r)$ par la boule fermée de $\{0\} \times \mathbf{C}^{N-1}$ de rayon ε centrée en 0.

Appelons Γ la fermeture dans V du lieu critique de la restriction de $\Phi = (x_1, f)$ à $V - f^{-1}(0)$ et $\Delta = \Phi(\Gamma)$.

Si l'ouvert U est assez petit, les germes $(\Gamma, 0)$ et $(\Delta, 0)$ sont la courbe polaire relative de f et le dirimant relatif de f définis par X_1.

(2.3) Les s branches analytiques $\Delta_1,\dots, \Delta_s$ de Δ en 0 ont des développements de Puiseux en 0 :

$$X_1 = \sum_{k \geqslant 1} a_e^{(i)} \lambda^{\frac{e}{m}} \quad i = 1,\dots,s$$

où λ est la coordonnée de $\mathbf{C}^2$ — des valeurs de f.

Soit : $$e_i = \inf \{ e, a_e^{(i)} \neq 0 \}.$$

(2.4) DÉFINITION. *On appellera l'ensemble* des $\{\frac{e_i}{m}\}$ *les exposants polaires de f* en 0 (comparer à [T] (1.5) théorème 2).

Dans [L3] nous filtrons les fibres de $\psi_{\varepsilon, r}$ par des sous-ensembles indexés par la famille des exposants polaires de f en 0.
Précisément supposons :

$$\frac{e_1}{m} \geqslant \dots \geqslant \frac{e_s}{m}$$

et :

$$\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{e_1}{m} = \dots = \dfrac{e_{i-1}}{m} \\ \dots \\ \rho_g = \dfrac{e_g}{m} = \dots = \dfrac{e_s}{m} \end{cases}$$

Ainsi $\{\rho_1,\dots, \rho_g\}$ est l'ensemble des exposants polaires distincts de f en 0 :

$$\rho_1 > \dots > \rho_g$$

On définit A_i et B_i te's que :

(2.5) $0 < A_i < \inf \{ | a_{e_j}^{(j)} |, \rho_i = \frac{e_j}{m} \} \leqslant \operatorname{Sup} \{ | a_{e_j}^{(j)} |, \rho_i = \frac{e_j}{m} \} < B_i$.

Soit $D_i = \{ z \in \mathbf{C}, |z| \leqslant B_i r^{\rho_i} \}$.

On définit :

$$F_i = \Phi^{-1}(D_i \times \{ r \}).$$

(2.6) DÉFINITION. *La filtration $F_1 \subset \ldots \subset F_g$ de $\psi_{\varepsilon,r}^{-1}(\{ r \}) = F$ est une filtration polaire de F.*

Dans [L 3] on a implicitement :

(2.7) THÉORÈME. *a) L'espace F_g est difféomorphe à F et la classe de difféomorphisme du g-uple $(F_1, \ldots, F_g)$ est un invariant analytique de f en 0.*

b) De plus il existe un difféomorphisme de F qui réalise la monodromie de $\psi_{\varepsilon,r}$ et *qui laisse invariant $(F_1, \ldots, F_g)$.*

3. DECOMPOSITION DE WALDHAUSEN

Dans ce paragraphe nous allons montrer que la variété $M_{\varepsilon,\eta}$ de (0.4) est une union disjointe de fibrés de Seifert et de tores incompressibles, i. e. a une décomposition de Waldhausen.

La partie b) du théorème (2.7) a un énoncé plus précis. Remarquons tout d'abord (comparer à [M] theorem 4.8) :

(3.1) LEMME. *Si $1 >> \varepsilon > \eta > 0$, l'application $\theta_{\varepsilon,\eta} : M_{\varepsilon,\eta} \to \mathbf{S}^1$ définie par :*

$$\theta_{\varepsilon,\eta}(z) = f(z) / | f(z) |$$

est une fibration C^∞ localement triviale isomorphe à $\psi_{\varepsilon,r}$ $((\varepsilon,r) \in E_1)$ et à $\varphi_{\varepsilon,\eta}$ $((\varepsilon,\eta) \in E)$.

En fait il existe un ouvert semi-analytique non vide E_o de $\mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $(\varepsilon,\eta) \in E_o$, le lemme (3.1) est vrai. D'autre part le lemme (3.1) montre que si l'espace total $E_{\varepsilon,r}$ de la fibration $\psi_{\varepsilon,r}$:

$$E_{\varepsilon,r} = (D(r) \times B_\varepsilon^{N-1}) \cap f^{-1} (\partial D_r)$$

a une décomposition de Waldhausen, il en est de même pour $M_{\varepsilon,\eta}$. Nous allons montrer que cette décomposition provient de l'action d'une monodromie géométrique sur la filtration polaire de (.6).

Précisément on a:

(3.2) THÉORÈME. *Pour tout* $(\varepsilon, r) \in E_1$ *, il existe un champ de vecteurs v sur l'espace total de la fibration* $\psi_{\varepsilon,r}$ *dont l'intégration donne une monodromie géométrique de* $\psi_{\varepsilon,r}$ *qui laisse invariant une filtration polaire* $(F_1, \ldots, F_g)$ *et qui, par intégration, donne une filtration* $(M_1, \ldots, M_g)$ *de* $E_{\varepsilon,r}$. *De plus* M_1 , $M_i - M_{i-1}$ $(2 \leqslant i \leqslant g)$ *ont une décomposition de Waldhausen.*

Nous allons examiner plus en détail la décomposition de Waldhausen de M_1, $M_i - M_{i-1}$ $(2 \leqslant i \leqslant g)$.

Comme dans [LMW] (voir [L4] § (3.4)), on remarque:

$$M_1 = \Phi^{-1}(\mathcal{D}_1(r))$$
$$M_i - M_{i-1} = \Phi^{-1}(\mathcal{C}_i(r))$$

avec:

$$\mathcal{D}_1(r) = D_1 \times \partial D_r$$
$$\mathcal{C}_i(r) = C_i \times \partial D_r$$

et: $C_i = \{z \in \mathbf{C},\ A_i r^{\rho_i} \leqslant |z| \leqslant B_i r^{\rho_i}\}$ $\quad i = 2, \ldots, g$.

Soient T_j des voisinages tubulaires convenables de

$\{X_1 = a^{(j)}_{e_j} \lambda^{\frac{e_j}{m}}\} \cap D(r) \times \partial D_r$ dans $D(r) \times \partial D_r$. En fait si $\frac{e_j}{m} = \rho_i$, le voisinage tubulaire T_j est un sous-ensemble de $C_i \times \partial D_r$ (si $i \geqslant 2$) ou de $D_1 \times \partial D_r$ (si $i = 1$).

(3.3) Le champ de vecteurs de (3.2) peut être construit de telle sorte que son intégration laisse les $\Phi^{-1}(T_j)$ invariants et de plus $\Phi^{-1}(T_j)$ a une décomposition de Waldhausen.

(3.4) La décomposition précédente de $E_{\varepsilon,r}$ n'est certainement pas minimale au sens de Jaco — Schalen — Johansson (voir le théorème (3.4.5) de [L4]). Quand $(V, 0) = (\mathbf{C}^2, 0)$, les espaces $\Phi^{-1}(T_j)$ sont des unions de tores pleins (voir [LMW]).

Dans ce cas de surfaces normales, certaines composantes connexes de E_1 ou $E_i - \mathring{E}_{i-1}$ $(2 \leqslant i \leqslant g)$ peuvent être des tores épaissis (des variétés à bord isomorphes au produit d'un anneau par un cercle dont le bord sont des tores parallèles) ou dans le cas spécifique de E_1 des tores pleins. C'est pourquoi en général la décomposition proposée n'est pas minimale, mais on peut à partir d'elle obtenir une décomposition minimale (voir [LMW] par exemple).

4. EXPOSANTS POLAIRES ET RESOLUTION

On sait (cf. [N] §8 par exemple) que $(V, 0)$ a une bonne résolution minimale:

$$\pi : \widetilde{V} \longrightarrow V$$

dans laquelle $\widetilde{V}$ est une surface non singulière, π est un morphisme analytique propre qui induit un isomorphisme de $\widetilde{V} - \pi^{-1}(0)$ sur $V - \{0\}$ et $\pi^{-1}(0)$ est un diviseur à croisements normaux.

Mais dans ce cas le diviseur div $(f\circ\pi)$ défini par la fonction $f\circ\pi$ de $\widetilde{V}$ n'est pas nécessairement à croisements normaux. Considérons alors $\pi_1 : \widetilde{V}_1 \to \widetilde{V}$ définis par une suite finie *minimale* d'éclatements de points tel que div $(f\circ\pi\circ\pi_1)$ soit un diviseur à croisements normaux dans $\widetilde{V}_1$. On a alors:

$$(\pi\circ\pi_1)^{-1}(0) = \sum_{i \in I} m_i C_i$$

où les C_i sont les composantes de $|\pi^{-1}(0)|$ et m_i la multiplicité de C_i. Dans ce cas:

$$\operatorname{div}(f\circ\pi\circ\pi_1) = \sum_{i\in I} d_i C_i + \sum_{k \in K} C'_k$$
$$\operatorname{div}(X_1\circ\pi\circ\pi_1) = \sum_{i\in I} m_i C_i + \sum_{j \in J} L'_j$$

où les C'_k $(k \in K)$ sont les branches de la transformée stricte de $f^{-1}(0)$ et les L'_j $(j \in J)$ sont les branches de la transformée stricte de $\{X_1 = 0\} \cap V$.

(4.1.) DÉFINITION. *On appelle composantes de rupture topologique de $(\pi\circ\pi_1)^{-1}(0)$ les composantes C_i $(i \in R)$ qui satisfont l'une des conditions suivantes:*

i) *le genre $g(C_i)$ est au moins 1;*

ii) *$g(C_i) = 0$ et C_i est intersecté par au moins trois courbes parmi les $C_e (e \in I - \{i\})$, $C'_k (k \in K)$.*

On a alors le théorème suivant:

(4.2) THÉORÈME. *L'ensemble des quotients $\dfrac{m_i}{d_i}$ correspondants aux composantes de rupture topologique C_i $(i \in R)$ est un sous-ensemble des quotients polaires de f en 0.*

5. QUELQUES PROBLÈMES

A l'instar de [L3] ou [T1] on peut définir les quotients polaires d'un germe de fonction analytique complexe $f : (X, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ défini sur un germe d'espace analytique réduit quelconque.

(5.1) Dans le cas où $(X, 0) = (\mathbf{C}^n, 0)$ et f a une singularité isolée en 0. Donner une définition des composantes de rupture topologique d'une résolution des singularités de f :

$$\pi : Z \longrightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$$

où div $(f_0\pi)$ est un diviseur à croisements normaux de Z. Cette définition doit être assez raisonnable pour obtenir (4.2).

(5.2) Dans le cas où $(X, 0) = (\mathbf{C}^2, 0)$, il n'y a pas coincidence entre l'ensemble des quotients $\left(\frac{m_i}{d_i}\right)_{i \in R}$ aux composantes de rupture topologique et l'ensemble des quotients polaires dans le cas où la courbe $f^{-1}(0)$ n'a que deux tangentes distinctes dans son cône tangent. Un moyen d'éviter ce cas exceptionnel serait dans ce cas de modifier le ii) de la définition (4.1) par :

ii)' $g(C_i) = 0$ et C_i est intersecté par au moins trois courbes parmi les C_k $(k \in I - \{i\})$, $C'_k (k \in K)$ et $L'_j (j \in J)$.

Donner une justification géométrique de ce fait quand $(X, 0) = (\mathbf{C}^2, 0)$.

Dans le cas général où $(X, 0)$ est une surface normale peut-on déterminer, comme dans le cas $(X, 0) = (\mathbf{C}^2, 0)$, les composantes manquantes parmi les C_i pour obtenir tous les quotients polaires de f en 0 ?

(5.3) Que se passe-t-il en général ?

RÉFÉRENCES

[HMS] J.P.G. Henry, M. Merle, et C. Sabbah, *Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 17 (1984), 227 – 268.

[JS] W. Jaco and P. Schalen, *A new decomposition theorem for irreducible sufficiently large 3-manifolds*, Proc. Symp. in pure Mathematics, Vol. 32 (1978)Part II, 71 – 84.

[L1] Lê D.T., *Vanishing cycles on analytic spaces, Symposium on Algebraic Analysis (July 1975)*, Kyokorokyu series, R.I.M.S., Université de Kyoto, Kyoto.

[L2] Lê D.T., *Remarks on relative monodromy*, in « Real and Complex Singularities » ed., by Per Holm, Nordhoff pub., 1976.

[L3] Lê D.T, *La monodromie n'a pas de point fixe*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, 22 (1975) 409 – 427.

[L4] Lê D.T., *Courbes polaires et résolution des courbes planes*, à paraitre dans Proc. International Conference of La Rabida (Déc. 1984).

[LMW] Lê D.T., F. Michel et C. Weber, *Topologie des courbes planes et courbes polaires*, en préparation.

[LT] Lê D.T. et B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney II*, Proc. Symp. in pure Math., 40 (1983), Part 2, 65-103, AMS, Providence (USA).

[M] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Stud., 61 (1968) Princeton (USA).

[N] W. Neumann, *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves*, Trans. AMS 268 (1981), 299-344.

[T] B. Teissier, *Variétés polaires Invariants I. polaires des singularités d'hypersurfaces*, Inv. Math., 40 (1977), 267-292.

[T2] B. Teissier, *Variétés polaires locales et conditions de Whitney*, C.R. Acad. Sc., 290 (1980) 799-802.

Manuscrit reçu le 15 Mai 1986

CENTRE DE MATHÉMATIQUES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
PLATEAU DE PALAISEAU – 91128 PALAISEAU CEDEX