ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. II No I (1986)

SUR LA STRUCTURE DES C^*-ALGÈBRES D'UNE CLASSE DE GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES DE DIMENSION 3

HO HUU VIET

§1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Soient $\mathcal{G}_{3,2}(-\alpha)$, α réel positif, les algèbres de Lie de base $\{T, X, Y\}$ tels que $[T, X] = X$, $[T, Y] = -\alpha Y$, $[X, Y] = 0$. Soient $G_{3,2}(-\alpha)$ les groupes de Lie connexes simplement connexes correspondants.

C'est la famille unique des groupes de Lie réels résolubles de dimension 3 dont la C^*-algèbre ne peut pas encore être décrite à l'aide des K-foncteurs Ext (voir [7], § 5). En effet, on ne peut pas utiliser la méthode considérée dans [3], [7], [6], [9], en présentant $C^*(G_{3,2}(-\alpha))$ comme une extension des C^*-algèbres de type $C_0(X) \otimes \mathcal{K}$.

Nous cherchons dans cet article à la décrire comme une extension graduelle qui se compose de deux extensions de C^*-algèbres de ce type. Ensuite nous et calculons les invariants correspondant à ces extensions dans les groupes de Kasparov.

Il est facile de vérifier que toutes les C^*-algèbres $C^*(G_{3,2}(-\alpha))$ sont isomorphes entre elles. Il suffit alors de considérer le cas $G_{3,2}(-1)$.

Les résultats principaux sont les suivants:

THÉORÈME 1. *La C^*-algèbre $C^*(G_{3,2}(-1))$ peut être présentée sous la forme de l'extension graduelle suivante*

$$(\gamma_1) \qquad 0 \to C_0(\mathbf{R}^* \cup \mathbf{R}^*) \otimes \mathcal{K} \to C^*(G_{3,2}(-1)) \to A^1 \to 0,$$

$$(\gamma_2) \qquad 0 \to \mathbf{C}^4 \otimes \mathcal{K} \to A^1 \to C_0(\mathbf{R}) \to 0.$$

THÉORÈME 2. *Les extensions γ_1 et γ_2 correspondent aux éléments notés par les mêmes lettres γ_1 et γ_2 dans les groupes de Kasparov*

$$\gamma_1 \in Ext\,(A^1, C_0(\mathbf{R}^* \cup \mathbf{R}^*)) \cong Hom\,(\mathbf{Z}^3, \mathbf{Z}^4),$$
$$\gamma_2 \in Ext\,(C_0(\mathbf{R}), \mathbf{C}^4) \cong Hom\,(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^4)$$

qui sont injectifs et l'image de chaque γ_i admet un sous-groupe supplémentaire libre.

§ 2. DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES

On peut vérifier que $G_{3,2}(-1)$ est de la forme

$$G_{3,2}(-1) = \{(t, x, y),\ t, x, y \in \mathbb{R}\}$$

où le produit est donné par la formule

$$(t, x, y)(t', x', y') = (t + t', x + e^t x', y + e^{-t} y')$$

2.1. LEMME. *A équivalence près, chaque représentation unitaire irréductible de $G_{3,2}(-1)$ est une des représentations deux-à-deux nonéquivalentes suivantes:*

a) Représentations de dimension 1 U_α paramétrizées par $\alpha \in \mathbb{R}$

$$U_\alpha(t, x, y) = e^{i\alpha t}.$$

b) Représentations de dimension infinie $S_\pm$, $T_\pm$ dans l'espace hilbertien $H = L_2(\mathbb{R}, ds)$

$$(S_\pm(t, x, y)f)(s) = exp(\pm ie^{-s}y) f(s + t),$$

$$(T_\pm(t, x, y)f)(s) = exp(\pm ie^{s}x) f(s + t).$$

c) Représentations de dimension infinie $T_{\beta\pm}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, paramétrizées donc par quatre demi-droites, dans l'espace hilbertien $H = L_2(\ ,ds)$

$$T_{\beta\pm}(t, x, y)f)(s) = exp(i\beta e^{-s} y \pm ie^{s} x) f(s + t).$$

Ce lemme est bien connu: il peut être prouvé en utilisant l'induction de Mackey du sous-groupe $\{(t, x, 0);\ t, x \in \mathbb{R}\}$ ou du sous-groupe $\{(t, 0, y);\ t, y \in \mathbb{R}\}$.

2.2. LEMME. *Le spectre X de $C^*(G_{3,2}(-1))$ identifié avec le dual de $G_{3,2}(-1)$ peut être présenté sous la forme d'une réunion $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ où*

$X_1 = \{T_{\beta\pm},\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0\}$ *est ouvert, partout dense dans X et homéomorphe à $\mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^*$;*

$X_2 = \{T_\pm,\ S_\pm\}$ *est ouvert, discret, partout dense dans $X \setminus X_1$;*

$X_3 = \{U_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ *est fermé dans X et homéomorphe à $\mathbb{R}$.*

La démonstration est déduite des propriétés des représentations induites d'un sous-groupe invariant (voir [5]).

2.3. LEMME. *Soit $I = \bigcap_{\pi \in X_2 \cup X_3} Ker\ \pi$ et soit F l'application de I dans* Map $(\mathbb{R}^* \vee \mathbb{R}^*;\ B(H))$ *définie par la formule:*

$$F(\varphi)(\beta_\pm) = T_{\beta_\pm}(\varphi);\ \varphi \in I,\ \beta_\pm \in \mathbb{R}^* \vee \mathbb{R}^*.$$

Alors I est liminaire *et F est un isomorphisme de C^*-algèbres*

$$I \cong C_0(\mathbb{R}^* \vee \mathbb{R}^*, \mathcal{K}) \cong C_0(\mathbb{R}^* \vee \mathbb{R}^*) \otimes \mathcal{K}.$$

Démonstration.

1. I est un idéal bilatère fermé d'une C^*-algèbre postliminaire, donc est I postliminaire. De plus, $\widehat{I} = X_1$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^* \vee \mathbb{R}^*$ (Lemme 2.2), alors d'après ([2], 4.7.15) I est liminaire.

2. Comme l'algèbre des fonctions à support compact est dense dans $C^*(G_{3,2}(-1))$, il suffit de démontrer la continuité de $F(\varphi)$ pour φ à support compact.

On considère

$$\| F(\varphi)(\beta_\pm) - F(\varphi)(\beta'_\pm) \|_{L_2} = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \| (F(\varphi)(\beta_\pm) - F(\varphi)(\beta'_\pm)) f \|_{L_2} =$$

$$= \sup_{\|f\| \leqslant 1} \| (T_{\beta_\pm}(\varphi) - T_{\beta'_\pm}(\varphi)) f \|_{L_2} ,$$

$$\| (T_{\beta_\pm}(\varphi) - T_{\beta'_\pm}(\varphi)) f \|^2_{L_2} = \int_{\mathbf{R}} | (T_{\beta_\pm}(\varphi) - T_{\beta'_\pm}(\varphi)) f |^2 ds =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \Big| \iiint_{\text{supp}\,\varphi} (e^{i\beta e^{-s} y \pm i e^{s} x} \varphi(t, x, y) - e^{i\beta' e^{-s} y \pm i e^{s} x} \varphi(t, x, y))\, f(t+s)\, dt dx dy \Big|^2 ds$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \Big| \int_{\text{proj}_t(\text{supp}\,\varphi)} \widehat{\varphi}_{xy}(t, \pm e^{s}, \beta e^{-s}) - \widehat{\varphi}_{xy}(t, \pm e^{s}, \beta' e^{-s})\, f(t+s)\, dt \Big|^2 ds$$

où $\widehat{\varphi}_{x,y}$ est la transformée de Fourier de φ relativement aux variables x,y; $\text{proj}_t(\text{supp}\,\varphi)$ est la projection de Supp φ sur $\mathbf{R}_t$.

Il est bien connu que $\widehat{\varphi}_{x,y}$ est continue et tend vers zéro à l'infini. Donc, d'après la propriété de la convergence uniforme sur compacts, on peut, pour chaque $\varepsilon > 0$, choisir N assez grand pour qu'on ait pour tout $t \in \text{proj}_t(\text{supp}\,\varphi)$ et $s \in \mathbf{R}$, $|s| \geqslant N$

$$\left| \widehat{\varphi}_{xy}(t, \pm e^{s}, \beta e^{-s}) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \widehat{\varphi}_{xy}(t, \pm e^{s}, \beta' e^{-s}) \right| < \varepsilon.$$

D'autre part, pour tout $t \in \text{proj}_t(\text{supp}\,\varphi)$ et $-N \leqslant s \leqslant N$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|\beta_\pm - \beta'_\pm| < \delta$ on ait

$$\left| \widehat{\varphi}_{xy}(t, \pm e^{s}, \beta e^{-s}) - \widehat{\varphi}_{xy}(t, \pm e^{s}, \beta' e^{-s}) \right| < \varepsilon.$$

Alors pour $|\beta_\pm - \beta'_\pm| < \delta$ on a

$$\| (T_{\beta_\pm}(\varphi) - T_{\beta'_\pm}(\varphi)) f \|^2_{L_2} = \int_{|s| \geqslant N} |\cdot|^2\, ds + \int_{-N}^{N} |\cdot|^2\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \int_{|s| \geqslant N} \int_{\text{proj}_t(\text{supp}(\varphi)} |f(t+s)|^2\, dt ds + \varepsilon \int_{-N}^{N} \int_{\text{proj}_t(\text{supp}\,\varphi)} |f(t+s)|^2\, dt ds \leqslant$$

$$\leqslant 3\varepsilon \int_{\text{proj}_t(\text{supp}\,\varphi)} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^2\, ds = 3C\varepsilon \|f\|^2,$$

$$\text{où } C = \int_{\text{proj}_t(\text{supp}\,\varphi)} dt.$$

Donc $\| T_{\beta_\pm}(\varphi) - T_{\beta'_\pm}(\varphi) \| \to 0$ lorsque $|\beta_\pm - \beta'_\pm| \to 0$.

3. À cause de ([2], 3. 3. 7), $F(\varphi)(\beta_\pm)$ end vers zéro à l'infini de $\mathbf{R}^* \cup \mathbf{R}^*$.

4. Comme $\widehat{I}$ est partout dense dans le spectre de $C^*(G_{3,2}(-1))$, F est injective. De plus, d'après ([2], 10. 5. 3 et 4. 2. 5), $F(I) \cong C_0(\mathbf{R}^* \cup \mathbf{R}^*, \mathcal{K})$.
Donc $I \cong C_0(\mathbf{R}^* \cup \mathbf{R}^*, \mathcal{K}) \cong C_0(\mathbf{R}^* \cup \mathbf{R}^*) \otimes \mathcal{K}$.

2. 4. *Démonstration du Théorème 1.*

On désigne $A^1 = C^*(G_{3,2}(-1))/I$.

D'après le lemme précédent on a l'extension

$$(\gamma_1)\ 0 \to C_0(\mathbf{R}^* \cup \mathbf{R}^*) \otimes \mathcal{K} \to C^*(G_{3,2}(-1)) \to A^1 \to 0.$$

Soit J l'idéal bilatère fermé de A^1 défini par la formule $I = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathbf{R}} \operatorname{Ker} U_\alpha$.

Alors $\widehat{J} = \{S_\pm, T_\pm\}$ est discret et donc, $J \cong \mathbf{C}^4 \otimes \mathcal{K}$. D'autre part,

$$(A^1/\widehat{J}) = \{U_\alpha, \alpha \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}, \text{ donc } A^1/J \cong C_0(\mathbf{R}).$$

On obtient ainsi l'extension

$$(\gamma_2) \qquad 0 \to \mathbf{C}^4 \otimes \mathcal{K} \to A^1 \to C_0(\mathbf{R}) \to 0.$$

2. 5. *Démonstration du Théorème 2.*

1. Pour calculer γ_2, considérons l'extension associée à (γ_2)

$$0 \to \mathbf{C}^4 \otimes \mathcal{K} \to A^{1+} \to C(S^1) \to 0.$$

Suivant la technique employée dans [3] ou [7], on considère la fonction $h^+ = 1 - 2h_1(x)h_2(y)\chi_{[0,\infty)}(t)e^{-t}$ telle que

$$\widehat{h}_1(\pm e^s) = \int_{\mathbf{R}} e^{\pm i e^s x} h_1(x)\,dx = \chi_{[0,\infty)}(-s),$$

$$\widehat{h}_2(\pm e^{-s}) = \int_{\mathbf{R}} e^{\pm i e^{-s} y} h_2(y)\,dy = \chi_{[0,\infty)}(s).$$

On a

$$U_\alpha(h^+) = \int_{G_{3,2}(-1)} e^{i\alpha t} h^+(t,x,y)\,dt\,dx\,dy =$$

$$= 1 - 2\int_0^\infty \exp((i\alpha - 1)t)dt = 1 - \frac{2}{i\alpha - 1} = \frac{i\alpha + 1}{i\alpha - 1}.$$

Alors la fonction h^+ déterminée par $h^+(\alpha) = U_\alpha(h^+)$ est un générateur de $\pi^1(\mathbf{R} \cup \{0\}) \cong \pi^1(S^1) \simeq \mathbf{Z}$, donc de $K^{-1}(S^1) \simeq \mathbf{Z}$. D'après ([4], 4.14) on a

$$\operatorname{Ext}(C_0(\mathbf{R}), \mathbf{C}^4) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(K^{-1}(S^1), K_0(\mathbf{C}^4)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^4).$$

Donc on peut calculer $\gamma_2(h^+)$ par la formule

$$\gamma_2(h^+) = (\text{Index } S_+(h^+), \text{Index } S_-(h^+), \text{Index } T_+(h^+), \text{Index } T_-(h^+))$$

D'après la définition

$$\text{Index } S_\pm(h^+) = \dim \text{Ker } S_\pm(h^+) - \dim \text{Ker } S_\pm(h^+)^*.$$

Compte tenu la définition de h^+ on a

$$f \in \text{Ker } S_\pm(h^+) \Leftrightarrow f(s) = 2\chi_{[0,\infty]}(s) \int_0^\infty e^{-t} f(s+t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(s) = 2\int_0^\infty e^{s-T} f(T)\,dT, & s \geqslant 0 \\ f(s) = 0 & s < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(s)\,e^{-s} = 2\int_s^\infty e^{-T} f(T)\,dT, & s \geqslant 0 \\ f(s) = 0, & s < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{ds}(f(s)e^{-s}) = -2f(s)e^{-s} & s \geqslant 0 \\ f(s) = 0, & s < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(s) = Ce^{-s}, & s \geqslant 0 \\ f(s) = 0, & s < 0. \end{cases}$$

Donc $\dim \text{Ker } S_\pm(h^+) = 1$.

D'autre part, on a

$$f \in \text{Ker } S_\pm(h^+)^* \Leftrightarrow f(s) = \int_0^\infty e^{-t} f(s-t)\,\chi_{[0,\infty]}(s-t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow f(s) = 2\int_{-\infty}^0 e^{T-t} f(T)\,dT \Leftrightarrow f(s)\,e^s = 2\int_{-\infty}^s e^T f(T)\,dT$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}(f(s)e^s) = 2f(s)e^s \Leftrightarrow f(s) = Ce^s \Leftrightarrow f(s) = 0.$$

Donc $\text{Ker } S_\pm(h^+)^* = 0$ d'où $\text{Index } S_\pm(h^+) = 1$.

D'une manière tout-à-fait analogue, on a $\text{Index } T_\pm(h^+) = -1$.

2. Considérons la suite exacte cyclique de K-groupes associée à (γ_2)

$$0 \to K_1(A^1) \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\delta_1} \mathbf{Z}^4 \to K_0(A^1) \to 0.$$

Dans ce cas $\delta_1 = \gamma_2$ est injectif donc $K_1(A^1) = 0$, $K_0(A^1) \simeq \mathbf{Z}^3$.

D'autre part, d'après ([1], V, Corol.7) $K_0(C^*(G_{3,2}(-1))) \simeq 0$, $K_1(C^*(G_{3,2}(-1))) \simeq Z$, alors la suite exacte cyclique de K-groupes associée à (γ_1) est de la forme

$$0 \to \mathbf{Z}^3 \xrightarrow{\delta_0} \mathbf{Z}^4 \to \mathbf{Z}^1 \to 0.$$

Dans ce cas l'invariant γ_1 est justement δ_0. Il est donc injectif et l'image $\gamma_1(\mathbf{Z}^3)$ admet un sous-groupe supplémentaire libre.

Remarque. L'idée de décrire les C^*-algèbres en utilisant des extensions graduelles a été proposée dans [4] mais la méthode de construction des extensions graduelles employée dans l'article mentioné n'est pas efficace pour le cas de $C^*(G_{3,2}(-1))$. L'auteur remercie M. Do Ngoc Diep pour ses utiles conseils.

RÉFÉRENCES

[1] A. Connes, *An analogue of the Thom isomorphism for cross products of a C^*-algebra by an action of* $\mathbf{R}$, Advances in Math., 39 (1981), 31—55.

[2] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations,* Paris, Gauthier - Villars, 1969.

[3] D. N. Diep, *Structure of the group C^*-algebra of the group of affine transformations of a straight line,* Funkcional Anal. i Prilozen. 9 (1975), n°1, 63—64 (in Russian).

[4] D. N. Diep, *On the structure of type I C^* - algebras,* Vestnik Moskov. Univ. ser. I Mat. Meh (1978), n°2, 81—87 (in Russian).

[5] J. M. G. Fell., *Weak containment and induced representations of groups*, Canad. J. Math., 14 (1962), 237—268.

[6] G. G. Kasparov, *The K-functor in the theory of extensions of C^*-algebras,* Funkcional. Anal. i Prilozen. 13(1979), n°4, 73—74 (in Russian).

[7] J. Rosenberg, *The C^*-algebras of some real and p-adic solvable groups,* Pacific J. Math., 65 (1976), 175—192.

[8] J. Rosenberg, *Homological invariants of extensions of C^*-algebras,* Proc. Symp. Pure Math., Vol. 38 (1982), AMS Providence, R. I., 1982, 35—75.

[9] V. M. Son, H. H. Viet, *Sur la structure des C^*-algèbres d'une classe de groupes de Lie,* Journal of Oper. Theory, 11 (1984), 77—90.

Manuscrit reçu le 18 avril 1985

INSTITUTE OF MATHEMATICS, P. O. BOX 631 BO HO, 10.000 HANOI VIETNAM