ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. II No I (1986)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

НГУЕН ВАН МАУ

В настоящей статье исследуются функционально-дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом вида :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{s} a_{j}(t)\ x^{(j)}(t+ir) + \sum_{i=}^{} \sum_{j=0}^{r} b_{ij}(t)\, x^{(j)}(ir-t) = y(t), \tag{1}$$

где $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $y(t)$ — периодические функции периода $\omega = nr$. Эти уравнения сводятся к равносильным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для исследования уравнения (1) привлекаются элементы теории абстрактных линейных операторов, содержащих конечную группу инволютивных элементов. В §I подробно разбирается один модельный класс функционально-дифференциальных операторов с отклоняющимся аргументом и периодическими коэффициентами. Для таких операторов построены первый и второй символы, имеющие существенную роль в нащих исследованиях. В §2 выясняются условия при которых данные уравнения равносильны уравнениям, порожденным их символами. В §3 даётся общий метод сведения уравнения вида (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Отметим, что некоторые частные случаи уравнения (1) (при $b_{ij}(t) = 0$) и их абстрактные модели были рассмотрены в [4] — [5].

§I. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО КОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ ИНВОЛЮТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть X_0 — линейное пространство над полем комплексных чисел и X — подпространство пространства X_0. Обозначим через $L(X \to X_0)$ пространство всех линейных операторов $A(X \to X_0)$ с областью определения $D(A) = X$. Пусть $S(X)$— некоторое заданное подпространство пространства $L(X \to X_0)$.

Рассмотрим следующую конечную группу линейных операторов в алгебре $\mathcal{A}(X) = L(X \to X) \cap L(X_0 \to X_0)$:

$$G_{2n} = \left\{ I, V, \dots, V^{n-1}; W_1, W_2, \dots, W_n \right\},$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1⁰) $V^n = I$, $W_j^2 = I$; $j = 1, 2, \ldots, n$; где I – тождественный оператор.

$$2^0) \qquad V^i W_j = \begin{cases} W_{j-i} & \text{при } j > i \\ W_{n+j-i} & \text{при } j \leqslant i;\ i, j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

$$W_j V^i = \begin{cases} W_{i+j} & \text{при } i + j \leqslant n \\ W_{i+j-n} & \text{при } i + j > n;\ i, j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

$$W_i W_j = \begin{cases} V^{j-i} & \text{при } j \geqslant i \\ V^{n+j-i} & \text{при } j < i;\ i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

3⁰) $S(X)$ инвариантно относительно группе G_{2n}. Это означает, что при $B_j \in S(X)$ элементы $V^i B_j V^{n-i}$, $W_i B_j W_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежат $S(X)$, т. е.

$$\begin{cases} B_{j1i} = V^i B_j V^{n-i} \in S(X), \\ B_{j2i} = W_i B_j W_i \quad \in S(X);\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

4⁰) Группа G_{2n} линейно независима над $S(X)$ (*). Это означает, что равенство

$$\sum_{j=1}^{n} (A_j V^j + B_j W_j) = 0, \text{ где } A_j, B_j \in S(X);$$

справедливо лишь при равных нулю коэффициентах A_j, B_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Обозначим все проекторы, порожденные операторами V и W_n через $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и Q_1, Q_2 соответственно. Тогда имеются следующие представления:

$$P_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^{-j} V^k;\quad V^j = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^j P_k;\quad P_i P_j = \delta_{ij} P_j, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_1 = exp\,\frac{2\pi i}{n}$; $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$; δ_{ij} — символ Кронекера.

$$\begin{cases} W_n = Q_1 - Q_2;\ Q_1 = \frac{1}{2}(I + W_n); \qquad Q_2 = \frac{1}{2}(I - W_n), \\ Q_i Q_j = \delta_{ij} Q_j;\ i, j = 1, 2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Более полную информацию об операторах V, W_n и их соответствующие проекторы можно найти в [1] — [4].

Далее, обозначим

$$V(X) = \{H = \sum_{j=1}^{n} A_j V^j;\ A_j \in S(X);\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

(*) Это условие показывает, что G_{2n} является группой порядка $2n$. В общем случае порядок группы G_{2n} может быть меньше $2n$.

Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Элементы I и W_n линейно независимы над $V(X)$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что равенство

$$H_0 + H_1 W_n = 0, \text{ где } \quad H_k = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(k)} V^j \ ; \ A_j^{(k)} \in S(X) \ ; \ k = 0, 1,$$

справедливо лишь при $H_0 = H_1 = 0$. В самом деле, пользуясь условиями 2[0]), можем переписать это равенство в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(o)} V^j + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(1)} W_{n-j} = 0.$$

Согласно условию 4[0]), из последнего равенства следует $A_j^{(o)} = A_j^{(1)} = 0$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $H_0 = H_1 = 0$. Теорема доказана.

ЛЕММА 1.1. *Каждый оператор*

$$K = \sum_{j=1}^{n} (A_j V^j + B_j W_j), \tag{1.3}$$

где $A_j, B_j \in S(X)$; $j = 1, 2, \ldots, n$; *имеет следующее представление*

$$K = M_1 Q_1 + M_2 Q_2, \tag{1.4}$$

где

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} (A_j + B_j) V^j ; \qquad M_2 = \sum_{j=1}^{n} (A_j - B_j) V^j, \tag{1.5}$$

Q_1 и Q_2 *имеют виды (1.2).*

Очевидно, что $M_1, M_2 \in S(X)$.

Договоримся об обозначениях для коэффициентов оператора K.

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (A_j + B_j + A_{n-j2n} + B_{n-j2n}) V^j, \\ M_{12} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (A_j + B_j - A_{n-j2n} - B_{n-j2n}) V^j, \\ M_{21} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (A_j - B_j - A_{n-j2n} + B_{n-j2n}) V^j, \\ M_{22} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (A_j - B_j + A_{n-j2n} - B_{n-j2n}) V^j, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где A_{n-j2n}, B_{n-j2n} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определяются по правилам 3[0]).

ЛЕММА 1.2.
$$Q_i M_j Q_j = M_{ij} Q_j = Q_i M_{ij} ; \ i, j = 1, 2, \tag{1.7}$$

$$M_j Q_j = \sum_{i=1}^{2} Q_i M_{ij}, \tag{1.8}$$

где M_j, M_{ij} *задаются формулами* (1.5) и (1.6) *соответственно.*

Доказательство. Расмотрим лишь случай $i=1$, $j = 1$. Для остальных проделаем аналогичными вычислениями.

Пользуясь условиями 1°) — 3°), получаем

$$Q_1 M_1 Q_1 = \frac{1}{2}(I + W_n) M_1 Q_1 = \frac{1}{2} M_1 Q_1 + \frac{1}{2} W_n M_1 Q_1 =$$

$$= \frac{1}{2} M_1 Q_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (W_n (A_j + B_j) V^j) Q_1 = \frac{1}{2} M_1 Q_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (A_{j2n} + B_{j2n}) W_n V^j Q_1 = \frac{1}{2} M_1 Q_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (A_{j2n} + B_{j2n}) V^{n-j} W_n Q_1 =$$

$$= \frac{1}{2} M_1 Q_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (A_{n-j2n} + B_{n-j2n}) V^j (Q_1 - Q_2) Q_1 = M_{11} Q_1.$$

Аналогично, $Q_1 M_1 Q_1 = Q_1 M_1 \left[\frac{1}{2}(I + W_n)\right] = \frac{1}{2} Q_1 (M_1 + M_1 W_n) =$

$$= \frac{1}{2} Q_1 \left[M_1 + \sum_{j=1}^{n} \left(A_j + B_j\right) V^j W_n \right] =$$

$$= \frac{1}{2} Q_1 \left[M_1 + \sum_{j=1}^{n} \left(A_j + B_j\right) W_n V^{n-j} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} Q_1 \left[M_1 + W_n \sum_{j=1}^{n} (A_{n-j2n} + B_{n-j2n}) V^j \right] = Q_1 M_{11}.$$

Таким образом, формула (1.7) верна. Проверка формулы (1.8) тривиальна. Лемма доказана.

Из условий, наложенных на коэффициенты A_j, $B_j (j = 1,2,\ldots, n)$ оператора K следует, что $M_{ij} \in V(X)$; $i, j = 1,2$.

Введем следующее обозначение

$$M_1(K) = \left\| \begin{matrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{matrix} \right\| \tag{1.9}$$

и назовём $M_1(K)$ — первым символом оператора K. Очевидно, что оператор $M_1(K)$ действует в пространстве

$$\widetilde{X}^{(2)} = X^{(1)} \times X^{(2)}, \text{ где } X^{(j)} = Q_j X;\ j = 1,2.$$

Пользуясь формулами (1.6), можем переписать первый символ $M_1(K)$ в следующем виде

$$M_1(K) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{K}_j \widetilde{V}^j, \tag{1.9'}$$

где

$$\widetilde{K}_j = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} A_j + B_j + A_{n-j2n} + B_{n-j2n} & A_j + B_j - A_{n-j2n} - B_{n-j2n} \\ A_j - B_j - A_{n-j2n} + B_{n-j2n} & A_j - B_j + A_{n-j2n} - B_{n-j2n} \end{matrix} \right\| \tag{1.10}$$

$$\widetilde{V} = \left\| \begin{matrix} V & 0 \\ 0 & V \end{matrix} \right\|;$$

Обозначим $\widetilde{P}_j = \begin{Vmatrix} P_j & 0 \\ 0 & P_j \end{Vmatrix}$; $j = 1, 2, \ldots, n$ (1.11)

и $K_j = \sum_{k=i}^{n} \varepsilon_k^j \widetilde{K}_k$; $j = 1, 2, \ldots, n$. (1.12)

Тогда $M_1(K)$ имеет вид

$$M_1(K) = \sum_{j=1}^{n} K_j \widetilde{P}_j, \tag{1.13}$$

где $\widetilde{P}_j$, K_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ вычисляются по формулам (1.11) и (1.12) соответственно.

Легко видеть, что $\widetilde{P}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ являются ортогональными проекторами, так что пространство $\widetilde{X}$ разлагается на прямую сумму:

$$\widetilde{X}^{(2)} = \bigoplus_{j=1}^{n} X_j^{(2)}, \text{ где } X_j^{(2)} = \widetilde{P}_j \widetilde{X}^{(2)}: j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.14}$$

Для каждой матрицы $\widetilde{K}_j$ вида (1.10) поставим следующую соответственную матрицу

$$\widetilde{K}_{js} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} A_{j1s} + B_{j1s} + A_{n-j2n-s} + B_{n-j2n-s} & A_{j1s} + B_{j1s} - A_{n-j2n-s} - B_{n-j2n-s} \\ A_{j1s} - B_{j1s} - A_{n-j2n-s} + B_{n-j2n-s} & A_{j1s} - B_{j1s} + A_{n-j2n-s} - B_{n-j2n-s} \end{Vmatrix} \tag{1.15}$$

где A_{j1s}, B_{j1s}, $A_{n-j2n-s}$, $B_{n-j2n-s}$ вычисляются по правилам 3⁰).

Введем следующее обозначение:

$$M_2(K) = \| K_{js} \|_{j,s=1}^{n}, \tag{1.16}$$

где

$$K_{js} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^j \widetilde{K}_{k1s}; \tag{1.17}$$

$\widetilde{K}_{k1s}$ определяются формулами (1.15)

и назовём $M_2(K)$ — вторым символом оператора K.

Из условий, наложенных на коэффициенты A_j, $B_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ следует, что $K_{js} \in S(X)$; $j, s = 1, 2, \ldots, n$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 1.3. $\widetilde{P}_i K_j \widetilde{P}_j = K_{ij} \widetilde{P}_j = \widetilde{P}_i K_{ij}$, (1.18)

$$K_j \widetilde{P}_j = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{P}_i K_{ij}. \tag{1.19}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. 2.

Легко видеть, что второй символ $M_2(K)$ является линейным оператором, действующим в пространстве

$$X^{[2n]} = X_1^{(2)} \times X_2^{(2)} \times \dots \times X_n^{(2)},$$

где $X_j^{(2)}$ определяется по формуле (1.14). Таким образом, каждый элемент $\Phi \in X^{[2n]}$ имеет вид

$$\Phi = (\Phi_{11}, \Phi_{12}, \dots, \Phi_{n1}, \Phi_{n2}),$$

где

$$\Phi_{ij} \in X_{ij};\quad X_{ij} = P_i Q_j X;\ i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2.$$

§ 2. О РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ ИНВОЛЮТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

Пусть G_{2n}, $S(X)$, $V(X)$ и оператор K имеют те же значения, что и в §1. Предположим, что все условия 1°) — 4°) выполняются.

Рассмотрим следующие уравнения

$$K\varphi \equiv \sum_{j=1}^{n} (A_j V^j + B_j W_j)\varphi = f; \qquad f \in X_0, \tag{2.1}$$

$$M_1(K)\psi = G. \tag{2.2}$$

$$M_2(K)\Phi = F, \tag{2.3}$$

где $G = (Q_1 f, Q_2 f)$, $F = (\widetilde{P}_1 G, \widetilde{P}_2 G, \dots, \widetilde{P}_n G) =$

$$= (P_1 Q_1 f, P_1 Q_2 f, \dots, P_n Q_1 f, P_n Q_2 f).$$

Уравнение (2.1), (2.2) и (2.3) рассматриваются в пространствах X, $\widetilde{X}^{(2)}$ и $X^{[2n]}$ соответственно. Цель этого параграфа состоит в том, чтобы дать полное исследование уравнения (2.1) в предположениях 1°) — 4°). Исследование основывается на связи между решениями уравнений (2.1), (2.2) и (2.3).

ТЕОРЕМА 2.1. *Уравнение (2.1) разрешимо в пространстве X тогда и только тогда, когда уравнение (2.2) разрешимо в пространстве $\widetilde{X}^{(2)}$.*

Доказательство. Пусть уравнение (2.1) разрешимо и φ является его решением. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} (A_j V^j + B_j W_j)\varphi = f,$$

или

$$M_1 Q_1 \varphi + M_2 Q_2 \varphi = f.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} Q_1 M_1 Q_1 \varphi + Q_1 M_2 Q_2 \varphi = Q_1 f, \\ Q_2 M_1 Q_1 \varphi + Q_2 M_2 Q_2 \varphi = Q_2 f. \end{cases}$$

Пользуясь формулой (1.7), можем писать последние равенства в следующем виде

$$\begin{cases} M_{11}Q_1\varphi + M_{12}Q_2\varphi = Q_1 f, \\ M_{21}Q_1\varphi + M_{22}Q_2\varphi = Q_2 f. \end{cases}$$

Это показывает, что $\psi = (Q_1\varphi, Q_2\varphi)$ является решением, уравнения (2.2).

Обратно, если $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — решение уравнения (2.2), то $\varphi = \psi_1 + \psi_2$ является решением уравнения (2.1). В самом деле, пользуясь (1.8), получаем

$$\begin{aligned} K\varphi &= M_1Q_1\varphi + M_2Q_2\varphi = M_1Q_1(\psi_1+\psi_2) + M_2Q_2(\psi_1+\psi_2) = \\ &= M_1Q_1\psi_1 + M_2Q_2\psi_2 = (Q_1M_{11} + Q_2M_{21})\psi_1 + (Q_1M_{12} + Q_2M_{22})\psi_2 = \\ &= Q_1(M_{11}\psi_1 + M_{12}\psi_2) + Q_2(M_{21}\psi_1 + M_{22}\psi_2) = \\ &= Q_1Q_1f + Q_2Q_2f = Q_1f + Q_2f = f. \end{aligned}$$

Этим теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. *Уравнение (2.2) разрешимо в пространстве* $\widetilde{X}^{(2)}$ *тогда и только тогда, когда уравнение (2.3) разрешимо в пространстве* $X^{[2n]}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1. В самом деле, если ψ — решение уравнения (2.2), то вектор $\Phi = (\widetilde{P}_1\psi, \widetilde{P}_2\psi, \ldots, \widetilde{P}_n\psi)$ является решением уравнения (2.3). Обратно, пусть $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ — решение уравнения (2.3). Тогда следующий элемент

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n$$

является решением уравнения (2.2). Действительно, пользуясь тождествами (1.18)—(1.19), получаем

$$\begin{aligned} M_1(K)\psi &= M_1(K)(\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_i\widetilde{P}_j\Phi_j = \\ &= \sum_{i=1}^{n} K_i\widetilde{P}_i\Phi_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{P}_j K_{ji}\Phi_i = \sum_{j=1}^{n}\widetilde{P}_j\left(\sum_{i=1}^{n} K_{ji}\Phi_i\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\widetilde{P}_j\widetilde{P}_j G = \sum_{j=1}^{n}\widetilde{P}_j G = G. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Уравнение (2.1) разрешимо тогда и только тогда, когда уравнение (2.3) разрешимо. Кроме того, если*

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) = (\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{n1}, \Phi_{n2})$$

является решением уравнения (2.3), то

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\Phi_{ij}$$

является решением уравнения (2.1).

Доказательство непосредственно вытекает из доказанных выше теорем 2.1 и 2.2.

ТЕОРЕМА 2.3. *Число линейно независимых решений однородного ($F=0$) уравнения (2.3) равно числу линейно независимых решений данного однородного уравнения (2.1), т. е.*

$$Dim\ Ker\ M_2(K) = Dim\ Ker\ K. \tag{2.4}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\text{Dim Ker } M_1(K) = \text{Dim Ker } M_2(K), \tag{2.5}$$

$$\text{Dim Ker } M_1(K) = \text{Dim Ker } K \tag{2.6}$$

Проверим равенство (2.5). Равенство (2.6) доказывается аналогично.

Пусть $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_s \in \text{Ker } M_1(K)$ образуют линейно независимую систему.

Тогда, согласно теореме 2.2,

$$\Phi^j = (\widetilde{P}_1 \psi_j, \widetilde{P}_2 \psi_j, ..., \widetilde{P}_n \psi_j) \in \text{Ker } M_2(K);\ j = 1, 2, ..., s.$$

Докажем, что $\{ \Phi^1, \Phi^2, ..., \Phi^s \}$ является линейно независимой системой векторов. Пусть $\alpha_1\Phi^1 + \alpha_2\Phi^2 + ... + \alpha_s\Phi^s = 0$. Это равенство равносильно системе n равенств для компонента Φ_i^j:

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \Phi_i^j = 0;\ i = 1, 2, ..., n,$$

или

$$\widetilde{P}_i \Big(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \psi_j\Big) = 0;\ i = 1, 2, ... n.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \psi_j = 0$$

и следоватсльно $\alpha_j = 0$; $j = 1, 2, ..., n$. Таким образом, установлено, что

$$\text{Dim Ker } M_2(K) \geqslant \text{Dim Ker } M_1(K). \tag{2.7}$$

Обратно, пусть $\Phi^1, \Phi^2, ..., \Phi^r$ — система линейно независимых решений однородного уравнения (2.3). Согласно теореме 2.2, элементы

$$\psi_j = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j^i\ ;\ i = 1, 2, ..., r$$

являются решениями однородного уравнения (2.2). Докажем, что $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_r\}$ является линейно независимой системой, т, е. равенство

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_i \psi_i = 0;\ \beta_i \in \mathbf{C};\ i = 1,2, ..., r \tag{2.8}$$

справедливо лишь при равных нулю всех коэффициентах β_i; $i = 1, 2, \ldots, r$. Перепишем равенство (2.8) в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i \sum_{j=1}^{n} \Phi^i_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{r} \beta_i \Phi^i_j\right) = 0.$$

Согласно представлению (1.14), последнее равенство равносильно следующим равенствам

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i \Phi^i_j = 0; \; j = 1, 2, \ldots n.$$

Это означает, что $\sum_{i=1}^{r} \beta_i \Phi^i = 0$. Отсюда следует $\beta_i = 0$; $i = 1, 2, \ldots, r$.

Таким образом, установлено, что

$$\mathrm{Dim}\ \mathrm{Ker}\ M_1(K) \geqslant \mathrm{Dim}\ \mathrm{Ker}\ M_2(K). \tag{2.9}$$

Из (2.7) и (2.9) получаем (2.5). Теорема доказана.

Связь между решениями уравнений (2.1) и (2.3) устанавливается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.4. *Каждое решение уравнения (2.1) имеет следующий вид*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \Phi^0_{ij} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \alpha_k \Phi^k_{ij} \quad ; \alpha_k \in \mathbf{C}, \tag{2.10}$$

где $\Phi^0 = (\Phi^0_{11}, \Phi^0_{12}, \Phi^0_{21}, \Phi^0_{22}, \ldots, \Phi^0_{n1}, \Phi^0_{n2})$ — *некоторое решение уравнения (2.3)*; $\{ \Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^r \}$ — *фундаментальная система решений однородного уравнения (2.3).*

Доказательство. Согласно теореме 2. 3, система элементов

$$\left\{ \varphi_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \Phi^k_{ij}\ ;\ k = 1,2, \ldots, r \right\}$$

является фундаментальной системой решений однородного уравнения (2.1). Отсюда, учитывая линейность оператора K, получаем формулу для общего решения однородного уравнения (2.1):

$$\varphi_0 = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \varphi_k \Phi^k_{ij}$$

и формулу для каждого решения неоднородного уравнения (2.1):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_0,$$

где

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \Phi^0_{ij}$$

. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Теорема 2.4 играет существенную роль в наших исследованиях. Она даёт тесную взаимооднозначную связь между решениями уравнения с конечной группой инволютивных операторов G_{2n} и уравнения, не содержащего их.

§3. О РЕШЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Обозначим через X линейное пространство всех непрерывных периодических функций на действительной оси с периодом $\omega = nr$ (n — натуралное число, $r > 0$) и через X_s пространство всех ω-периодических функций, s-я производная которых непрерывна.

Введем в рассмотрение следующие линейные операторы действующие в пространстве X_0:

$$\begin{cases} (Ix)(t) = x(t);\ (Vx)(t) = x(t+r), \\ (W_j x)(t) = x(jr-t);\ j = 1,2,\dots,n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Очевидно, что пространство X_s инвариантно относительно операторов I, V, W_j; $j = 1, 2, \dots n$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 3.1: $V^n = I$, $W_j^2 = I$, $V^i W_j = W_{j-i}$;

$$W_j V^i = W_{i+j};\ W_i W_j = V^{j-i};\ i,j = 1,2,\dots, n.$$

Доказательство получается непосредственными вычислениями. Проверим последнее соотношение. Проверка других соотношений аналогична.

$$(W_i W_j x(t) = (W_i x)(jr - t) = x(jr-(ir - t)) =$$

$$= x((i - j)\,r + t) = (V^{j-i} x)(t).$$ Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Множество* $G_{2n} = \{I, V,\dots V^{n-1}, W_1, W_2,\dots, W_n\}$ *образует конечную группу.*

Пусть $a_j(t) \in X_0$; $j = 0, 1,\dots, s$. Рассмотрим следующий оператор

$$A = \sum_{j=0}^{s} a_j(t)\, D^j, \tag{3.2}$$

где $(Dx)(t) = \dfrac{dx}{dt}$. Тогда, как легко видеть, что $A \in L\,(X_s \to X_0)$.

Будем обозначать через $S(X_s)$ множество всех операторов вида (3.2).

ЛЕММА 3.2. *$S(X_s)$ инвариантно относительно группе G_{2n}. Кроме того, если*

$$A_k = \sum_{j=0}^{s} a_{jk}(t)\, D^j \in S(X_s)$$

то

$$A_{k1i} = V^i A_k V^{n-i} = \sum_{j=0}^{s} a_{jk}\,(t + ir)\, D^j \in S(X_s), \tag{3.3}$$

$$A_{k2i} = W_i A_k W_i = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j a_{jk}\,(ir - t)\, D \in S(X_s). \tag{3.4}$$

Доказательство получается непосредственно из следующих равенств:

$$W_i D = - D W_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad VD = DV.$$

Таким образом, леммы 3.1 и 3.2 показывают, что условия 1⁰) –2⁰) –3⁰), цитированные в §1, выполнены. Легко проверить, что условие 4⁰) так же выполняется. Отметим, что в нашем конкретном случае условие 4⁰) не является существенным.

Рассмотрим следующее уравнение

$$(Kx)(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} (a_{jk}(t)\; x^{(k)}(t + jr) + b_{jk}(t)\; x^{(k)}(jr - t)) = y(t), \tag{3.5}$$

где $$y(t),\ a_{jk}(t),\ b_{jk}(t) \in \mathbf{X}_0 ;\ x(t) \in \mathbf{X}_s .$$

Через Q_j, M_j $(j = 1, 2)$ обозначим операторы

$$Q_1 = \frac{1}{2}(I + W_n); \quad Q_2 = \frac{1}{2}(I - W_n),$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{s} (a_{kj}(t) + b_{kn-j}(t))\; D^k V^j,$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{s} (a_{kj}(t) - b_{kn-j}(t))\; D^k V^j.$$

Тогда уравнение (3.5) можно записать в виде

$$(Kx)(t) = M_1 Q_1 x + M_2 Q_2 x = y. \tag{3.5'}$$

Первый символ оператора K имеет вид (1.9):

$$M_1(K) = \| M_{ij} \|_{ij=1}^{n} .$$

где $$M_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{s} (a_{kl}(t) + (-1)^k (3 - 2i)(3 - 2j) a_{lk}(-t) +$$

$$+ (3 - 2i)\, b_{kn-l}(t) + (3 - 2j)\, b_{kn-l}(-t)\, (-1)^k)\; D^k V^l ;\ i,j = 1,2. \tag{3.6}$$

Через $A^{(i,j)}_{kl}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, s;\ l = 1, 2, \ldots, n;\ i,j = 1,2)$ обозначим функции

$$A^{(i,j)}_{kl}(t) = \frac{1}{2} \Big(a_{kl}(t) + (-1)^k (3 - 2i)(3 - 2j)\, a_{kl}(-t) +$$

$$+ (3 - 2i)\, b_{kn-l}(t) + (-1)^k (3 - 2j)\, b_{kn-l}(t) \Big). \tag{3.7}$$

Тогда первый символ оператора K можно записать в виде операторного многочлена

$$M_1(K) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{s} A_{kl}(t) D^k V^l , \tag{3.8}$$

где $A_{kl}(t) = \| A_{kl}^{(i,j)} \|_{i,j=1}^{2}$; $A_{kl}^{(i,j)}(t)$ имеют виды (3.7) или в таком виде:

$$M_1(K) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{s} \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l^j A_{kl}(t) D^k \right) P_j . \tag{3.8'}$$

Второй символ оператора K имеет вид

$$M_2(K) = \| K_{\nu\mu} \|_{\nu,\mu=1}^{n} ,$$

где $$K_{\nu\mu} = \sum_{k=0}^{s} \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l^{\mu} A_{kl}(t + \nu r) D^k ; \quad \nu,\mu = 1,2,\dots, n. \tag{3.9}$$

Перепишем второй символ оператора K в виде операторного полинома:

$$M_2(K) = \sum_{k=0}^{s} B_k(t) D^k , \tag{3.10}$$

где

$$\begin{cases} B_k(t) = \| B_k^{(\nu,\mu)}(t) \|_{\nu,\mu=1}^{n} \\ \Gamma_k^{(\nu,\mu)} = \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l^{\mu} A_{kl}(t + \nu r); \ \nu,\mu = 1,2,\dots,n; \ k=0,1,\dots,s. \end{cases} \tag{3.11}$$

На основании полученных результатов в § 2 мы можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. *Уравнение* (3.5) *разрешимо тогда и только тогда, когда обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$\left(\sum_{k=0}^{s} B_k(t) D^k \Phi\right)(t) = Y(t), \tag{3.12}$$

где

$$\begin{cases} B_k(t) \text{ определяются по формулам (3.11), (3.7) — (3.8)} \\ Y(t) = (P_1 Q_1 y, P_1 Q_2 y, \dots, P_n Q_1 y, P_n Q_2 y) \end{cases}$$

разрешимо. Кроме того, всякое решение уравнения (3.5) *имеет вид*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \left(\Phi_{ij}^{o} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Phi_{ij}^{k}\right); \ \alpha_k \in \mathbf{C},$$

где $\Phi^0 = (\Phi_{11}^o, \Phi_{12}^o, \dots, \Phi_{n1}^o, \Phi_{n2}^o)$ *— некоторое определённое решение уравнения* (3,12); *а* $\{\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^m\}$ *— фундаментальная система решений однородного уравнения* (3.12).

Замечание 3. 1. Некоторые частные случаи уравнения (3. 5.) где $b_{jk}(t) = 0$ ($j = 1,2,\dots, n$; $k = 0,1,\dots, s$) и $a_{jk}(t)$ — периодические функции и их абстрактные модели были рассмотрены в работах [4] — [5] другими подходами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, М. Наука, 1977.

[2] Г. С. Литвинчук, *Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом* М. Наука, 1977.

[3] Ю.Л. Далецкий и М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, М. Наука, 1970,

[4] D. Przeworska — Rolewicz. *Equations with transformed argument, an algebraic approach* Elseiser Scientific publishing company, Amsterdam, Polish Scientific publishers, Warszawa, 1979.

[5] A. Wlodarska — Dymitruk. Bull. Acad. Polon. Sci. 19 (1971) 29—35.

Поступила в редакцию 21. Ноября 1984.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF HANOI, VIETNAM