АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ю. А. ДУБИНСКИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье дано систематическое изложение теории п/д операторов с комплексными переменными и рассмотрены приложения этой теории к уравнениям с частными производными. Как по фактическому материалу, так и по методам исследования она является продолжением нашей обзорной статьи [9], в которой рассмотрена теория вещественных аналитических п/д операторов.

Как известно, техническим источником теории вещественных п/д операторов является классическая L_2 - теория Фурье-Планшереля, позволяющая построение теории п/д операторов в x-пространстве свести к построению алгебры их символов в пространстве двойственных переменных.

При построении теории п/д операторов с комплексными переменными (аналитических п/д операторов) подобную роль могло бы сыграть известное преобразование Бореля, однако, в отличие от вещественного преобразования Фурье, оно не определяет единственной меры в двойственном пространстве и поэтому его использование приводит к затруднениям. Кроме того, для построения полной теории комплексных п/д операторов преобразования Бореля, которое определено только на экспоненциальных функциях, недостаточно. (Например, для понимания алгебраических причин справедливости теории Коши-Ковалевской требуется понятие преобразования Фурье произвольных аналитических функций).

Все это приводит к необходимости построения теории аналитических п/д операторов без использования двойственных переменных, т.е. непосредственно в исходных переменных $z \in \mathbf{C}^n$.

Такой подход к теории п/д операторов с комплексными аргументами, осуществленный в данной работе, позволяет, как оказывается, не только получить затем различные приложения к дифференциальным и п/д уравнениям, но и построить саму теорию преобразования Фурье произвольных аналитических функций, а тем самым и комплексный метод Фурье.

Таким образом, если в теории вещественных п/д операторов первичной является теория преобразования Фурье, то в теории комплексных п/д операторов картина противоположная: вначале строится алгебра п/д операторов, а затем с ее помощью определяется преобразование Фурье аналитических функций и разрабатывается комплексный метод Фурье.

Остановимся на содержании работы более подробно. В первой главе излагается теория комплексных п/д операторов, символы которых суть произвольные аналитические функции в некоторой области Рунге Ω двойственных переменных $\zeta \in \mathbf{C}^n$. П/д оператор $A(D)$ с символом $A(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$ определяется локально (по отношению к двойственным переменным) как дифференциальный оператор бесконечного порядка в соответствии с тем, как аналитическая в области Ω функция определяется семейством своих аналитических элементов.

Решающим обстоятельством при этом является рассмотрение в качестве области определения оператора $A(D)$ пространства экспоненциальных функций $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$, ассоциированного с областью $\Omega \subset \mathbf{C}_\zeta^n$. Пространство $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_\zeta^n)$ локально определяется как индуктивный предел пространств экспоненциальных функций в процессе стремления типа этих функций к пределу, и является, таким образом, подпространством пространства $\mathscr{E}xp(\mathbf{C}_z^n)$ всех функций экспоненциального типа, «растущим» над областью Ω двойственных переменных. Именно это подпространство инвариантно относительно п/д операторов $A(D)$ с символами, аналитическими в области Ω: какова бы ни была аналитическая в Ω функция $A(\zeta)$, соответствующий ей п/д оператор $A(D)$ определяет непрерывное отображение

$$A(D):\ \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n) \to \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n).$$

Отсюда вытекает, что имеет место изоморфизм

$$\mathscr{A}(\Omega) \leftrightarrow \mathscr{O}(\Omega), \tag{0.1}$$

где $\mathscr{A}(\Omega)$ — алгебра п/д операторов с аналитическими в Ω символами и областью определения $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$, а $\mathscr{O}(\Omega)$ — алгебра аналитических в Ω функций.

Этот результат является основой всей дальнейшей теории.

Говоря о пространстве $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$, ассоциированном с областью Ω, необходимо отметить, что идея его построения весьма тесно соприкасается с классическим вопросом о связи роста функции экспоненциального типа с распределением особенностей ее преобразования Бореля. Известная теорема Пойа [47] (см. также Б.Я. Левин [16], А. Ф. Леонтьев [19] и др.) полностью описывает эту связь для выпуклой области в $\mathbf{C}^1$. В случае выпуклой области $\Omega \subset \mathbf{C}_\zeta^n$ функции $u(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$ допускают описание в терминах глобальных оценок, полученное Мартино [45], Л. Эренпрайсом [41], а само пространство $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$ является образом Бореля — Фурье компактных мер в Ω. Как образ Бореля — Фурье, это пространство исследовалось и применялось в работах Л. Хермандера [34], В. В. Напалкова [26], С. Стейнберга [49] и других авторов.

Наш подход основан на локализации области Ω и построении пространства $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$ как индуктивного предела подпространств функций экспоненциального типа.

Отметим далее, что, коль скоро пространство $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$ инвариантно относительно п/д операторов $A(D)$ с символами $A(\zeta) \in \mathscr{O}(\Omega)$, то относительно операторов $A(-D)$ является инвариантным сопряженное пространство $\mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$, которое мы называем пространством экспоненциальных функционалов, ассоциированным с областью Ω. Иначе говоря, для любого аналитического п/д оператора $A(-D)$, $A(\zeta) \in \mathscr{O}(\Omega)$, отображение

$$A(-D):\ \mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n) \to \mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$$

непрерывно и, следовательно, имеет место изоморфизм

$$\mathscr{A}'(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{O}(\Omega) \tag{0.2}$$

где $\mathscr{A}'(\Omega)$ — алгебра указанных операторов $A(-D)$ с областью определения $\mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, а $\mathcal{O}(\Omega)$ – по-прежнему алгебра аналитических в Ω функций.

При изучении экспоненциальных функционалов существенную роль играет лемма о плотности линейных комбинаций экспонент в пространстве $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$. Это позволяет полностью описать структуру экспоненциальных функционалов. Именно всякий экспоненциальный функционал $h(z) \in \mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ единственным образом представи́м в виде п/д оператора

$$h(z) = A(-D)\ \delta(z), \tag{0.3}$$

где $A(\zeta)$ — аналитическая в области Ω функция.

В свою очередь, дельта-функцию, как экспоненциальный функционал, можно записать по формуле

$$\delta(z) = (2\sqrt{\pi})^{-n}\, exp\,(-\mathscr{D}^2)\,.\, exp\left(-\frac{z^2}{4}\right), \tag{0.4}$$

где $exp\,(-z^2/4)$ — регулярный функционал.

Таким образом, из формул (0.3) и (0.4) вытекает, что всякий экспоненциальный функционал может быть представлен как значение некоторого п/д оператора с аналитическим символом от регулярного функционала.

Формулы (0.3) и (0.4) играют в дальнейшем существенную роль в теории преобразования Фурье.

Вторая глава посвящена приложениям. Прежде всего мы рассматриваем уравнения

$$A(D)u(z) = h(z), \qquad z \in \mathbf{C}^n, \tag{0.5}$$

где $A(D)$ — п/д оператор с символом, аналитическим в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$. К таким уравнениям относятся, в частности, дифференциальные уравнения бесконечного порядка, разностные и дифференциально-разностные уравнения, уравнения в свертках в $\mathbf{C}^n$ и др., которые с различных позиций изучались в трудах многих математиков. Не претендуя на полноту обзора, укажем, что глубокие результаты по аппроксимации, полноте элементарных решений, разрешимости и другим вопросам были в разные годы получены в работах А.О. Гельфонда [6], А. Ф. Леонтьева [17], [18], С. Мандельбройта [22], В. С. Владимирова [5], А. И. Маркушевича [23], В. П. Громова [7], Ю.Ф. Коробейника [15], В.В. Напалкова [26], А.А. Миролюбова и М.А. Солдатова [25], А. Садуллаева [31], Л. Эренпрайса [41], А. Мартино [45], [46], Б. Мальгранжа [44], Л. Хермандера [34], Ф. Трева [50], [51], Л. Буте-де-Монвеля [40], Р. Беллмана и К. Л. Кука [1] и многих других математиков.

В настоящей работе развит операторный метод решения уравнений (0.5) локально являющийся исчислением дифференциальных операторов бесконечного порядка. Этот метод является распространением классического метода Хевисайда [43] на случай аналитических п/д уравнений. Так, например, если наряду с $A(\zeta)$ и функция $A^{-1}(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$, то для любой правой части $h(z) \in \mathcal{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$ решение уравнения (0.5) определяется «алгебраическим путем» по формуле

$$u(z) = \frac{I}{A(D)} h(z). \tag{0.6}$$

(Отметим попутно, что формула (0.6) *aposteriori* указывает на необходимость изучения п/д операторов с символами, определенными в областях, отличных от полного пространства $\mathbf{C}^n$, ибо одновременную аналитичность функций $A(\zeta)$ и $A^{-1}(\zeta)$ во всем пространстве $\mathbf{C}^n$ следует считать исключением. Правилом же, очевидно, является наличие у функции $A^{-1}(\zeta)$ особенностей, если $A(\zeta) \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$.)

Особенно прозрачный результат дает формула (0.7) для случая квазиполинома $h(z) = e^{\lambda z} \mathcal{P}_N(z)$, где $\lambda \in \Omega$ — некоторая точка, $\mathcal{P}_N(z)$ — полином степени N. В этом случае при условии $A(\lambda) \neq 0$

$$u(z) = \frac{I}{A(D)} e^{\lambda z}\mathcal{P}_N(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha(\lambda)(D-\lambda I)^\alpha [e^{\lambda z}\mathcal{P}_N(z)] =$$

$$= e^{\lambda z} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha(\lambda) D^\alpha \mathcal{P}_N(z) = e^{\lambda z} Q_N(z),$$

т.е. решение есть также квазиполиномом. Как и в вещественном случае коэффициенты полинома $Q_N(z)$ можно найти методом подбора.

Вторым существенным приложением результатов первой главы является задача Коши для п/д уравнений с комплексными аргументами.

Как известно, задаче Коши для уравнений с частными производными посвящены многочисленные исследования, однако большинство их относится к случаю вещественных аргументов. Обзор этих работ (разумеется, далеко не полный) дан в нашей предыдущей статье [9]. (Пользуясь случаем, добавим к имеющемуся в [9] списку литературы интересные работы М. Бауэнди и К. Гулауика [38], [37], о которых недавно сообщили мне Ф. Трев и Чан Дык Ван).

Что же касается задачи Коши в комплексной области, то ее изучение началось, насколько нам известно, только в последние годы. Отметим известные нам в этом направлении работы.

На рубеже 60-х — 70-х годов после принципиальной работы Л. В. Овсянникова [27] появился цикл работ Ф. Трева и его учеников, в которых авторы, развивая метод Овсянникова, получили ряд существенных результатов по задаче Коши в комплексной области.

В работах [51], [50] и др. Ф. Трев установил локальную разрешимость задачи Коши для дифференциальных уравнений типа Ковалевской

$$\frac{\partial^m u}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, z, D) \frac{\partial^k u}{\partial w^k} = h(w, z)$$

в специальных пространствах аналитических функций и функционалов. При этом он ввел понятие гипердифференциального оператора и установил, что разрешающий оператор задачи Коши является гипердифференциальным оператором, т. е. оператором бесконечного порядка.

С. Стейнберг [49] рассмотрел задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)u, \quad u(0, z) = u_0(z), \tag{0.7}$$

где $f(\zeta)$ — аналитическая функция в области Рунге $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$. В этой работе (повидимому, впервые) предпринята попытка решить задачу (0.7) методом Фурье, поэтому нам удобно обсудить результат С. Стейнберга после изучения преобразования Фурье (см. § 3 гл. III).

К. Вагшал, Ю. Хамада и Ж. Лере [21] установили локальную разрешимость линейной аналитической задачи Коши для дифференциальных уравнений любого порядка с сингулярными начальными данными.

В недавней работе [42] Ю. Хамада, Ж. Лере и А. Такеши изучили точную область продолжимости аналитического решения линейной задачи Коши для уравнения типа Ковалевской.

Работа Ж. Лере, Л. Гординга и Т. Котаке [20] посвящена исследованию вопроса локальной униформизации решений задачи Коши для линейных уравнений с комплексными переменными в окрестности характеристических точек начального многообразия. Дальнейшее исследование (в целом) проведено в работах Б. Ю. Стернина и В. Е. Шаталова [32] и В.Е. Шаталова [36].

В настоящей работе изучена задача Коши для общего дифференциально-операторного уравнения вида

$$\frac{\partial^m \mathbf{u}}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, D)\frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial w^k} = h(w, z), \tag{0.8}$$

$$\frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial w^k}(0, z) = \varphi_k(z), \; 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{0.9}$$

где $A_k(w, D)$ — п/д операторы, символы которых $A_k(w, \zeta)$ суть произвольные аналитические функции (по ζ) в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$.

Для любых начальных функций $\varphi_k(\zeta) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ и любой правой части $h(w, z)$, аналитической по $w \in \mathbf{C}^1$ и принадлежащей пространству $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ по переменным z установлено существование единственного глобального решения $u(w,z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ (по z) и аналитического по w.

Аналогичный результат справедлив и в двойственном пространстве $\mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$.

Благодаря изоморфизму алгебр п/д операторов $\mathscr{A}(\Omega)$ и $\mathscr{A}'(\Omega)$ (см. (0.1) и (0.2)) и алгебры аналитических функций $\mathcal{O}(\Omega)$ решение задачи Коши (0.8), (0.9) записывается в виде действия некоторых «базисных» операторов, примененных к $\varphi_k(z)$ и $h(w, z)$. Например, при $h(w, z) \equiv 0$ решение $u(w, z)$ имеет вид

$$u(w, z) = \sum_{k=0}^{m-1} u_k(w, D)\;\varphi_k(z), \tag{0.10}$$

где символы $u_k(w, \zeta)$ п/д операторов $u_k(w, D)$ являются решениями задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_k^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} A_i(w, \zeta)\, u_k^{(i)} = 0, \quad u_k^{(j)}(0, \zeta) = \delta_{kj},$$

где $\zeta \in \Omega$ — параметр, $\delta_{kj} (0 \leqslant k, j \leqslant m-1)$ - символ Кронекера.

Таким образом, в рамках теории $\langle \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}_z^n), \mathscr{E}'xp_{\Omega}(\mathbf{C}_z^n) \rangle$ решение задачи Коши для уравнений в частных производных вида (0.8) столь же просто, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В § 3 второй главы мы рассматриваем задачу Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами типа Ковалевской и даем элементарное доказательство теоремы Коши — Ковалевской. Для этого достаточно заметить, что в случае Ковалевской символы $u_k(w, \zeta)$ «базисных» операторов $u_k(w, D)$ являются функциями экспоненциального типа по $\zeta \in \mathbf{C}^n$ и, следовательно, формулы (0.10) дают глобальное решение задачи Коши не только для $\varphi_k(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}_z^n)$, но и для любых начальных данных $\varphi_k(z) \in \mathcal{O}(\mathbf{C}_z^n)$. Если же функции $\varphi_k(z)$ заданы локально, то и формула (0.10) определяет решение только локально как по z, так и по w. При этом решение непрерывно зависит от начальных данных.

Легко усматривается и обратное: если задача Коши корректно разрешима (хотя бы локально) в классе всех аналитических функций, то уравнение обязано иметь тип Ковалевской. Последний результат также известен, см., например, С.Мизохата [24].

В заключение главы рассмотрена одна комплексная «двухточечная» задача.

Третья глава статьи посвящена разработке комплексного метода Фурье и, прежде всего, понятию преобразования Фурье аналитических функций.

При определении преобразования Фурье произвольной аналитической функции мы обобщаем преобразование Бореля.

Пусть $u(z)$ — аналитическая функция в области Рунге $G \subset \mathbf{C}_z^n$. Тогда в соответствии с результатами первой главы этой функции соответствует отображение

$$u(-\partial) : \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}_\zeta^n) \longrightarrow \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}_\zeta^n),$$

где $\partial \Rightarrow \partial/\partial\zeta$, $u(-\partial)$ — п/д оператор с символом $u(-z)$, аналитическим в области $G^- = \{z : -z \in G\}$ (заметим, что по сравнению с гл. I аргументы z и ζ поменялись ролями).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Преобразованием Фурье* $[F u](\zeta)$ *функции* $u(z) \in \mathcal{O}(G)$ *называется функционал*

$$[Fu](\zeta) \overset{def}{=} u(-\partial)\, \delta(\zeta),$$

где $\delta(\zeta)$ *— дельта-функция Дирака.*

Таким образом, преобразование Фурье аналитической функции есть экспоненциальный функционал. Наоборот, если $h(\zeta) \in \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}_\zeta^n)$, то существует единственная функция $u(z) \in \mathcal{O}(G)$, такая, что $h(\zeta) = [Fu](\zeta)$, при этом

$$u(z) = \langle h(\zeta), \exp z\zeta \rangle, \quad z \in G.$$

Тем самым определено взаимно-однозначное отображение

$$F : \mathcal{O}(G) \longleftrightarrow \mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta) \, . \tag{0.11}$$

Важно отметить, что если $u(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ т.е. $u(z)$ является функцией экспоненциального типа, то её преобразование Фурье является не только экспоненциальным функционалом, но и регулярным аналитическим функционалом в области $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$, причем его ядром является преобразование Бореля $Bu(\zeta)$. Следовательно, введенное преобразование Фурье является расширением преобразования Бореля, при этом

$$F : \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z) \longleftrightarrow \mathcal{O}'(\Omega) \tag{0.12}$$

есть взаимно однозначное соответствие.

Ясно, что, ввиду отмеченной связи преобразования Фурье и преобразования Бореля, последнее соответствие можно рассматривать как многомерный аналог теоремы Пойа (см. начало введения). С другой стороны, поскольку всякий аналитический функционал определяется компактной счетно-аддитивной мерой в Ω, то отображение (0.12) можно трактовать как комплексный вариант известной теоремы Пэли-Винера: преобразование Фурье аналитической функции $u(z)$ имеет определяющее множество (« носитель »), компактно содержащееся в области $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$, тогда и только тогда, когда $u(z)$ принадлежит пространству $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, ассоциированному с областью Ω.

Отметим, что в случае выпуклой области Ω последний результат (в иных терминах) принадлежит Л. Эренпрайсу [41] и А. Мартино [45], [46]. На русском языке оригинальное доказательство имеется в книге Л. Хёрмандера [34].
(При доказательстве теоремы Пэли-Винера устанавливается результат, имеющий, на наш взгляд, и определенный самостоятельный интерес: всякий аналитический функционал представим в виде конечной суммы регулярных аналитических функционалов).

Рассматриваемое преобразование Фурье аналитических функций обладает основными свойствами, присущими классическому преобразованию Фурье. В частности, оно обладает свойством « комплексной унитарности »

$$\langle \tilde{u}(\zeta) \, , v(\zeta) \rangle = \langle u(z) \, , \tilde{v}(z) \rangle \, ,$$

где $u(z) \in \mathcal{O}(G)$, $v(\zeta) \in \mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$. Вместе с тем, необходимо отметить, что (в отличие от вещественной L_2 – теории Фурье-Планшереля) теория комплексного преобразования Фурье $\tilde{u}(\zeta) \equiv u(-\partial)\delta(\zeta)$ свойством самосопряженности не обладает, поэтому комплексный метод Фурье может быть развит только на базе обоих отображений (0.11) и (0.12). Технике комплексного метода Фурье посвящен последний параграф статьи, где мы вновь получаем результаты второй главы.

Заканчивая введение, отметим, что в процессе подготовки статьи для нас были весьма полезны беседы с А. Ф. Леонтьевым и В. В. Напалковым, которым автор выражает свою благодарность.

Автор признателен также Чан Дык Вану за интерес, проявленный к результатам данной работы.

ГЛАВА I. АЛГЕБРА АНАЛИТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ (П/Д) ОПЕРАТОРОВ

Результаты данной главы являются теоретической базой второй и третьей глав, где рассмотрены приложения.

§ 1. ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$ И ЛОКАЛЬНАЯ АЛГЕБРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

В этом параграфе рассматривается основное пространство $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$ целых функций $u(z)$: $\mathbf{C}^n_z \to \mathbf{C}^1$, инвариантное относительно дифференциальных операторов бесконечного порядка, символы которых аналитичны в полицилиндре U_R. Результаты данного параграфа являются локальным элементом развиваемой в следующих параграфах теории п/д операторов с аналитическим символом.

Всюду в этом параграфе и далее рассматриваются целые функции $u(z)$: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^1$.

1. Пространство $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$. Пусть $R = (R_1, \dots, R_n)$ — n-мерный вектор с положительными компонентами $R_j \leqslant +\infty$, $j = 1, \dots, n$, и $U_R = \{\zeta \in \mathbf{C}^n : |\zeta_j| < R_j$, $j = 1, \dots, n\}$ — полицилиндр «радиуса» R.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 1. *Положим*

$$\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z) = \{u(z) : |u(z)| \leqslant \mathcal{M} \exp(r_1|z_1| + \dots + r_n|z_n|),\ z \in \mathbf{C}^n\},$$

где $\mathcal{M} > 0$ — *некоторая постоянная, а* $r = (r_1, \dots, r_n)$ — *некоторый вектор такой, что* $0 < r_j < R_j$, $j = 1, \dots, n$. *Постоянная* $\mathcal{M}$ *и вектор* r *зависят, вообще говоря, от функции* $u(z)$.

Будем для краткости неравенства $r_j < R_j$, $j = 1, \dots, n$, обозначать в виде $r < R$. Тогда пространство $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$ есть подпространство пространства целых функций экспоненциального типа, вектор-тип которых строго меньше R, т. е. $r < R$.

Пример. Всякий полином $\mathcal{P}(z)$ принадлежит, очевидно, пространству $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$, где $R > 0$ произвольно. Точно также, квазиполином $\exp \lambda z \cdot \mathcal{P}(z)$ есть функция из пространства $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$, если только $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ таково, что $|\lambda_j| < R_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Ясно, что примерами функций из $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$ могут служить тригонометрические, гиперболические и другие функции.

2. Оценка производных. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс дифференцирования,

$$D^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \partial^{|\alpha|}/\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

— оператор дифференцирования. Имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Целая функция $u(z)$ принадлежит пространству $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$ тогда и только тогда, когда существуют постоянная $\mathcal{M} > 0$ и вектор-тип $r < R$ такие, что*

$$|D^\alpha u(z)| \leqslant [\mathcal{M}\exp(r_1|z_1| + \dots + r_n|z_n|)] \cdot r^\alpha, \tag{1.1}$$

где α и точка $z \in \mathbf{C}^n$ произвольны.

Доказательство. Достаточность условий (1.1) очевидна. Докажем их необходимость. Действительно, пусть $u(z) \in \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$. Тогда по формуле Коши для любого $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\zeta_1 - z_1| = a_1} \dots \int\limits_{|\zeta_n - z_n| = a_n} \frac{u(\zeta)d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_n - z_n)}$$

и, следовательно,

$$D^\alpha u(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\zeta_1 - z_1| = a_1} \dots \int\limits_{|\zeta_n - z_n| = a_n} \frac{u(\zeta)d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{\alpha_1+1}\dots(\zeta_n - z_n)^{\alpha_n+1}} \tag{1.2}$$

Так как $u(z) \in \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$, то

$|u(\zeta)| \leqslant \mathcal{M}\exp(r_1|\zeta_1| + \dots + r_n|\zeta_n|) \leqslant \mathcal{M}\exp(r_1|z_1| + \dots + r_n|z_n|) \cdot \exp ra,$ где $\mathcal{M} > 0$ и $r < R$.

Учитывая это неравенство, из (1.2) находим, что

$$|D^\alpha u(z)| \leqslant \mathcal{M}\frac{\alpha!}{a^\alpha}\exp ra. \exp(r_1|z_1| + \dots + r_n|z_n|).$$

Минимизируя это неравенство по a (минимум достигается при $a = \alpha/r \equiv (\alpha_1/r_1, \dots, \alpha_n/r_n)$), получаем неравенство

$$|D^\alpha u(z)| \leqslant \mathcal{M}\left[\prod_{1\leqslant j\leqslant n} \alpha_j! \left(\frac{e}{\alpha_j}\right)^{\alpha_j} \exp(r_1|z_1| + \dots + r_n|z_n|)\right] r^\alpha.$$

Так как для любого натурального m по формуле Стирлинга $m!\,(e/m)^m \leqslant e\sqrt{2\pi m}$, то из последнего неравенства немедленно следует, что существует постоянная $\mathcal{M}_1 > 0$ и вектор-тип $\bar r$, $r < \bar r < R$, такие, что для всех $z \in \mathbf{C}^n$

$$|D^\alpha u(z)| \leqslant \mathcal{M}_1 \exp(\bar r_1|z_1| + \dots + \bar r_n|z_n|)\bar r^\alpha. \tag{1.3}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, приходим к неравенствам (1.1). Утверждение доказано.

Замечание 1.1. Для дальнейшего важно заметить, что в неравенстве (1.3) $\mathcal{M}_1$ и $\bar r$ зависят только от $\mathcal{M}$ и r, но не от конкретного вида функции $u(z)$.

3. Сходимость в $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$. По определению $u_\nu(z) \to u(z)$ $(\nu \to \infty)$ в пространстве $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$, если выполнены два условия:

1) Последовательность $u_\nu(z)$ сходится к $u(z)$ локально равномерно в $\mathbf{C}^n$, т. е. на любом компакте K $u_\nu(z) \to u(z)$ равномерно (как следствие со всеми производными);

2) существуют постоянные $\mathcal{M} > 0$ и вектор-тип $r < R$ такие, что

$$| u_\nu(z) | \leqslant \mathcal{M} \exp (r_1 | z_1 | + \dots + r_n | z_n |), \; z \in \mathbf{C}^n,$$

для всех $\nu = 1, 2, \dots$

Очевидно, пространство $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$ является полным линейным топологическим пространством относительно введенной сходимости.

4. Дифференциальные операторы бесконечного порядка с аналитическим символом в U_R. Пусть $A(\zeta)$–произвольная аналитическая функция в U_R. Сопоставим функции $A(\zeta)$ оператор $A(D)$, формально заменяя аргумент $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ оператором дифференцирования $D = (\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n)$. Функцию $A(\zeta)$ назовем символом оператора $A(D)$.

Как известно, аналитическая в U_R функция разлагается в ряд Тейлора, т.е.

$$A(\zeta) = \sum_{|\alpha| = 0}^{\infty} a_\alpha \zeta^\alpha, \; \zeta \in U_R, \text{ где } a_\alpha = D^\alpha A(0)/\alpha!.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Действие оператора $A(D)$ определяется формулой*

$$A(D)\, u(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| = 0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha u(z). \tag{1.4}$$

Корректность данного определения для $u(z) \in \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$ обеспечивается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $u(z) \in \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$, то функция $A(D)u(z)$ определена и также принадлежит $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$. Более того, отображение*

$$A(D) : \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z) \to \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z) \tag{1.5}$$

непрерывно.

Доказательство. Действительно, если $u(z) \in \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$, то в соответсвии с утверждением 1.1

$$| D^\alpha u(z) | \leqslant [\mathcal{M}_1 \exp(r_1 |z_1| + \dots + r_n |z_n|)] \cdot r^\alpha,$$

где $\mathcal{M}_1 > 0$ и $r < R$, и, следовательно, для любого компакта $K \subset \mathbf{C}^n_z$ имеем

$$| D^\alpha u(z) | \leqslant \mathcal{M} r^\alpha, \text{ где } \mathcal{M} = \mathcal{M}(K) \text{ — постоянная.}$$

Поскольку символ $A(\zeta)$ аналитичен в U_R, то из этой оценки немедленно вытекает абсолютная равномерная сходимость ряда (1.4) (вместе со всеми производными) на компакте K.

При этом, очевидно,

$$| A(D)u(z) | \leqslant \mathcal{M}_2 \exp (r_1 |z_1| + \dots + r_n |z_n|),$$

где

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \sum_{|\alpha| = 0}^{\infty} | a_\alpha | r^\alpha < \infty.$$

Тем самым установлено, что $A(D)u(z) \in \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$.

Докажем непрерывность отображения (1.5). Действительно, пусть $u_\nu(z) \to u(z)$ в пространстве $\mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$. Очевидно, имеем ($N$ — натуральное число)

$$| A(D)u(z) - A(D)u_\nu(z) | \leqslant | \sum_{|\alpha|=0}^{N} a_\alpha D^\alpha (u(z) - u_\nu(z)) | +$$

$$+ | \sum_{|\alpha|=N+1}^{\infty} a_\alpha D^\alpha u(z) | + | \sum_{|\alpha|=N+1} a_\alpha D^\alpha u_\nu(z) | . \qquad (1.6)$$

В силу определения сходимости в пространстве $\mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$ существуют постоянные $\mathscr{M} > 0$ и вектор-тип $r < R$, такие, что для всех $\nu = 1, 2,\ldots$

$$| u_\nu(z) | \leqslant \mathscr{M} exp\,(r_1|z_1| + \ldots + r_n|z_n|)$$

и, следовательно, в соответствии с замечанием 1.1 найдутся постоянные $\mathscr{M}$ и вектор-тип $r < R$ такие, что

1. $\mathscr{M}$ и r не зависят от $\nu = 1, 2,\ldots$
2. $$| \mathfrak{D}^\alpha u_\nu(z) | \leqslant \mathscr{M} exp(r_1|z_1| + \ldots + r_n|z_n|) \cdot r^\alpha, \qquad (1.7)$$

где $\nu = 1, 2,\ldots$; точка $z \in \mathbf{C}^n$ произвольна.

(Строго говоря, вектор-тип в неравенстве (1.7) может оказаться несколько больше, чем исходный вектор-тип r, но мы не меняем обозначений; то же самое относительно постоянной $\mathscr{M}$.)

Отсюда вытекает, что для любого компакта K последнее слагаемое в (1.6) сколь угодно мало при достаточно большом N. Это же верно и для второго слагаемого в (1.6). Остается заметить, что при любом фиксированном N

$$\sum_{|\alpha|=0}^{N} a_\alpha D^\alpha \big(u(z) - u_\nu(z)\big) \to 0 \qquad (\nu \to \infty)$$

равномерно по $z \in K$. Тем самым доказано, что $A(D)\, u_\nu(z) \to A(D)\, u(z)$ локально равномерно в $\mathbf{C}^n_z$.

Наконец, из неравенства (1.7) немедленно вытекает, что

$$|A(D)\, u_\nu(z)| \leqslant \mathscr{M}_1\, exp\,\big(r_1 | z_1 | + \ldots + r_n | z_n |\big),$$

где постоянная

$$\mathscr{M}_1 = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} | a_\alpha | \cdot r^\alpha < \infty$$

очевидно, не зависит от $\nu = 1, 2, \ldots$

Все сказанное означает, что $A(D)\, u_\nu(z) \to A(D)u(z)$ в пространстве $\mathscr{E}xp_R\big(\mathbf{C}^n_z\big)$. Теорема доказана.

5. Алгебра дифференциальных операторов бесконечного порядка в пространстве $\mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$.

Обозначим через $A(U_R)$ совокупность всех дифференциальных операторов бесконечного порядка $A(D)$, символы которых суть аналитические в полицилиндре U_R функции. В качестве области определения этих операторов примем пространство $\mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$.

Следствием результатов настоящего параграфа является следующая (основная в данном параграфе)

ТЕОРЕМА 1.2. *Множество $\mathcal{A}(U_R)$ образует алгебру операторов, изоморфную алгебре $\mathcal{O}(U_R)$ аналитических в U_R функций. При этом*

$$A(D) \longleftrightarrow A(\zeta),$$

$$\alpha A(D) \pm \beta B(D) \longleftrightarrow \alpha A(\zeta) \pm \beta B(\zeta),$$

$$A(D) \cdot B(D) \longleftrightarrow A(\zeta) \cdot B(\zeta).$$

В частности, если наряду с $A(\zeta)$ и функция $A^{-1}(\zeta) \in \mathcal{O}(U_R)$, то оператор $A^{-1}(D)$ есть обратный оператор к оператору $A(D)$.

Замечание 1.2. Пусть $R = \infty$, т.е. $U_R = \mathbf{C}^n_\zeta$. Тогда $\mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$ есть пространство $\mathscr{E}xp(\mathbf{C}^n_z)$ всех функций экспоненциального типа, а алгебра $\mathcal{A}(U_R)$ есть алгебра $\mathcal{A}(\mathbf{C}^n_\zeta)$ дифференциальных операторов бесконечного порядка с целыми символами и областью определения $\mathscr{E}xp(\mathbf{C}^n_z)$. Таким образом,

$$\mathcal{A}(\mathbf{C}^n_\zeta) \longleftrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{C}^n_\zeta),$$

где $\mathcal{O}(\mathbf{C}^n_\zeta)$ – пространство всех целых функций в $\mathbf{C}^n_\zeta$.

В заключение параграфа приведем примеры.

Пример 1. Рассмотрим оператор сдвига

$$Au : u(z) \to u(z+a),$$

где $a \in \mathbf{C}^n$ — вектор сдвига, $z \in \mathbf{C}^n$. Очевидно,

$$Au(z) \equiv u(z+a) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha u(z)}{\alpha!} a^\alpha = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{a^\alpha}{\alpha!} D^\alpha u(z)$$

есть п/д оператор с символом

$$A(\zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{a^\alpha}{\alpha!} \zeta^\alpha = \exp a\zeta.$$

Пример 2. Рассмотрим дифференциально-разностный оператор

$$Au(z) \equiv \sum_{|\beta|=0}^{m} b_\beta D^\beta u(z + a_\beta).$$

Ясно, что оператор $Au(z)$ есть п/д оператор с символом

$$A(\zeta) = \sum_{|\beta|=0}^{m} b_\beta\, \zeta^\beta \exp \zeta a_\beta.$$

Пример 3. Пусть $\mu(dw)$ – компактная (или «быстро убывающая») мера в $\mathbf{C}^n$. Рассмотрим оператор свертки

$$Au(z) = \int_{\mathbf{C}^n} u(z-w)\, \mu(dw), \qquad u(z) \in \mathcal{E}xp\,(\mathbf{C}^n_z). \tag{1.8}$$

Применяя формулу Тейлора, имеем

$$Au(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha u(z),$$

где

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbf{C}^n} (-w)^\alpha\, \mu(dw).$$

Таким образом, оператор свертки (1.8) является п/д оператором с символом

$$A(\zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \zeta^\alpha.$$

Во всех предыдущих примерах символы п/д операторов суть целые функции и, следовательно, областью определения этих операторов является пространство $\mathcal{E}xp(\mathbf{C}^n_z)$ всех целых функций экспоненциального типа.

Пример 4. Символ $A(\zeta) = (1+\zeta)^{-1}$, $\zeta \in \mathbf{C}^1$, является, очевидно, аналитической функцией в круге $U_1 = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Следовательно, оператор

$$A(D) \equiv \frac{I}{I+D}, \quad D = \frac{d}{dz}, \tag{1.9}$$

действует в пространстве $\mathcal{E}xp_R\,(\mathbf{C}^n_z)$, где $R = 1$, т. е. в пространстве экспоненциальных функций, тип которых не превосходит единицы. (Полная область определения оператора (1.9) указана в замечании к примеру 2, § 2). В этом пространстве операторы $A(D) \equiv I/(I+D)$ и $B(D) \equiv I + D$ взаимно обратны.

§ 2. АЛГЕБРА АНАЛИТИЧЕСКИХ П/Д ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$

В данном параграфе вводится пространство экспоненциальных функций $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, ассоциированное с произвольной областью $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ двойственных переменных ζ. Определяются аналитические п/д операторы $A(D)$ с символами $A(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$ и изучаются их свойства.

1. Пространство $\mathcal{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$. Пусть $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$ — произвольное открытое множество, которое будем для краткости называть в дальнейшем областью. Пусть, далее, $\lambda \in \Omega$ — некоторая точка и $R = R(\lambda)$ – вектор с положительными компонентами такой, что полицилиндр

$$U_{R,\lambda} = \{\zeta : |\zeta_j - \lambda_j| < R_j,\ j = 1,\dots, n\}$$

целиком содержится в области Ω. Будем считать, что $U_{R,\lambda}$ есть какой-либо максимальный полицилиндр с центром в точке $\lambda \in \Omega$, лежащий в области Ω.

С полицилиндром $U_{R,\lambda}$ свяжем пространство $\mathcal{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z)$ целых функций $u(z) : \mathbf{C}^n_z \to \mathbf{C}^1$, аналогичное пространству $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Положим*

$$\mathcal{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z) = e^{\lambda z}\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z),$$

т.е.

$$\mathcal{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z) = \left\{u(z) :\ u(z) = e^{\lambda z}\varphi(z),\quad \varphi(z) \in \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)\right\}$$

При этом скажем, что $u_\nu(z) \to u(z)$ в пространстве $\mathcal{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z)$, если $e^{-\lambda z}u_\nu(z) \to e^{-\lambda z}u(z)$ в пространстве $\mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$.

Пусть теперь $A(\zeta)$ — аналитическая в полицилиндре $U_{R,\lambda}$ функция, т.е.

$$A(\zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\lambda)(\zeta-\lambda)^\alpha, \qquad \zeta \in U_{R,\lambda}.$$

Действие п/д оператора $A(D)$ на функцию $u(z) \in \mathcal{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z)$ определяется формулой

$$A(D)\,u(z) \overset{def}{=} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\lambda)(D-\lambda I)^\alpha u(z). \tag{2.1}$$

Очевидно,

$$A(D)\ u(z) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\lambda)(D-\lambda I)^\alpha[e^{\lambda z}\varphi(z)] = e^{\lambda z}\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\lambda)\,D^\alpha\varphi(z),$$

$\varphi(z) \in \mathcal{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$, и, следовательно, по теореме 1.1 $A(D)\,u(z) \in \mathcal{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z)$. При этом отображение

$$A(D) : \mathcal{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z) \to \mathcal{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z)$$

непрерывно.

Обратимся теперь к общей конструкции пространства $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ и п/д оператора $A(D)$ для случая произвольной области $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$ и произвольного аналитического в Ω символа $A(\zeta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Пусть*

$$\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z) = \{u(z) \; : \; u(z) = \sum_{\lambda\in\Omega} u_\lambda(z), \qquad u_\lambda(z) \in \mathscr{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z)\},$$

при этом суммирование производится по всевозможным конечным наборам $\lambda \in \Omega$.

Сходимость в пространстве $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ определяется следующим образом. Скажем, что $u_\nu(z) \to u(z)$ $(\nu \to \infty)$ в пространстве $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, если выполнены два условия:

1) существует некоторый конечный набор значений $\lambda \in \Omega$ такой, что

$$u_\nu(z) = \sum_{\lambda\in\Omega} u_{\nu\lambda}(z), \quad u_{\nu\lambda}(z) \in \mathscr{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z);$$

2) $u_{\nu\lambda}(z) \to u_\lambda(z)$ в пространстве $\mathscr{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z)$.

2. П/д операторы с аналитическими символами.

Рассмотрим произвольную аналитическую в Ω функцию $A(\zeta)$ и сопоставим ей п/д оператор $A(D)$, действующий в пространстве $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ непрерывно. Именно, если $u(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, то положим

$$A(D)\, u(z) = \sum_{\lambda\in\Omega} A(D)\, u_\lambda(z),$$

где $A(D)\;\; u_\lambda(z)$ определено формулой (2.1), т. е.

$$A(D)\, u_\lambda(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\lambda)\; (D - \lambda I)^\alpha u_\lambda(z).$$

Очевидно, что для любой функции $u(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ ее образ $A(D)\; u(z)$ также принадлежит пространству $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, т.е.

$$A(D) : \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z) \to \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z).$$

Замечание. Может случиться, что одна и таже целая функция $u(z)$ представима различными способами в виде

$$u(z) = \sum_{\lambda\in\Omega} u_\lambda(z)\;, \quad u_\lambda(z) \in \mathscr{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z).$$

Возникает вопрос: зависит ли значение $A(D)\, u\, z)$ от вида такого представлеиня. Оказывается, что в случае области Рунге результат будет одним и тем же. Этот факт будет установлен в §4. Таким образом, определение оператора $A(D)$ корректно.

Сейчас же мы можем сделать, очевидно, след ющие выводы, являющиеся следствием только что данного определения.

ТЕОРЕМА 2. 1. *Пространство* $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ *инвариантно относительно произвольного п/д оператора с аналитическим в области* Ω *символом, т.е., если* $A(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$, *то отображение*

$$A(D) : \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z) \to \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$$

непрерывно.

ТЕОРЕМА 2.2. *Совокупность $\mathscr{A}(\Omega)$ п/д операторов с аналитическими в Ω символами и областью определения $\mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$ образует алгебру, изоморфную алгебре $\mathcal{O}(\Omega)$ аналитических в Ω функций. Этот изоморфизм определяется соответствием $A(D) \leftrightarrow A(\zeta)$. При этом*

$$A(D) \pm B(D) \leftrightarrow A(\zeta) \pm B(\zeta),$$
$$A(D) \,.\, B(D) \leftrightarrow A(\zeta) \,.\, B(\zeta).$$

В частности, если наряду с $A(\zeta)$ и функция $A^{-1}(\zeta)$ аналитична в области Ω, то оператор $I/A(D)$ является обратным оператором к оператору $A(D)$, т.е.

$$A(D) \,.\, \frac{I}{A(D)} = \frac{I}{A(D)} \,.\, A(D) = I,$$

где I тождественный оператор.

Пример 1. Пусть функция $A(\zeta)$ аналитична в окрестности точки $\zeta = \lambda$ и $u(z) = exp\,\lambda z \,.\, \mathscr{P}(z)$, где $\mathscr{P}(z)$ — полином степени m. Тогда

$$A(D)\,u(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\lambda)\,(D - \lambda I)^\alpha\,[e^{\lambda z}\,\mathscr{P}(z)] =$$

$$= e^{\lambda z} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\lambda)\,D^\alpha\,\mathscr{P}(z) \equiv e^{\lambda z}\,Q(z),$$

где $Q(z)$ — также полином степени не выше m.

Пример 2. Пусть $A(\zeta) = 1/\zeta$, $\zeta \in \Omega = \mathbf{C}^1 \setminus \mathbf{R}^1_+$. Очевидно, Ω является областью Рунге. Следовательно, пространство $\mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^1_z)$ состоит из функций вида

$$u(z) = \sum_{\lambda \neq 0} e^{\lambda z}\,\varphi_\lambda(z)$$

причем $\varphi_\lambda(z)$ — целые функции, удовлетворяющие неравенству

$$|\varphi_\lambda(z)| \leqslant \mathscr{M}_\lambda\,exp\,r\,|z|,$$

где $\mathscr{M}_\lambda > 0$, $r < d(\lambda, \mathbf{R}^1_+)$. (В главе III будет установлено, что в этом случае пространство $\mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^1_z)$ состоит из тех и только тех функций $u(z)$, преобразование Фурье которых определяется мерой, финитной в Ω.)

В соответствии с результатами данного параграфа для любой функции $u(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^1_z)$ существует единственная первообразная $w(z)$ также принадлежащая пространству $\mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^1_z)$, а именно,

$$w(z) = \frac{I}{D}\,u(z).$$

Если функция $u(z)$ есть, например, квазиполином, то первообразная $w(z)$ находится обычным интегрированием по частям, при этом надо « забывать» аддитивную постоянную интегрирования. Функцию $w(z)$ естественно назвать « натуральной первообразной » функции $u(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^1_z)$ и обозначить

$$\frac{I}{D}\,u(z) = nat\int u(z)dz.$$

Пример 3. В релятивистской квантовой механике (см. Дж. Бьеркен, С. Дрелл [3], с. 14) имеет место оператор $\sqrt{I-\Delta}$, где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$ - оператор Лапласа. Рассмотрим его обобщение на случай комплексных переменных, а именно,

$$Au(z) = \sqrt{I-\Delta}\ u(z),$$

где $\triangle^2 = D_1^2 + \ldots + D_n^2$, $D_i = \partial/\partial z_i$, $i = 1,\ldots, n$.

Функция $\sqrt{1-s^2}$, $s \in \mathbf{C}^1$, имеет две точки ветвления $s = \pm 1$. Соединив эти точки простым контуром Γ и сделав вдоль Γ разрез, выберем какую либо однозначную ветвь этой функции. Тем самым определяется однозначная функция $A(\zeta) = \sqrt{1-\zeta^2}$ аналитическая в $\mathbf{C}^n$, исключая те точки ζ, для которых $\zeta^2 \in \Gamma$.

Следовательно, п/д оператор $\sqrt{I-\Delta}$ определен и действует непрерывно в пространстве $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, где $\Omega \subset \mathbf{C}^n \setminus \{\zeta : \zeta^2 \in \Gamma\}$ — произвольная область Рунге.

§ 3. КОРРЕКТНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В этом параграфе устанавливается корректность определения п/д оператора с аналитическим символом для случая любой области Рунге. Доказательство существенно опирается на классическую формулу преобразования Бореля экспоненциальных функций.

1. Случай $n = 1$. Пусть $\Omega \subset \mathbf{C}^1$ – произвольная односвязная область на комплексной плоскости. Пусть, далее, целая функция $u(z) : \mathbf{C}^1 \to \mathbf{C}^1$ представима, с одной стороны, в виде

$$u(z) = \sum_{\lambda \in \Omega} e^{\lambda z} \varphi_\lambda(z), \tag{3.1}$$

а, с другой стороны, в виде

$$u(z) = \sum_{\mu \in \Omega} e^{\mu z} \varphi_\mu(z), \tag{3.2}$$

где $\lambda \in \Omega$ и $\mu \in \Omega$ пробегают некоторые конечные наборы значений. При этом функции $\varphi_\lambda(z)$ и $\varphi_\mu(z)$ суть целые функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|\varphi_\lambda(z)| \leqslant \mathcal{M}_\lambda exp\, r_\lambda |z|,$$
$$|\varphi_\mu(z)| \leqslant \mathcal{M}_\mu\, exp\, r_\mu |z|,$$

где $\mathcal{M}_\lambda > 0$, $\mathcal{M}_\mu > 0$ — постоянные, а числа r_λ и r_μ таковы, что $r_\lambda < R(\lambda)$, $r_\mu < R(\mu)$, где $R(\lambda)$ и $R(\mu)$ — расстояния от точек $\lambda \in \Omega$ и $\mu \in \Omega$ до границы области.

В зависимости от этих представлений и в соответствии с определением 2.1 имеем, с одной стороны,

$$A(D)\,u(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\lambda\in\Omega} \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\lambda)(D-\lambda I)^\alpha\Big)\,[e^{\lambda z}\varphi_\lambda(z)], \tag{3.3}$$

где $a_\alpha(\lambda) = \partial^\alpha A(\lambda)/\alpha!$, а с другой стороны,

$$A(D)\,u(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\lambda\in\Omega} \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(\mu)\,(D-\mu I)^\alpha\,[e^{\mu z}\varphi_\mu(z)], \tag{3.4}$$

где $a_\alpha(\mu) = \partial^\alpha A(\mu)/\alpha!$.

Наша цель — доказать, что эти значения $A(D)u(z)$ совпадают, т. е. не зависят от того, представлена функция $u(z)$ в виде (3.1) или (3.2).

Обозначим для этого через $Bu_\lambda(\zeta)$ функцию, ассоциированную по Борелю (или, что то же, преобразование Бореля) с функцией $u_\lambda(z) \equiv exp\,\lambda z\,.\,\varphi_\lambda(z)$. Как известно (см., например, [18], [30] и др.) функция $Bu_\lambda(\zeta)$ аналитична вне круга

$$U_\lambda = \{\zeta \in \mathbf{C}^1 : |\,\zeta - \lambda\,| < r_\lambda\},$$

при этом по формуле обращения

$$u_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} Bu_\lambda(\zeta)\; e^{z\zeta}\,d\zeta,$$

где Γ_λ — какой-либо кусочно-гладкий контур, охватывающий круг U_λ. То же самое можно сказать и по отношению к функции $u_\mu(z)$. Следовательно, функция $u(z)$, как это вытекает из представлений (3.1), (3.2), может быть выражена либо формулой

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda\in\Omega}\int_{\Gamma_\lambda} Bu_\lambda(\zeta)\; e^{z\zeta}\,d\zeta\,,$$

либо формулой

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu\in\Omega}\int_{\Gamma_\mu} Bu_\mu(\zeta)\,e^{z\zeta}\,d\zeta\,.$$

В согласии с формулами (3.3), (3.4) имеем в первом случае

$$A(D)\,u(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda\in\Omega}\int_{\Gamma_\lambda} A(\zeta)\,Bu_\lambda(\zeta)\; e^{z\zeta}\,d\zeta, \tag{3.5}$$

а во втором случае

$$A(D)\,u(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu\in\Omega}\int_{\Gamma_\mu} A(\zeta)\,Bu_\mu(z)\,e^{z\zeta}\,d\zeta. \tag{3.6}$$

Заметим теперь, что как объединение кругов U_λ $(\lambda\in\Omega)$, так и объединение кругов U_μ $(\mu\in\Omega)$ относительно компактны в Ω. Значит, существует контур Γ, целиком лежащий в области Ω и содержащий внутри себя эти объединения. Отсюда следует, что формулы (3.5), (3.6) могут быть записаны в виде

$$A(D)\, u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} A(\zeta) \sum_{\lambda\in\Omega} Bu_{\lambda}(\zeta)\, e^{z\zeta}\, d\zeta$$

и

$$A(D)u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} A(\zeta) \sum_{\mu\in\Omega} Bu_{\mu}(\zeta)\, e^{z\zeta}\, d\zeta$$

(напоминаем, что $A(\zeta)$ — аналитическая функция в Ω).

Но в силу представлений (3.1) и (3.2) и свойства линейности преобразования Бореля

$$\sum_{\lambda\in\Omega} Bu_{\lambda}(\zeta) = \sum_{\mu\in\Omega} Bu_{\mu}(\zeta) = Bu(\zeta),$$

где $Bu(\zeta)$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией $u(z)$. Таким образом, в обоих случаях

$$A(D)u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} A(\zeta, Bu(\zeta))\, e^{z\zeta}\, d\zeta,$$

что и доказывает корректность определения оператора $A(D)$ для случая $n=1$.

2. Случай $n > 1$. Допустим, что область $\Omega \subset \mathbf{C}^n_{\zeta}$, $n > 1$, является областью Рунге. Это значит, что в смысле локально-равномерной сходимости любая аналитическая в области Ω функция момет быть сколь угодно точно аппроксимирована полиномами или, что эквивалентно, линейными комбинациями экспонент.

Пусть, как и ранее, функция $u(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$ наряду с представлением

$$u(z) = \sum_{\lambda\in\Omega} e^{\lambda z} \varphi_{\lambda}(z) \tag{3.7}$$

записана в виде

$$u(z) = \sum_{\mu\in\Omega} e^{\mu z} \varphi_{\mu}(z), \tag{3.8}$$

где $\lambda \in \Omega$ и $\mu \in \Omega$ пробегают конечные множества значений, а функции $\varphi_{\lambda}(z)$ и $\varphi_{\mu}(z)$ суть функции, принадлежащие пространствам $\mathscr{E}xp_{R}(\mathbf{C}^n_z)$, где $R = R(\lambda)$ — радиус-вектор максимального полицилиндра с центром в точке λ, целиком содержащегося в области Ω (аналогично для точек $\mu \in \Omega$).

Для доказательства корректности определения $A(D)\,u(z)$ воспользуемся многомерным обобщением формулы обращения Бореля (см., например, книгу Л.И. Ронкина [30] и имеющуюся там библиографию). Именно, если $u(z)$ — целая функция экспоненциального типа и

$$u(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} u_{\alpha} z^{\alpha}, \qquad z \in \mathbf{C}^n,$$

то ассоциированная с ней функция $Bu(\zeta)$ определяется рядом

$$Bu(\zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\alpha!\, u_{\alpha}}{\zeta^{\alpha+1}},$$

где $\alpha+1=(\alpha_1+1,\ldots,\alpha_n+1)$. Если $r_1,\ldots,r_n$ — типы роста функции $u(z)$ по переменным $z_1,\ldots,z_n$, то функция $Bu(\zeta)$ заведомо аналитична при $|\zeta_j|>r_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ и формула обращения имеет вид

$$u(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma} Bu(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta,$$

где Γ — остов полицилиндра $U=\{\zeta:|\zeta_j|<r_j+\varepsilon,\ \varepsilon>0\ (1\leqslant j\leqslant n)\}$, $d\zeta=d\zeta_1\ldots d\zeta_n$.

В соответствии с этой формулой и представлением (3.7)

$$u(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\lambda\in\Omega}\int\limits_{\Gamma_\lambda}Bu_\lambda(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta,\qquad z\in\mathbf{C}^n, \tag{3.9}$$

где $Bu_\lambda(\zeta)$ — функция, ассоциированная с функцией $u_\lambda(z)=\exp\lambda z\cdot\varphi_\lambda(z)$, а Γ_λ — остов полицилиндра $U_\lambda=\{\zeta:|\zeta_j-\lambda_j|<r_j+\varepsilon,\ \varepsilon>0\ (1\leqslant j\leqslant n)\}$. При этом число $\varepsilon>0$ можно взять столь малым, чтобы все полицилиндры U_λ содержались строго внутри Ω.

Отсюда, учитывая определение оператора $A(D)u(z)$ получим, что

$$A(D)u(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\lambda\in\Omega}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha(\lambda)(D-\lambda I)^\alpha\int\limits_{\Gamma_\lambda}Bu_\lambda(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\lambda\in\Omega}\int\limits_{\Gamma_\lambda}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha(\lambda)(\zeta-\lambda)^\alpha Bu_\lambda(\zeta)e^{z\zeta}\right)d\zeta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\lambda\in\Omega}\int\limits_{\Gamma_\lambda}Bu_\lambda(\zeta)A(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta. \tag{3.10}$$

Совершенно аналогично для представления (3.8) получим формулы

$$u(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\mu\in\Omega}\int\limits_{\Gamma_\mu}Bu_\mu(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta. \tag{3.11}$$

и

$$A(D)u(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\mu\in\Omega}\int\limits_{\Gamma_\mu}Bu_\mu(\zeta)A(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta \tag{3.12}$$

(обозначения ясны).

Нетрудно, в заключение, видеть, что значения $A(D)u(z)$, определяемые формулами (3.10) и (3.12) совпадают. Действительно, рассмотрим аналитические функционалы

$$L(v)\overset{def}{=}\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\lambda\in\Omega}\int\limits_{\Gamma_\lambda}Bu_\lambda(\zeta)v(\zeta)d\zeta$$

и

$$\mathcal{M}(v) \overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\mu\in\Omega} \int_{\Gamma_\mu} Bu_\mu(\zeta)\, v\,(\zeta) d\zeta,$$

где $v(\zeta) \in \mathcal{O}\,(\Omega)$ — произвольная функция.

Формулы (3.9) и (3.11) означают, что для любого $z \in \mathbf{C}^n$ имеет место равенство $L(e^{z\zeta}) = \mathcal{M}(e^{z\zeta})$, откуда следует, что функционалы $L\,(v)$ и $\mathcal{M}(v)$ совпадают на множестве всевозможных линейных комбинаций экспонент. Но поскольку Ω—область Рунге (см. начало доказательства), то $L\,(v) = \mathcal{M}(v)$ для любой функции $v \in \mathcal{O}\,(\Omega)$. В частности, полагая $v(\zeta) = A(\zeta)\, e^{z\zeta}$, получаем равенство

$$L\ [A(\zeta)\, e^{z\zeta}] = \mathcal{M}\ [A(\zeta)\, e^{z\zeta}],$$

которое в силу формул (3.10) (3.12) и означает, что определение $A(D)\, u(z)$ не зависит от вида представления функции $u(z)$. Это и требовалось.

Замечание. Отметим, что в наших работах [13], [14] область Ω также должна быть областью Рунге.

§ 4. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

В этом параграфе изучается пространство экспоненциальных функционалов, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов над основным пространством $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$. Устанавливается общий вид экспоненциальных функционалов. Описана алгебра аналитических п/д операторов в пространстве $\mathcal{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$.

1. Определение. Примеры. Пусть $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ — основное пространство, введеное в § 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Экспоненциальным функционалом называется линейное непрерывное отображение*

$$u : \mathcal{E}xp_\Omega\,(\mathbf{C}^n_z) \longrightarrow \mathbf{C}^1\ .$$

Пространство всех экспоненциальных функционалов будем обозначать, как обычно, через $\mathcal{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, *а значение функционала* $u = u(z)$ *на основной функции* $\varphi(z) \in \mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ *через* $\langle u(z), \varphi(z)\rangle$.

Не останавливаясь на стандартных свойствах пространства $\mathcal{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, как сопряженного пространства к пространству $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, отметим принципиальное свойство инвариантности пространства $\mathcal{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ относительно произвольного п/д оператора $A(D)$, символ которого $A(\zeta)$ аналитичен в области Ω^-, где $\Omega^- = \{\zeta : -\zeta \in \Omega\}$.

Именно, если $A(z) \in \mathcal{O}(\Omega^-)$ и $u(z) \in \mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, то и $A(D)u(z) \in \mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$; при этом

$$\langle A(D)\, u(z),\ \varphi(z)\rangle \overset{def}{=} \langle u(z),\ A(-D)\,\varphi(z)\rangle,$$

где $\varphi(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, $-D = (-D_1, \ldots, -D_n)$.

Это свойство является, очевидно, следствием аналогичного свойства основного пространства $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$.

Пример 1. Дельта-функция Дирака $\delta(z)$, действующая по формуле $\langle\delta(z), \varphi(z)\rangle = \varphi(0)$, $\varphi(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, есть, очевидно, экспоненциальный функционал, при этом область $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$ произвольна.

Пример 2. Пусть $A(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$ — произвольная функция. Тогда $u(z) = A(-D)\,\delta(z)$ есть экспоненциальный функционал, действующий по формуле

$$\langle u(z), \varphi(z)\rangle \equiv \langle A(-D)\,\delta(z), \varphi(z)\rangle = A(D)\,\varphi(0).$$

Пример 3. Пусть $u(z) : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^1$ — целая функция, быстро убывающая при $|x| \to \infty$. Более точно, пусть для любых $y \in \mathbf{R}^n$ и любых $\delta > 0$

$$u(x + iy)\exp\delta|x| \to 0 \quad (|x| \to \infty).$$

Тогда функция $u(z)$ определяет регулярный экспоненциальный функционал, действующий по формуле

$$\langle u(z), \varphi(z)\rangle \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} u(x + iy)\,\varphi(x + iy)\,dx_1 \ldots dx_n. \tag{4.1}$$

Данное определение корректно, ибо в силу быстрого убывания $u(z)$ при $|x| \to \infty$ и теоремы Коши правая часть последней формулы не зависит от $y \in \mathbf{R}^n$. Тем самым регулярный экспоненциальный функционал $u(z)$ можно отождествить с его вещественным сужением $u(x)$, являющимся функционалом над соответствующим пространством $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{R}^n)$ вещественных целых функций $\varphi(x)$, допускающих продолжение $u(z) \equiv u(x + iy) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$.

Таким образом, наряду с (4.1) можно положить

$$\langle u(z), \varphi(z)\rangle \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,\varphi(x)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Аналогично определяются регулярные экспоненциальные функционалы по отношению к произвольным «контурам», в частности, по отношению к чисто мнимому подпространству $i\mathbb{R}^n$.

Пример 4. Пусть $u_o(z)$ – регулярный функционал, определенный в примере 3, и $A(\zeta)$ – аналитическая функция в области Ω. Тогда $u(z) = A(-D)\,u_o(z)$ есть экспоненциальный функционал, действующий по формуле

$$\langle A(-D)\,u_o(z), \varphi(z)\rangle \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{R^n} u_o(x)\,A(\ \ )\,\varphi(x)\,dx. \tag{4.2}$$

Замечание. В следующем пункте будет доказано, что примером 2 (равно как и примером 4) исчерпываются все экспоненциальные функционалы. Именно, всякий элемент $u(z) \in \mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ представим как в виде $u(z) = A(-D)\,\delta(z)$, так и в виде $u(z) = B(-D)\,u_o(z)$, где $A(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$, $B(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$ и $u_o(z)$ – регулярный функционал.

2. **Общий вид экспоненциальных функционалов.** Вначале займемся представлением экспоненциальных функционалов в виде п/д оператора, примененного к дельта-функции $\delta(z)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $u(z) \in \mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$. Тогда существует единственная функция $A(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$ такая, что*

$$u(z) = A(-D)\,\delta(z),$$

где $A(-D)$ – п/д оператор с символом $A(-\zeta)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы потребуется

ЛЕММА 4.1. *Линейные комбинации экспонент $\exp z\zeta$, $\zeta \in \Omega$, $z \in \mathbf{C}^n$, плотны в пространстве $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$.*

Доказательство леммы будет дано в конце параграфа, а сейчас докажем теорему. Рассмотрим для этого функцию

$$A(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \langle u(z), \exp z\zeta\rangle, \ \zeta \in \Omega.$$

Очевидно, $A(\zeta)$ — аналитическая функция в области Ω, следовательно, ей отвечает п/д оператор $A(-D)$, действующий в пространстве $\mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ непрерывно.

Поскольку для любого $\zeta \in \Omega$

$$(\zeta - \lambda)^\alpha = (-1)^{|\alpha|}\,\langle (D + \lambda I)^\alpha\,\delta(z), \exp z\zeta\rangle, \ |\alpha| = 0, 1, \ldots,$$

то, учитывая определение 2.2 п/д оператора с аналитическим символом, имеем

$$\langle u(z), \exp z\zeta\rangle = \langle A(-D)\,\sigma(z), \exp z\zeta\rangle, \ \zeta \in \Omega. \tag{4.3}$$

Последнее соотношение показывает, что на множестве линейных комбинаций экспонент $\exp z\zeta$, $\zeta \in \Omega$, имеет место равенство

$$u(z) = A(-D)\,\delta(z).$$

В силу леммы и свойства инвариантности пространства $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ относительно п/д операторов с аналитическим в Ω символом (§ 2, теорема 2.1) отсюда вытекает, что равенство (4.3) справедливо для любой основной функции $\varphi(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, т.е.

$$u(z) = A(-D)\,\delta(z) \tag{4.4}$$

в пространстве $\mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$. Тем самым искомое представление найдено.

Установим единственность формулы (4.4). Действительно, если, наряду с (4.4), имеет место представление

$$u(z) = B(-D)\,\delta(z),$$

то для любых $\zeta \in \Omega$

$$\langle u(z), \exp z\zeta \rangle = \langle A(-D)\,\delta(z), \exp z\zeta \rangle = A(\zeta),$$

$$\langle u(z), \exp z\zeta \rangle = \langle B(-D)\,\delta(z), \exp z\zeta \rangle = B(\zeta),$$

т.е. $A(\zeta) \equiv B(\zeta)$ в области Ω. Это означает, что операторы $A(-D)$ и $B(-D)$, как операторы в пространстве $\mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ совпадают. Единственность, а вместе с ней и теорема полностью доказаны.

Обратимся теперь к представлению экспоненциальных функционалов посредством п/д операторов от регулярного функционала. Такое представление является по-существу следствием только что доказанной теоремы.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $u(z) \in \mathscr{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, Тогда существует регулярный экспоненциальный функционал $u_0(z)$ и аналитическая в Ω функция $B(\zeta)$ такие, что*

$$u(z) = B(D)\,u_0(z).$$

Доказательство. Прямой подсчет показывает, что дельта-функция $\delta(z)$, как экспоненциальный функционал (т.е. как функционал над $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$), представима в виде

$$\delta(z) = (2\sqrt{\pi})^{-n} \exp(-D^2).\exp(-z^2/4),$$

где $\exp(-z^2/4)$ — регулярный функционал, определяемый этой функцией и семейством вещественных контуров $(-\infty, \infty)$ по каждой переменной.
(Данное представление $\delta(z)$ есть значение при $t = 1$ решения уравнения обратной теплопроводности с начальным условием $(2\sqrt{\pi})^{-n} \exp(-z^2/4)$.) Учитывая эту формулу и теорему 4.1, получаем, что $u(z) = B(-D)\,u_0(z)$, где $B(-D) \equiv A(-D)$. $\exp(-D^2)$, а $u_0(z) = (2\sqrt{\pi})^{-n} \exp(-z^2/4)$ — регулярный функционал. Теорема доказана.

3. Алгебра аналитических п/д операторов в пространстве экспоненциальных функционалов.

Как было установлено в § 2, алгебра $\mathscr{A}(\Omega)$ п/д операторов с аналитическими в области Ω символами и областью определения $\mathscr{E}xp_\Omega\left(\mathbf{C}^n_z\right)$ изоморфна алгебре $\mathcal{O}(\Omega)$, т.е. алгебре аналитических в области Ω функций. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к алгебре п/д операторов, действующих в пространстве экспоненциальных функционалов. Именно, обозначим через $\mathscr{A}'(\Omega^-)$ совокупность п/д операторов с аналитическими в области Ω^- символами и областью определения $\mathscr{E}'xp_\Omega\left(\mathbf{C}^n_z\right)$. Тогда в качестве следствия теоремы об изоморфизме

$$\mathscr{A}(\Omega) \longleftrightarrow \mathcal{O}(\Omega)$$

получаем следующий результат,

ТЕОРЕМА 4.3. *Имеет место изоморфизм*

$$\mathcal{A}'(\Omega^-) \longleftrightarrow \mathcal{O}'(\Omega^-).$$

Пример 1. Как уже отмечалось п/д оператор I/D в пространстве $\mathcal{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$, $\Omega = \mathbf{C}^1_\zeta \setminus \{\mathbf{R}^1_+\}$, является интегрированием. Следовательно, функционал $[I/D]\,\delta(z)$ естественно принять в качестве функции комплексного аргумента типа единичного скачка в нуле. Эта функция играет полезную роль в формализме преобразования Фурье функций, разлагающихся в ряд Лорана, поэтому введем для нее специальное обозначение

$$n(z) \equiv nat \int \delta(z)dz \equiv \frac{I}{D}\delta(z).$$

Функция $n(z)$ является, очевидно, функционалом над пространством $\mathcal{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^1_z)$, где $\Omega = \mathbf{C}^1_\zeta \setminus \{\mathbf{R}^1_+\}$.

Следующие примеры понадобятся при изучении задачи Коши в § 2 гл.II.

Пример 2. Рассмотрим функционал

$$\mathcal{E}(w, z) = \frac{e^{aw\frac{d}{dz}} - e^{-aw\frac{d}{dz}}}{\frac{d}{dz}}\,\delta(z),\ z \in \mathbf{C}^1,$$

где $a \in \mathbf{C}^1$, $w = t + i\tau$ — комплексные параметры, причем $|a| = 1$.

Поскольку функция $sh\zeta/\zeta$ является целой функцией, то $\mathcal{E}(w, z)$ есть функционал над пространством $\mathcal{E}xp(\mathbf{C}^1_z)$ всех целых функций экспоненциального типа. Если же $\mathcal{E}(w, z)$ рассматривать как функционал над пространством $\mathcal{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^1_z)$, где $\Omega = \mathbf{C}^1_\zeta \setminus \{0\}$, то в соответствии с примером 1 имеем

$$\mathcal{E}(w, z) = n(z + aw) - n(z - aw).$$

Пример 3. Рассмотрим функционал

$$\mathcal{E}(w, z) = \exp\left(aw\frac{d^2}{dz^2}\right)\delta(z),$$

действующий на произвольную функцию $\varphi(z) \in \mathcal{E}xp\,(\mathbf{C}^1_z)$ по формуле

$$\langle \mathcal{E}(w, z), \varphi(z)\rangle = \langle \delta(z),\ \exp\left(aw\frac{d^2}{dz^2}\right)\varphi(z)\rangle. \tag{4.5}$$

Покажем, что при $w \neq 0$

$$\exp\left(aw\frac{d^2}{dz^2}\right)\varphi(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a w}}\int_{-\sqrt{aw_0}\,\infty}^{\sqrt{aw_0}\,\infty} e^{-\frac{s^2}{4aw}}\varphi(z - s)ds,$$

где $w_0 = w/|w|$ — орт по направлению w, а интегрирование проводится по прямой $(-\sqrt{aw_0}\,\infty, \sqrt{aw_0}\,\infty)$, проходящей через точки $\pm\sqrt{aw_0}$ комплексной плоскости s.

Действительно, в предыдущей работе [9], с.109, эта формула была получена для вещественных $w = t$ и $z = x$. Учитывая, что для любой аналитической функции $D_z\varphi(z) \equiv D_x\varphi(x+iy)$, немедленно получаем

$$e^{aw\frac{d^2}{dz^2}}\varphi(z) \equiv e^{aw\frac{d^2}{dx^2}}\varphi(x+iy) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi aw}}\int\limits_{-\sqrt{aw_0}\infty}^{\sqrt{aw_0}\infty} e^{-\frac{s^2}{4aw}}\varphi(x-s+iy)\,ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi aw}}\int\limits_{-\sqrt{aw_0}\infty}^{\sqrt{aw_0}\infty} e^{-\frac{s^2}{4aw}}\varphi(s)\,ds,$$

что и требуется.

Теперь из формулы (4.5) находим, что

$$\langle \mathscr{E}(w,z), \varphi(z)\rangle = \langle \delta(z), \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi aw}}\int\limits_{-\sqrt{aw_0}\infty}^{\sqrt{aw_0}\infty} e^{-\frac{s^2}{4aw}}\varphi(z-s)\,ds\ \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi aw}}\int\limits_{-\sqrt{aw_0}\infty}^{\sqrt{aw_0}\infty} e^{-\frac{s^2}{4aw}}\varphi(-s)\,ds.$$

Таким образом, $\mathscr{E}(w, z)$ есть регулярный функционал, определяемый функцией $\exp(-s^2/4aw)$ и контуром $(-\sqrt{aw_0}\infty, \sqrt{aw_0}\infty)$. В частности, полагая $w = 1$, получаем отсюда формулу

$$\delta(z) = (2\sqrt{\pi})^{-1}\exp(-aD^2).\exp(-z^2/4a),$$

которая дает представление дельта-функции в виде дифференциального оператора бесконечного порядка от регулярного функционала.

Совершенно аналогично выводится многомерная формула

$$\delta(z) = (2\sqrt{\pi})^{-n}(a_1\ldots a_n)^{-1/2}\ exp\ (-a_1D_1^2 - \ldots - a_nD_n^2).$$

$$.\,exp\left(-\frac{z_1^2}{4a_1} - \ldots - \frac{z_n^2}{4a_n}\right).$$

(Частный случай этой формулы был использован в доказательстве теоремы 4.2).

4. *Доказательство леммы*. Нам осталось доказать лемму о плотности линейных комбинаций экспонент $exp\,\zeta z$, $\zeta\in\Omega$, в пространстве $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$. Прежде всего заметим, что функция $u(z) \in \mathscr{E}xp\,(\mathbf{C}_z^n)$, как всякая целая функция, может быть аппроксимирована линейными комбинациями экспонент в смысле локально равномерной сходимости в $\mathbf{C}_z^n$, т. е. равномерной сходимости на компактах. Действительно, для любой целой функции ее ряд Тейлора сходится в $\mathbf{C}_z^n$ локально равномерно. Далее, для любого мультииндекса α

$$z^\alpha = D_\zeta^\alpha e^{\zeta z}\Big|_{\zeta=0}$$

и, следовательно, любой моном z^α может быть локально равномерно аппроксимирован конечно-разностным отношением, соответствующим производной $D_\zeta^\alpha e^{\zeta z}$ и, которое, очевидно, является линейной комбинацией экспонент. Отсюда немедленно вытекает, что и сама функция $u(z)$ аппроксимируется линейными комбинациями экспонент.

Покажем, что эта схема рассуждений приводит к последовательности линейных комбинаций экспонент

$$u_N(z) = C_{1N}e^{\zeta_{1N}z} + \ldots + C_{NN}e^{\zeta_{NN}z}$$

таких, что $\zeta_{iN} \in \Omega$ $(1 \leqslant i \leqslant N,\ N = 1, 2\ldots)$ и $u_N(z) \to u(z)$ в топологии пространства $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$.

Для этого докажем два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ *1. Если функция* $\varphi(z) \in \mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$, *то ее ряд Тейлора* ***сходится в*** *топологии* $\mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$.

Доказательство. Действительно, из известных формул, определяющих гиперповерхность сопряженных типов $r_1,\ldots, r_n$ целой функции экспоненциального типа (см. для $n = 1$ Маркушевич А. И. [23]; для $n > 1$ Ронкин Л.И. [30]) вытекает, что гиперповерхность сопряженных типов $r_1^*,\ldots, r_n^*$ функции

$$\varphi^*(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |\varphi_\alpha|\, z^\alpha$$

та же самая, что и у функции

$$\varphi(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \varphi_\alpha z^\alpha, \qquad \varphi_\alpha = \mathscr{D}^\alpha\varphi\,(0)/\alpha\,!. \tag{4.6}$$

Тем самым существует вектор-тип $r^* < R$ и постоянная $\mathscr{M} > 0$ такие, что

$$|\varphi^*(z)| \leqslant \mathscr{M}\, exp\,(r_1^*|z_1| + \ldots + r_n^*|z_n|)$$

для всех $z \in \mathbf{C}^n$. Отсюда следует, что для любого $N = 1, 2,\ldots$ частичные суммы $S_N(z)$ ряда (4.6) удовлетворяют оценке

$$|S_N(z)| = |\sum_{|\alpha|\leqslant N} \varphi_\alpha z^\alpha| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant N} |\varphi_\alpha|\,|z_1|^{\alpha_1}\ldots|z_n|^{\alpha_n} \leqslant$$

$$\leqslant \mathscr{M}\, exp\,(r_1^*|z_1| + \ldots + r_n^*|z_n|),$$

что (в соответствии с определением сдодимости в $\mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_z)$) и требовалось.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть* $\Delta^\alpha f(0,z)|\zeta^\alpha$ $(\zeta \in \mathbf{R}^n)$ — *конечно-разностное отношение (по* ζ*) порядка* α *для функции* $f(\zeta, z) = exp\,\zeta z$. *Тогда при* $\zeta \to 0$

$$\Delta^\alpha f(0, z)\,|\zeta^\alpha \to z^\alpha$$

локально равномерно в $\mathbf{C}^n_z$.

Доказательство. Действительно, в соответствии с известными результатами по оценке погрешности формул численного дифференцирования имеем

$$z^{\alpha} - \frac{\Delta^{\alpha} f(0,z)}{\zeta^{\alpha}} \equiv D_{\zeta}^{\alpha} f(0,z) - \frac{\Delta^{\alpha} f(0,z)}{\zeta^{\alpha}} = D_{\zeta}^{\alpha+1} f(\xi_{\alpha}, z), \tag{4.7}$$

где $\alpha + 1 = (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_n + 1)$, $\xi_{\alpha} = (\xi_{1\alpha}, \ldots, \xi_{n\alpha})$ — некоторая средняя точка т.е. $\xi_{1\alpha} \in (0, \alpha_1\zeta_1), \ldots, \xi_{n\alpha} \in (0, \alpha_n\zeta_n)$. Следовательно, для функции $f(\zeta, z) \equiv \equiv exp\, \zeta z$, получаем неравенство

$$\left| z^{\alpha} - \frac{\Delta^{\alpha} f(0,z)}{\zeta^{\alpha}} \right| \leqslant \prod_{0 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i \, |\zeta_i| \cdot |z_i|^{\alpha_i + 1} exp\,(\alpha_i |\zeta_i| \cdot |z_i|), \tag{4.8}$$

откуда ясно, что при $\zeta \to 0$ $\Delta^{\alpha} f(0,z)/\zeta^{\alpha} \to z^{\alpha}$ локально равномерно в $\mathbf{C}_z^n$. Утверждение доказано.

Завершим теперь доказательство леммы.

Пусть $u(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}_z^n)$. По определению пространства $\mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}_z^n)$ это значит, что

$$u(z) = \sum_{\lambda \in \Omega} e^{\lambda z} \varphi_{\lambda}(z),$$

где $\lambda \in \Omega$ пробегают конечный набор значений, а функции $\varphi_{\lambda}(z) \in \mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n)$. Ясно поэтому, что утверждение леммы достаточно доказать для каждого слагаемого $e^{\lambda z}\varphi_{\lambda}(z)$ в отдельности. Для этого заметим, что в соответствии с Утверждениями 1, 2 существует последовательность $\zeta = \zeta_N \to 0$ $(N \to \infty)$, такая, что последовательность линейных комбинаций экспонент (обозначения ясны)

$$\Lambda_{N,\lambda}(z) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant N} \varphi_{\lambda\alpha} \frac{\Delta^{\alpha} f(0,z)}{\zeta_N^{\alpha}}$$

сходится к функции $\varphi_{\lambda}(z)$ локально равномерно в $\mathbf{C}_z^n$.

Покажем теперь, что найдутся число $\mathscr{M} > 0$ и вектор-тип $r < R$ такие, что

$$|\Lambda_{N,\lambda}(z)| \leqslant \mathscr{M} exp\,(r_1|z_1| + \ldots + r_n|z_n|), \quad z \in \mathbf{C}^n.$$

Действительно, ввиду формулы (4.7) и неравенства (4.8) имеем

$$|\Lambda_{N,\lambda}(z)| \leqslant |S_N(z)| + \sum_{|\alpha| \leqslant N} |\varphi_{\lambda\alpha}| \left[\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i |\zeta_i| \cdot |z_i|^{\alpha_i + 1} \right] \cdot$$
$$exp\,(\alpha_1 |\zeta_1| \cdot |z_1| + \ldots \alpha_n |\zeta_n| \cdot |z_n|).$$

Отсюда, вновь используя тот факт, что гиперповерхности сопряженных типов у функции $\varphi_{\lambda}(z)$ и функции

$$\varphi_{\lambda}^{*}(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |\varphi_{\lambda\alpha}| \cdot z^{\alpha}$$

одинаковы получаем, что для любого $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, $\varepsilon_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и любого $z \in \mathbf{C}^n$

$$| \Lambda_{N, \lambda}(z) | \leqslant \mathscr{M} \{ exp(r_1|z_1| + ... + r_n|z_n|) + $$
$$+ exp[(r_1 + \varepsilon_1)|z_1| + ... + (r_n + \varepsilon_n)|z_n|]\},$$

если только величины $\zeta = \zeta_N$ достаточно близки к нулю. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно и $r < R$, то это и означает справедливость неравенства

$$|\Lambda_{N, \lambda}(z)| \leqslant \mathscr{M} exp(r_1^* |z_1| + ... + r_n^* |z_n|),$$

где $\mathscr{M} > 0$ и $r_j^* < R_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Остается заметить, что у функции $e^{\lambda z}\Lambda_{N, \lambda}(z)$ все показатели при экспонентах имеют вид $\lambda + \beta\zeta_N$, где $|\beta| < N$, и, следовательно, ζ_N могут быть выбраны так, что $\lambda + \beta\zeta_N \in \Omega$. Таким образом, при $N \to \infty$

$$e^{\lambda z}\Lambda_{N, \lambda}(z) \to e^{\lambda z}\varphi_\lambda(z)$$

в топологии пространства $\mathscr{E}xp_{R, \lambda}(\mathbf{C}_z^n)$. Лемма доказана полностью.

ГЛАВА II. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД

Как уже отмечалось во введении, в данной главе разработан операторный мето (типа метода Хевисайда) решения п/д уравнений с аналитическими символами.

§1. П/Д УРАВНЕНИЯ В ПОЛНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Изучается уравнение

$$A(D)\, u(z) = h(z),\ z \in \mathbf{C}^n, \tag{1.1}$$

где $A(D)$ — п/д оператор с символом $A(\zeta)$.

ТЕОРЕМА *1.1. Пусть в некоторой области Рунге* $\Omega \subset \mathbf{C}_\zeta^n$ *функции* $A(\zeta)$ *и* $A^{-1}(\zeta)$ *аналитичны. Тогда для любой функции* $h(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$ *существует единственное решение уравнения* (1.1) $u(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}_z^n)$ *и это решение определяется формулой*

$$u(z) = \frac{1}{A(D)}\, h(z). \tag{1.2}$$

Совершенно аналогично формулируется и двойственный результат.

ТЕОРЕМА *1.2. В условиях предыдущей теоремы для любой правой части* $h(z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}_z^n)$, *где* $\Omega^- = \{\zeta : -\zeta \in \Omega\}$ *существует единственное решение* $u(z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}_z^n)$ *уравнения (1.1) и это решение определяется формулой (1.2).*

Доказательство обеих теорем очевидно, ибо в пространствах $\mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$ и $\mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$ оператор $I/A(D)$ является обратным оператором к оператору $A(D)$ (см. §. 3 гл.I).

Приведем примеры иллюстрирующие данные результаты.

Пример 1 (Метод подбора квазиполиноминальных решений). Рассмотрим уравнение (1.1) с квазиполиноминальной правой частью, т.е.

$$A(D)\,u(z) = \exp\lambda z . \mathscr{P}(z), \tag{1.3}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}^n$, $\mathscr{P}(z)$ — полином. Очевидно, $\exp\lambda z . \mathscr{P}(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$, где в качестве области Ω можно взять любую окрестность точки $\lambda \in \mathbf{C}^n$. Следовательно, если $A(\lambda) \neq 0$, то решение (1.3) определяется формулой (обозначения ясны)

$$u(z) = \frac{I}{A(D)}\,[\exp\lambda z . \mathscr{P}(z)] = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_{\alpha}(\lambda)\,(D - \lambda\, I)^{\alpha}\,[\exp\lambda z . \mathscr{P}(z)] =$$

$$= \exp\lambda z \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_{\alpha}(\lambda) D^{\alpha}\mathscr{P}(z) = \exp\lambda z . \mathscr{Q}(z),$$

где $\mathscr{Q}(z)$ — полином степени, не превосходящей степени $\mathscr{P}(z)$.

Таким образом, в случае квазиполиномиальной правой части $h(z)$ уравнение (1.1) имеет единственное квазиполиномиальное решение. Ясно, что коэффициенты полинома $\mathscr{Q}(z)$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов аналогично тому, как это имеет место в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 2. Рассмотрим вопрос о существовании фундаментального решения комплексного п/д оператора $A(D)$, т.е. вопрос о разрешимости уравнения

$$A(D)\,\mathscr{E}(z) = \delta(z),\ z \in \mathbf{C}^n.$$

Допустим что функции $A(\zeta)$ и $A^{-1}(\zeta)$ аналитичны в некоторой области Ω. Тогда, очевидно, $\delta(z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$ и, следовательно, фундаментальное решение существует как элемент $\mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$ и определяется формулой

$$\mathscr{E}(z) = \frac{I}{A(D)}\,\delta(z).$$

В частности, если символ $A(\zeta)$ — полином, то указанная область Ω всегда существует и, следовательно, любой дифференциальный оператор обладает фундаментальным решением.

Пример 3. Рассмотрим комплексное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \omega^2 u = h(z),\ z \in \mathbf{C}^n, \tag{1.4}$$

где
$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial z_n^2}$$

— комплексный оператор Лапласа, $\omega^2 \in \mathbf{C}^1$ — параметр.

Символ оператора $\Delta+\omega^2 I$ есть, очевидно, целая функция $A(\zeta)=\zeta^2+\omega^2$, а функция $A^{-1}(\zeta)$ аналитична в области $\Omega=\mathbf{C}^n_\zeta\setminus\{\zeta:\zeta^2+\omega^2=0\}$. Следовательно, для любой функции $h(z)\in\mathcal{E}xp_{\Omega_0}(\mathbf{C}^n_z)$ (или $\mathcal{E}xp_{\Omega_0}^-(\mathbf{C}^n_z)$), где $\Omega_0\subset\Omega$ – произвольная область Рунге, уравнение Гельмгольца (1.4) имеет единственное решение из того же пространства. При этом

$$u(z)=\frac{I}{\Delta+\omega^2 I}\,h(z).$$

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$u(z+a)+u(z-a)=h(z),\ z\in\mathbf{C}^1, \tag{1.5}$$

где $a\in\mathbf{C}^1$ — комплексный сдвиг.

Уравнение (1.5) можно записать в виде

$$\left[\exp\left(a\frac{d}{dz}\right)+\exp\left(-a\frac{d}{dz}\right)\right]u(z)=h(z)$$

или, что то же

$$2\,ch\left(a\frac{d}{dz}\right)u(z)=h(z).$$

Символ оператора $ch\,(a\,d/dz)$ есть целая функция $ch\,a\zeta$, обращающаяся в нуль в точках $ia\zeta=\pi/2+k\pi$, $k=0,\pm1,\dots$ Следовательно, полагая $\Omega\subset\mathbf{C}^1\setminus\{\zeta:\zeta=\pi/2\,ia+k\,\pi/ia\}$ получаем, что для любой функции $h(z)\in\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^1_z)$ (или $h(z)\in\mathcal{E}xp_\Omega^-(\mathbf{C}^1_z)$) уравнение (1.5) имеет единственное решение

$$u(z)=\frac{1}{2}\operatorname{sech}\left(\frac{d}{dz}\right)h(z).$$

Отметим, что если целая функция $h(z)$ имеет тип, не превосходящий $\pi/|a|$, то используя известное разложение функции $\operatorname{sech}\zeta$ в окрестности нуля, получаем, что

$$u(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}E_{2n}}{(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}h(z),$$

где E_{2n} – числа Эйлера ($E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5,\dots$, см. справочник [52], стр.40).

В частности, для любого полинома $\mathcal{P}(z)$ существует единственное полиномиальное решение

$$u(z)=\frac{1}{2}\operatorname{sech}\left(a\frac{d}{dz}\right)\mathcal{P}(z),$$

причем той же степени, что и $\mathcal{P}(z)$.

§2. ЗАДАЧА КОШИ В КЛАССЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛОВ

В этом параграфе установлена корректность задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений общего вида в пространстве экспоненциальных функций и экспоненциальных функционалов.

1. Разрешимость задачи Коши в пространстве экспоненциальных функций. В пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ комплексных переменных $w \in \mathbf{C}^1, z \in \mathbf{C}^n$ изучается задача Коши

$$\frac{\partial^m u}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, D) \frac{\partial^k u}{\partial w^k} = h(w, z), \tag{2.1}$$

$$u(0, z) = \varphi_0(z), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial w^{m-1}}(0, z) = \varphi_{m-1}(z), \tag{2.2}$$

где $A_k(w, D)$ — п/д операторы, символы которых $A_k(w, \zeta)$ суть аналитические функции переменных $w \in \mathbf{C}^1$ и $\zeta \in \Omega \subset \mathbf{C}^n$. Область $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ произвольная область Рунге.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть функция $h(w, z)$ аналитична при $w \in \mathbf{C}^1$ и $z \in \mathbf{C}^n$, причем $h(w, z) \in \mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ при каждом фиксированном w. Пусть, далее $\varphi_j(z) \in \mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение $u(w, z)$ задачи* (2.1), (2.2), *аналитическое по w и принадлежащее по z пространству $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ при каждом фиксированном $w \in \mathbf{C}^1$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что имеет место комплексный аналог принципа Дюамеля. Именно, пусть $U(w, s, z)$ — решение задачи

$$L\left(\frac{\partial}{\partial w}, D\right) U \equiv \frac{\partial^m U}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_K(w, D) \frac{\partial^k U}{\partial w^k} = 0,$$

$$\frac{\partial^k U}{\partial w^k}(0, s, z) = 0 \ (0 \leqslant k \leqslant m-2), \quad \frac{\partial^{m-1} U}{\partial w^{m-1}}(0, s, z) = h(s, z),$$

где $s \in \mathbf{C}^1$ произвольно. Тогда, как показывает простой подсчет, решение задачи

$$L\left(\frac{\partial}{\partial w}, D\right) u(w, z) = h(w, z), \qquad \frac{\partial^k u}{\partial w^k}(0, z) = 0 \ (0 \leqslant k \leqslant m-1)$$

определяется формулой

$$u(w, z) = \int_0^w U(w - s, s, z)\, ds.$$

Таким образом, можно считать, что $h(w, z) \equiv 0$.

Итак, ищется решение задачи

$$L\left(\frac{\partial}{\partial w}, D\right) u = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial w^k}(0, z) = \varphi_k(z) \quad (0 \leqslant k \leqslant m-1), \tag{2.4}$$

где $\varphi_k(z) \in \mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$. С этой целью положим формально $D \leftrightarrow \zeta$ и решим семейств задач Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$L\left(\frac{d}{dw}, \zeta\right) u_j(w, \zeta) \equiv u_j^m + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, \zeta)\, u_j^k = 0,$$

$$u_j^k(0, \zeta) = \delta_{jk} \ (0 \leqslant k, j \leqslant m-1),$$

где δ_{jk} — символ Кронекера, ζ — комплексный параметр.

Так как $A_k(w, \zeta)$ аналитически зависят от ζ в области Ω, то (классический результат об аналитической зависимости от параметра решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений) каждое решение $u_j(w, \zeta)$ есть аналитическая функция параметра ζ в области Ω. Сопоставим каждому такому «базисному» решению $u_j(w, \zeta)$ п/д оператор $u_j(w, D)$, который в соответствии с результатами § 2. гл. I действует непрерывно в пространстве $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$.

Очевидно, формула

$$u(w, \zeta) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j(w, D)\, \varphi_j(z) \tag{2.5}$$

определяет искомое решение.

Для доказательства единственности решения задачи (2.1), (2.2) достаточно заметить, что данные Коши (2.2) однозначно определяют значения производных решения

$$\partial^k u(0, z)/\partial t^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad z \in \mathbf{C}^n .$$

Значит, решение единственно. Теорема доказана.

2. Задача Коши в пространстве экспоненциальных функционалов. Как и в п. 1, изучается задача Коши

$$L\left(\frac{\partial}{\partial w}, D\right) u \equiv \frac{\partial^m u}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, D) \frac{\partial^k u}{\partial w^k} = h(w, z), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial w^k}(0, z) = \varphi_k(z), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{2.7}$$

где $A_k(w, D)$ – п/д операторы, символы которых $A_k(w, \zeta)$ аналитичны в области $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$.

ТЕОРЕМА 2.2 (двойственная теорема). *Пусть правая часть $h(w, z)$ при каждом фиксированном w является экспоненциальным функционалом, а именно, $h(w, z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$, где $\Omega^- = \{\zeta : -\zeta \in \Omega\}$, и зависит от w, как функционал, аналитически. Пусть, далее, $\varphi_k(z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Тогда существует единственное решение $u(w, z)$ задачи* (2.6), (2.7), *причем $u(w, z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$ и зависит от $w \in \mathbf{C}^1$ аналитически. При этом решение определяется формулой* (2.5).

Доказательство. Утверждение теоремы является двойственным результатом к утверждению теоремы 2.1. Поэтому, коль скоро доказана теорема 2.1, его справедливость вытекает из общих принципов двойственности. Желая максимально сохранить независимость изложения, мы приведем доказательство, характерное для дифференциально-операторных уравнений.

Как и в п. 1, достаточно рассмотреть случай $h(w, z) \equiv 0$. Таким образом, нам надо доказать, что формула

$$u(w, z) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j(w, D)\, \varphi_j(z), \quad \varphi_j(z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z), \tag{2.8}$$

определяет обобщенное решение задачи (2.6), (2.7) над основным пространством $\mathcal{E}xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$. (Напомним, что $u_j(w, D)$ суть п/д операторы, символы которых являются решениями задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $\zeta \in \Omega$

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}, \zeta\right) u_j(w,\zeta) = 0, \quad u_j^{(k)}(0, \zeta) = \delta_{jk} \ (0 \leqslant k, j \leqslant m-1),$$

где δ_{jk} — символ Кронекера).

Обозначим через $u^*(w, D) \equiv u(w, -D)$ оператор, сопряженный к п/д оператору $u(w, D)$. Легко видеть, что, если для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ функция $u(w, z) \equiv u(w, D)\varphi(z)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^m u}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, D) \frac{\partial^k u}{\partial w^k} = 0,$$

то для любой функции $v(z) \in \mathcal{E}xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$ функция $u^*(w, z) \equiv u^*(w, D)\, v(z)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^m u^*}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k^*(w, D) \frac{\partial^k u^*}{\partial w^k} = 0.$$

Следовательно, если начальные функции $\varphi_j(z) \in \mathcal{E}xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$, то для любой функции $v(z) \in \mathcal{E}xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$

$$\left\langle L\left(\frac{\partial}{\partial w}, D\right) u, v\right\rangle = \sum_{j=0}^{m-1}\Big[\langle u_j^m(w, D)\,\varphi_j(z), v(z)\rangle +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \langle A_k(w, D)\, u_j^{(k)}(w, D)\,\varphi_j(z), v(z)\rangle\Big] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\Big[\langle \varphi_j(z), \frac{\partial^m}{\partial w^m} u_j^*(w, D)\, v(z) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} A_k^*(w, D) \frac{\partial^k}{\partial w^k} u_j(w, D)\, v(z)\rangle\Big] = 0,$$

т.е. функция $u(w, z)$, определяемая формулой (2.8), есть обобщенное решение исходного уравнения (2.1).

Убедимся в том, что функция $u(w,z)$ удовлетворяет над пространством $\mathcal{E}xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$ начальным условиям (2.7). Действительно, в силу конструкции операторов $u_j(w, D)$ имеем

$$\frac{d^k}{dw^k} u_j(0, D) = \delta_{kj} I,$$

где I — тождественный оператор в пространстве $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$. Следовательно,

$$\frac{d^k}{dw^k} u_j^*(0, D) = \delta_{kj} I,$$

где I — тождественный оператор в пространстве $\mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$. Отсюда для любой функции $v(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$

$$\left\langle \frac{d^k}{dw^k} u_j(w, D)\,\varphi_j(z),\ v(z) \right\rangle\Big|_{w=0} =$$

$$= \left\langle \varphi_j(z),\ \frac{d^k}{dw^k} u_j^*(w, D)\ v(z) \right\rangle\Big|_{w=0} = \langle \varphi_j(z), \delta_{kj}\, v(z) \rangle,$$

что и приводит немедленно к равенству $u^{(k)}(0, z) = \varphi_k(z)$ в пространстве $\mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$.

Осталось установить единственность найденного решения. Для этого заметим, что в соответствии с результатами § 4 гл. I всякий элемент $u(z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$ однозначно представим в виде

$$u(z) = U(D)\,\delta(z),$$

где $U(\zeta) = \langle u(z), exp\,\zeta z \rangle$ — аналитическая в области Ω функция. Таким образом, если $u(w, z)$ — обобщенное решение задачи Коши (2.6), (2.7), то его можно представить в виде

$$u(w, z) = U(w, D)\,\delta(z), \tag{2.9}$$

при этом функция $U(w, \zeta)$, $w \in \mathbf{C}^1$, $\zeta \in \Omega$, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U^{(m)}(w, \zeta) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, \zeta)\, U^k(w, \zeta) = H(w, \zeta), \tag{2.10}$$

$$U^k(0, \zeta) = \Phi_k(\zeta),\ 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{2.11}$$

где $H(w, \zeta)$ и $\Phi_k(\zeta)$ — символы представлений (2.9) для функционалов $h(w, \zeta)$ и $\varphi_k(\zeta)$. Следовательно, функция $U(w, \zeta)$, как решение задачи (2.10), (2.11), однозначно определяется данными исходной задачи. Тем самым, и решение $u(w, z)$ единственно. Теорема полностью доказана.

Замечание. Доказанные теоремы о разрешимости задачи Коши, очевидно, справедливы и для случая системы уравнений любого порядка. Доказательство остается прежним.

3. *Примеры. Пример 1* (фундаментальное решение задачи Коши). По определению фундаментальным решением задачи Коши для оператора $L(\partial/\partial w, D)$ называется функция $\mathscr{E}(w, z)$, являющаяся решением задачи

$$L\left(\frac{\partial}{\partial w}, D\right) \mathscr{E}(w, z) = 0,$$

$$\mathscr{E}(0, z) = 0, \ldots, \mathscr{E}^{(m-2)}(0, z) = 0,\ \mathscr{E}^{(m-1)}(0, z) = \delta(z).$$

Поскольку для любой области $\Omega \neq \phi$, очевидно, $\delta(z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$, то из теоремы

2.2 вытекает, что для любого оператора $L(\partial/\partial w, D)$ фундаментальное решение задачи Коши существует и единственно. Оно является экспоненциальным функционалом над пространством $\mathscr{E}xp_{\Omega}\text{-}(\mathbf{C}^n_z)$.

Пример 2. Пусть $a \in \mathbf{C}^1$, $|a| = 1$. Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial w} - a\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (w \in \mathbf{C}^1,\ z \in \mathbf{C}^1),$$
$$u(0, z) = \varphi(z).$$

Решение задачи записывается в форме

$$u(w, z) = exp\left(aw\frac{d^2}{dz^2}\right)\varphi(z).$$

Если $\varphi(z)$ — произвольная функция экспоненциального типа (очевидно, в этом примере $\Omega = \mathbf{C}^1_\zeta$), то в соответствии с вычислениями, проведенными в примере 2, § 4, гл. I,

$$u(w, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a w}}\int\limits_{-\sqrt{aw_0}\,\infty}^{\sqrt{aw_0}\,\infty} e^{-\frac{s^2}{4aw}}\varphi(z-s)ds,$$

где $w_0 = w/|w|$ — орт по направлению w, а интегрирование проводится по прямой $\left(-\sqrt{aw_0}\,\infty,\ \sqrt{aw_0}\,\infty\right)$, проходящей через точки $\pm\sqrt{aw_0}$ комплексной плоскости s.

Фундаментальным решением задачи Коши для оператора

$$L\left(\frac{\partial}{\partial w},\ D\right) \equiv \frac{\partial}{\partial w} - a\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

является регулярный функционал $\mathscr{E}(w, z)$, определяемый функцией $exp\,(-z^2/4aw)$ и контуром $\left(-\sqrt{aw_0}\,\infty,\ \sqrt{aw_0}\,\infty\right)$.

Пример 3. Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\ \left(w \in \mathbf{C}^1,\ z \in \mathbf{C}^1\right),$$

$$u(0, z) = \varphi(z),\quad \frac{\partial u}{\partial w}(0, z) = \psi(z),$$

где $\varphi(z),\ \psi(z) \in \mathscr{E}xp\left(\mathbf{C}^1_z\right)$ или $\varphi(z),\ \psi(z) \in \mathscr{E}'xp\left(\mathbf{C}^1_z\right)$.

Простой подсчет в соответствии с предложенной процедурой решения задачи Коши приводит к формуле

$$u(w, z) = \frac{e^{awD} + e^{-awD}}{2}\,\varphi(z) + \frac{e^{awD} - e^{-awD}}{2aD}\,\psi(z),$$

откуда немедленно получаем комплексную формулу Даламбера

$$u(w, z) = \frac{\varphi(z + aw) + \varphi(z - aw)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{z-aw}^{z+aw}\psi(s)\,ds.$$

2.2 вытекает, что для любого оператора $L(\partial/\partial w, D)$ фундаментальное решение задачи Коши существует и единственно. Оно является экспоненциальным функционалом над пространством $\mathscr{E}xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$.

Пример 2. Пусть $a \in \mathbf{C}^1$, $|a| = 1$. Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial w} - a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (w \in \mathbf{C}^1,\ z \in \mathbf{C}^1),$$

$$u(0, z) = \varphi(z).$$

Решение задачи записывается в форме

$$u(w, z) = exp\left(aw\frac{d^2}{dz^2}\right)\varphi(z).$$

Если $\varphi(z)$ — произвольная функция экспоненциального типа (очевидно, в этом примере $\Omega = \mathbf{C}^1_\zeta$), то в соответствии с вычислениями, проведенными в примере 2, § 4, гл. I,

$$u(w, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a w}}\int_{-\sqrt{aw_0}\,\infty}^{\sqrt{aw_0}\,\infty} e^{-\frac{s^2}{4aw}}\varphi(z-s)ds,$$

где $w_0 = w/|w|$ — орт по направлению w, а интегрирование проводится по прямой $\left(-\sqrt{aw_0}\,\infty,\ \sqrt{aw_0}\,\infty\right)$, проходящей через точки $\pm\sqrt{aw_0}$ комплексной плоскости s.

Фундаментальным решением задачи Коши для оператора

$$L\left(\frac{\partial}{\partial w},\ D\right) \equiv \frac{\partial}{\partial w} - a\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

является регулярный функционал $\mathscr{E}(w, z)$, определяемый функцией $exp\ (-z^2/4aw)$ и контуром $\left(-\sqrt{aw_0}\,\infty,\ \sqrt{aw_0}\,\infty\right)$.

Пример 3. Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\ \left(w \in \mathbf{C}^1,\ z \in \mathbf{C}^1\right),$$

$$u(0, z) = \varphi(z),\quad \frac{\partial u}{\partial w}(0, z) = \psi(z),$$

где $\varphi(z),\ \psi(z) \in \mathscr{E}xp\left(\mathbf{C}^1_z\right)$ или $\varphi(z),\ \psi(z) \in \mathscr{E}'xp\left(\mathbf{C}^1_z\right)$.

Простой подсчет в соответствии с предложенной процедурой решения задачи Коши приводит к формуле

$$u(w, z) = \frac{e^{awD} + e^{-awD}}{2}\varphi(z) + \frac{e^{awD} - e^{-awD}}{2aD}\psi(z),$$

откуда немедленно получаем комплексную формулу Даламбера

$$u(w, z) = \frac{\varphi(z+aw) + \varphi(z-aw)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{z-aw}^{z+aw}\psi(s)\,ds.$$

Фундаментальное решение задачи Коши для оператора $\partial^2/\partial w^2 - a^2\partial^2/\partial z^2$ определяется формулой

$$\mathscr{E}(w, z) = \frac{e^{awD} - e^{-awD}}{2aD}\,\delta(z) = \frac{1}{2a}\,[n(z + aw) - n(z - aw)]\ ;$$

где $n(\zeta)$ — натуральная первообразная дельта-функции $\delta(\zeta)$ (см. § 4 гл.I).

Пример 4. Рассмотрим задачу Коши для уравнения со сдвигом

$$\frac{\partial u}{\partial w}(w, z) + u(w, z + a) = 0 \quad (w \in \mathbf{C}^1,\ z \in \mathbf{C}^1)$$

$$u(0, z) = \varphi(z),$$

или, что то же,

$$\frac{\partial u}{\partial w} + exp\,(aD)\,u = 0,\ u(0, z) = \varphi(z)\ .$$

Очевидно,

$$u(w, z) = \exp\{-w\exp(aD)\}\,\varphi(z),$$

где $\varphi(z) \in \mathscr{E}xp(\mathbf{C}^1_z)$ или $\varphi(z) \in \mathscr{E}'xp(\mathbf{C}^1_z)$. Отсюда

$$u(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-w)^n}{n!}\exp(naD)\,\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-w)^n}{n!}\,\varphi(z + na).$$

В частности, фундаментальным решением этой задачи является функция

$$\mathscr{E}(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-w)^n}{n!}\,\delta(z + na).$$

Пример 5. Приведем пример задачи Коши для уравнения, являющегося комплексным аналогом уравнения Шредингера релятивистски свободной частицы (см. Дж. Бьеркен, С. Дрелл [3]). Именно, рассмотрим задачу Коши

$$i\frac{\partial u}{\partial w} = \sqrt{I - \Delta}\ u, \quad w \in \mathbf{C}^1,\ z \in \mathbf{C}^1, \tag{2.12}$$

$$u(0, z) = \varphi(z), \tag{2.13}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial z_n^2}$ — комплексный оператор Лапласа.

Символ $\sqrt{1 - \zeta^2}$ оператора $\sqrt{I - \Delta}$ является строго говоря, неоднозначной функцией. Для выделения однозначной ветви рассмотрим на комплексной плоскости $s \in \mathbf{C}^1$ функцию $\sqrt{1 - s^2}$ и выделим какую-либо ее однозначную ветвь, сделав разрез плоскости s вдоль гладкого контура Γ, соединяющего точки ветвления $s = \pm 1$ этой функции. Тем самым, для всех $\zeta \in \mathbf{C}^n$ выделяется однозначная ветвь функции $\sqrt{1 - \zeta^2}$ с областью определения $\Omega = \{\zeta \in \mathbf{C}^n : \zeta^2 \notin \Gamma\}$. Пусть $\Omega_0 \subset \Omega$ — область Рунге.

Применяя общие результаты настоящего параграфа получаем, что для любых функций $\varphi(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega_o}(\mathbf{C}^n_z)$ или $\varphi(z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega_o^-}(\mathbf{C}^n_z)$ функция

$$u(w, z) = \exp\{\sqrt{I - \Delta}\, w\}\, \varphi(z)$$

есть единственное решение задачи Коши (2.12) (2.13).

§ 3. ЗАДАЧА КОШИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА КОШИ-КОВАЛЕВСКОЙ

В этом параграфе мы рассматриваем уравнения типа Ковалевской и показываем, как предыдущая техника применяется для доказательства локальной разрешимости задачи Коши в пространстве всех аналитических функций. В случае начальных данных $\varphi_j(z)$, определенных в полном пространстве $\mathbf{C}^n_z$, решение задачи существует глобально, т. е. во всем пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$ переменных $w \in \mathbf{C}^1$ и $z \in \mathbf{C}^n$.

Итак, рассматривается задача

$$L\left(\frac{\partial}{\partial w}, D\right) u \equiv \frac{\partial^m u}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(D) \frac{\partial^k u}{\partial w^k} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial w^k}(0, z) = \varphi_k(z), \; 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{3.2}$$

где $A_k(D)$ — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

Напомним прежде всего, что полином

$$L(\lambda, \zeta) \equiv \lambda^m + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(\zeta)\lambda^k \tag{3.3}$$

называется полиномом Ковалевской (по λ), если для всех значений $k = 0, 1, \ldots, m-1$ выполнено неравенство $k + m_k \leqslant m$, где m_k — степень полинома $A_k(\zeta)$.

В соответствии с этим определением уравнение (3.1) называется уравнением типа Ковалевской, если таковым является его характеристический полином (3.3)

Предположим, что начальные функции $\varphi_k(z)$ аналитичны в некоторой области $G \subset \mathbf{C}^n_z$ и будем это обозначать включением $\varphi_k(z) \in \mathcal{O}(G)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Скажем, что задача Коши* (3. 1), (3. 2) *локально разрешима в пространстве аналитических функций, если для любых начальных данных* $\varphi_k(z) \in \mathcal{O}(G)$ *и любой компактной подобласти* $G_\delta \subset G$ *найдется число* $\rho > 0$ *(зависящее, вообще говоря, от* $\varphi_k(z)$*) такое, что в «цилиндре»* $W^\rho_\delta = \{w : |w| < \rho\} \times G_\delta$ *существует единственное аналитическое решение* $u(w, z)$ *этой задачи. При этом решение* $u(w, z)$ *непрерывно зависит от функций* $\varphi_k(z)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, *т.е., если* $\varphi_{k\nu}(z) \to \varphi_k(z)$ $(\nu \to \infty)$ *в* G_δ *равномерно, то соответствующие решения* $u_\nu(w, z) \to u(w, z)$ *равномерно в* W^ρ_δ.

Наша цель – доказать, что задача Коши (3.1), (3.2) локально разрешима в ространстве аналитических функций тогда и только тогда, когда уравнение (3.1) есть равнение типа Ковалевской.

Вначале будет установлена лемма, характеризующая поведение корней полинома овалевской при $|\zeta| \to \infty$.

ЛЕММА 3.1. *Пусть* $\lambda_s = \lambda_s(\zeta)$, $0 \leqslant s \leqslant m-1$, *суть корни полинома* (λ, ζ). *Соотношение*

$$\lambda_s(\zeta) = O(|\zeta|), \quad |\zeta| \to \infty^{(*)}, \tag{3.4}$$

еет место тогда и только тогда, когда полином $L(\lambda, \zeta)$ *есть полином валевской.*

Доказательство. Необходимость очевидна, ибо коэффициенты $A_k(\zeta)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, ляются симметрическими функциями порядка $m-k$ корней $\lambda_0(\zeta), \ldots, \lambda_{m-1}(\zeta)$ и, дователььно,

$$A_k(\zeta) = O(|\zeta|^{m-k}). \tag{3.5}$$

о и означает, что полином $L(\lambda, \zeta)$ является полиномом Ковалевской.

Достаточность. Допустим противное. Это значит, что, несмотря на соотношение 5), хотя бы один корень полинома $L(\lambda, \zeta)$ не удовлетворяет условию (3.4). Иными вами, для любой постоянной $\mu > 0$ найдутся точки $\zeta \in \mathbf{C}^n$ ($|\zeta| \to \infty$ при $\mu \to \infty$) е, что при некотором s будет выполнено неравенство

$$|\lambda_s(\zeta)| > \mu |\zeta|.$$

тогда при таких ζ

$$|L(\lambda, \zeta)| = \left| \lambda_s^m(\zeta) \left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k(\zeta)}{\lambda_s^{m-k}(\zeta)} \right) \right| \geqslant$$

$$\geqslant |\lambda_s^m(\zeta)| \left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{O(|\zeta|^{m-k})}{\mu^{m-k} |\zeta|^{m-k}} \right) > 0,$$

$\mu > 0$ достаточно велико. Полученное противоречие доказывает необходимость вия (3.4), Лемма доказана.

Обратимся теперь непосредственно к вопросу локальной разрешимости и Коши.

ТЕОРЕМА 3.1. *Задача Коши* (3.1), (3.2) *локально разрешима в пространстве итических функций в том и только в том случае, если полином* $L(\lambda, \zeta)$ – *полином Ковалевской.*

(*) Напомним, что символ $O|\zeta|$ при $|\zeta| \to \infty$ означает, что при всех $\zeta \in \mathbf{C}^n$ доста- больших по модулю, справедливо неравенство $|O(|\zeta|)| \leqslant \mu |\zeta|$, где $\mu > 0$ — янная.

Доказательство. Достаточность. Пусть полином $L(\lambda, \zeta)$ есть полинном Ковалевской. Докажем, что в этом случае формула (2.5) (§ 2 настоящей главы) определяет локальное аналитическое решение. Действительно, пусть $u_j(w, \zeta)$ — семейство решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$(u_j^m) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(\zeta)\, u_j^k = 0$$

($\zeta \in \mathbf{C}^n$ — параметр) при условиях

$$u_j^{(k)}(0, \zeta) = \delta_{jk}\ (0 \leqslant k, j \leqslant m-1).$$

Из леммы 3.1 и явных формул, выражающих решение $u_j(w, \zeta)$ через корни характеристического полинома $L(\lambda, \zeta)$ вытекает, что $u_j(w, \zeta)$—целые функции экспоненциального типа, т.е.

$$|u_j(w, \zeta)| \leqslant \mathcal{M}_j\ exp\,(r_{1j}\,|\zeta_1| + \ldots + r_{nj}\,|\zeta_n|)\,|w|,$$

где $\mathcal{M}_j > 0$, $r_{1j} > 0, \ldots, r_{nj} > 0$ — некоторые постоянные.

Следовательно, коэффициенты Тейлора $u_{j\alpha}$ функций $u_j(w, \zeta)$ в разложении

$$u_j(w, \zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} u_{j\alpha}(w)\zeta^\alpha$$

удовлетворяют неравенствам (см. п. 2, § 1, гл. I)

$$|u_{j\alpha}| \leqslant \widetilde{\mathcal{M}}_j\ \alpha!\ |w|^{|\alpha|}\,\widetilde{r}_j^{\,\alpha}, \tag{3.6}$$

где $\widetilde{\mathcal{M}}_j > 0$ - постоянная, $\widetilde{r}_j = (\widetilde{r}_{1j}, \ldots, \widetilde{r}_{nj})$, причем, вообще говоря, $r_{1j} < \widetilde{r}_{1j}, \ldots, r_{nj} < \widetilde{r}_{nj}$.

С другой стороны, т.к. начальные функции $\varphi_j(z)$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ аналитичны в области G, то какова бы ни была компактная подобласть $G_\delta \subset G$, найдутся постоянная $\mathcal{M}_\delta > 0$ и вектор $R_\delta = (R_{1\delta}, \ldots, R_{n\delta})$ с положительными компонентами такие, что для всех $z \in G_\delta$ справедливо неравенство

$$|D^\alpha \varphi_j(z)| \leqslant \mathcal{M}_\delta\ R_\delta^\alpha\ \alpha!.$$

Следовательно, для все $\in G_\delta$

$$\left|u_j(w, D)\ \varphi_j(z)\right| = \left|\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} u_{j\alpha}(w)\ D^\alpha\varphi_j(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |u_{j\alpha}(w)|\cdot|D^\alpha\varphi_j(z)| \leqslant \mathcal{M}_\delta\ \widetilde{\mathcal{M}}_j \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |w|^{|r|}\ R_\delta^\alpha < \infty,$$

если $|w| < \rho$, где $\rho = \rho(\delta) > 0$ достаточно мало. Таким образом, ряды $u_j(w, D)\ \varphi_j(z)$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ сходятся равномерно в цилиндре $W_\delta^\rho = \{\,|w| < \rho\} \times G_\delta$ и тем самым формула

$$u(w, z) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j(w, D)\ \varphi_j(z)$$

определяет искомое аналитическое решение. Ясно при этом (см. доказательство теоремы 1. 1, гл. I), что решение непрерывно зависит от начальных данных. Это и требовалось.

Необходимость. Пусть задача Коши (3.1), (3.2) локально разрешима в классе всех аналитических функций. Покажем, что в этом случае полином $L(\lambda, \zeta)$ является полиномом Ковалевской. Для доказательства достаточно, очевидно, ограничиться окрестностью нуля.

Пусть функция $u_0(w, \zeta)$, $w \in \mathbf{C}^1$ (ζ — параметр), есть «базисный» символ, являющийся решением задачи Коши (по w)

$$u_0^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(\zeta)\, u_0^{(k)} = 0,$$

$$u_0(0, \zeta) = 1,\ u_0'(0, \zeta) = 0, \dots, u_0^{(m-1)}(0, \zeta) = 0 .$$

Покажем, что функция $u_0(w, \zeta)$ является по ζ функцией экспоненциального типа, если $|w| < \rho$, где $\rho > 0$ — некоторое число. Действительно, если это не так, то, как бы мало ни было число $\rho > 0$, всегда найдется значение $w \in \mathbf{C}^1$, $|w| < \rho$ такое, что для любых последовательностей $\mathcal{M}_\nu \to +\infty$ и $R_{1\nu} \to +\infty, \dots R_{n_\nu} \to +\infty$ найдутся значения $\zeta = \zeta_\nu$, для которых

$$|u_0(w, \zeta_\nu)| \geqslant \mathcal{M}_\nu \exp\left(R_{1\nu} |\zeta_{1\nu}| + \dots + R_{n\nu} |\zeta_{n\nu}|\right). \tag{3.7}$$

Положим $u_{0\nu}(w, z) = u_0(w, \zeta_\nu)\, \varphi_{0\nu}(z)$, где

$$\varphi_{0\nu}(z) = \frac{\exp z\, \zeta_\nu}{\mathcal{M}_\nu \exp\left(R_{1\nu} |\zeta_{1\nu}| + \dots + R_{n\nu} |\zeta_{n\nu}|\right)}.$$

Очевидно, функции $u_{0\nu}(w, z)$ являются решением задачи Коши (3.1), (3.2) при начальных условиях

$$u_{0\nu}(0, z) = \varphi_{0\nu}(z),\ u_{0\nu}^{(k)}(0, z) = 0\ (1 \leqslant k \leqslant m-1).$$

Далее, для любого компакта $K \subset \mathbf{C}_z^n$

$$|\varphi_{0\nu}(z)| \leqslant \frac{\exp\left(|\zeta_{1\nu} z_1| + \dots + |\zeta_{n\nu} z_n|\right)}{\mathcal{M}_\nu \exp\left(R_{1\nu} |\zeta_{1\nu}| + \dots R_{n\nu} |\zeta_{n\nu}|\right)} \to 0$$

при $\nu \to \infty$. Следовательно, последовательность решений $u_{0\nu}(w, z)$ в соответствии с определением 3.1 обязана также стремиться к нулю при $\nu \to \infty$ в некотором цилиндре W_δ^ρ. Но это невозможно, ибо в силу (3.7)

$$|u_{0\nu}(w, 0)| = |u_0(w, \zeta_\nu)\, \varphi_{0\nu}(0)| \geqslant 1.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение о том, что $u_0(w, \zeta)$ является функцией экспоненциального типа по ζ при $|w| < \rho$, где $\rho > 0$ — фиксированное число.

Точно также устанавливается, что и другие «базисные» символы $u_j(w, \zeta)$ $(1 \leqslant j \leqslant m-1)$ являются целыми функциями экспоненциального типа при $|w| < \rho$.

Завершая доказательство теоремы, заметим теперь, что

$$u_j(w, \zeta) = \sum_{k=0}^{m-1} C_{jk} w^{r_k} e^{w\lambda_k(\zeta)} \qquad (0 \leqslant r_k = r_k(\zeta) \leqslant m-1) \tag{3.8}$$

где, как показывает подсчет, $C_{jk} = C_{jk}(\lambda_o, \dots, \lambda_{m-1})$ суть рациональные функции корней характеристического полинома $\lambda_o(\zeta), \dots, \lambda_{m-1}(\zeta)$. Обращая систему (3.8), получаем, что

$$w^{r_k} e^{w\lambda_k(\zeta)} = \sum_{j=0}^{m-1} B_{kj} u_j(w, \zeta),$$

где $B_{kj} = B_{kj}(\lambda_o, \dots, \lambda_{m-1})$ также являются рациональными функциями от $\lambda_o, \dots, \lambda_{m-1}$. Следовательно, при достаточно больших $|\zeta|$ имеет место неравенство $|\lambda_k(\zeta)| \leqslant \mathcal{M} |\zeta|$, где $\mathcal{M} > 0$ — постоянная.

Тем самым в соответствии с леммой 3.1 полином $L(\lambda, \zeta)$ есть полином Ковалевской. Необходимость, а вместе с ней и теорема полностью доказаны.

Пример. Рассмотрим в качестве примера случай $G = \mathbf{C}^n_z$, т.е. случай начальных данных $\varphi_j(z)$, являющихся целыми функциями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Если функции* $\varphi_j(z) \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n_z)$, *то задача Коши* (3.1) (3.2) *разрешима глобально в* $\mathbf{C}^1_w \times \mathbf{C}^n_z$, *т.е. решение* $u(w, z) \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^{n+1})$.

Для доказательства утверждения достаточно заметить, что как всякие целые функции, функции $\varphi_j(z)$ на любом компакте $K \subset \mathbf{C}^1_z$ удовлетворяют неравенствам

$$|D^\alpha \varphi_j(z)| \leqslant \frac{\mathcal{M}\alpha!}{R^{|\alpha|}},$$

где $R > 0$ может быть любым числом (константа $\mathcal{M}$ зависит при этом от R и компакта K). Следовательно ряд

$$u(w, z) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j(w, D)\, \varphi_j(z)$$

сходится равномерно (см. оценки (3.6)) на любом компакте в пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$ переменных $w \in \mathbf{C}^1$ и $z \in \mathbf{C}^n$. Это и означает глобальную разрешимость исходной задачи Коши.

§4. ДВУХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ТИПА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ

В этом параграфе рассмотрена задача типа краевой задачи в полосе. Аналогично могут быть рассмотрены задачи и с большим числом «граничных» условий.

В пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, переменных $w \in \mathbf{C}^1$, $z \in \mathbf{C}^n$ рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} - \Delta u = 0, \tag{4.1}$$

$$u\left(\frac{1}{2}, z\right) = \varphi_+(z), \quad \frac{\partial u}{\partial w}\left(-\frac{1}{2}, z\right) = \varphi_-(z). \tag{4.2}$$

Для решения задачи положим $\Delta \longleftrightarrow \zeta^2$ и рассмотрим две двухточечные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $\zeta \in \mathbf{C}^n$

$$\ddot{u}_{\pm}(w, \zeta) - \zeta^2 u_{\pm}(w, \zeta) = 0$$

при условиях

$$u_+\left(\frac{1}{2}, \zeta\right) = 1, \quad u'_+\left(-\frac{1}{2}, \zeta\right) = 0;$$

$$u_-\left(\frac{1}{2}, \zeta\right) = 0, \; u'_-\left(-\frac{1}{2}, \zeta\right) = 1.$$

Как нетрудно подсчитать,

$$u_+(w, \zeta) = \frac{ch\left(w + \frac{1}{2}\right)\zeta}{ch\,\zeta}, \; u_-(w, \zeta) = \frac{sh\left(w - \frac{1}{2}\right)\zeta}{\zeta\, ch\,\zeta}.$$

Следовательно, решение исходной задачи (4.1), (4.2) записывается в виде

$$u(w, z) = \frac{ch\left(w + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\Delta}}{ch\sqrt{\Delta}}\varphi_+(z) + \frac{sh\left(w - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}\;ch\sqrt{\Delta}}\varphi_-(z)$$

или, что то же,

$$u(w, z) = \left[ch\left(w + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\Delta}\right]u_+(z) + \left[\frac{sh\left(w - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}\right]u_-(z),$$

где функции $u_{\pm}(z)$ являются решением дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$[ch\,\sqrt{\Delta}]u_{\pm}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n u_{\pm}(z)}{(2n)!} = \varphi_{\pm}(z).$$

Символ оператора $ch\sqrt{\Delta}$ есть целая функция $ch\sqrt{\zeta^2} \equiv ch(\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_n^2)^{1/2}$, обращающаяся в нуль в точках $\zeta \in \mathbf{C}^n$ таких, что $\zeta^2 = -(\pi/2 + m\pi)^2$, $m = 0, \pm 1, \ldots$ Таким образом, если положить

$$\Omega \subset \mathbf{C}^n_{\zeta} \setminus \left\{\zeta : \zeta^2 = -(\pi/2 + m\pi)^2, m = 0, \pm 1, \ldots\right\},$$

то получаем, что для любых функций $\varphi_{\pm}(z) \in \mathcal{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$ существует единственное аналитическое решение $u(w, z) \in \mathcal{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$ при каждом фиксированном значении $w \in \mathbf{C}^1$.

Аналогичное утверждение справедливо в пространстве экспоненциальных функционалов $\mathcal{E}'xp_{\Omega}-(\mathbf{C}^n_z)$. Здесь, как и ранее, Ω — произвольная область Рунге.

ГЛАВА III. КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ФУРЬЕ

В данной главе разработан комплексный метод Фурье и даны приложения этого метода к задачам главы II.

В данном параграфе изучается преобразование Фурье произвольных аналитических функций адекватное в случае экспоненциальных функций классическому преобразованию Бореля. Рассмотрены характерные примеры.

1. Основное определение. Пусть G некоторая область Рунге переменных $z \in \mathbf{C}^n$ и $u(z)$ — произвольная аналитическая в G функция.

Пусть, как и ранее, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — двойственные переменные. $\partial = (\partial/\partial\zeta_1, \ldots, \partial/\partial\zeta_n)$ — символ дифференцирования в пространстве $\mathbf{C}^n_\zeta$.

В соответствие с понятием п/д оператора с аналитическим символом (гл. I,§2) функции $u(z)$ отвечают п/д операторы $u(\partial)$ и $u(-\partial)$, определяющие, в частности, непрерывные отображения

$$u(\partial) : \mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta) \to \mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta),$$

$$u(-\partial) : \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta) \to \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta),$$

где $\mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$ — пространство экспоненциальных функций $v(\zeta)$, ассоциированное с областью $G \subset \mathbf{C}^n_z$, а $\mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$ — пространство, сопряженное к $\mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Преобразованием Фурье $\tilde{u}(\zeta)$ функции $u(z) \in \mathcal{O}(G)$ называется экспоненциальный функционал*

$$\tilde{u}(\zeta) \overset{def}{=} u(-\partial)\ \delta(\zeta).$$

Значение $\tilde{u}(\zeta)$ на основной функции $v(\zeta) \in \mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$ определяется формулой

$$\langle \tilde{u}(\zeta), v(\zeta)\rangle = \langle \delta(\zeta),\ u(\partial)v(\zeta)\rangle = u(\partial)v(0),$$

где $u(\partial)\ v(\zeta)$ — значение п/д оператора $u(\partial)$ на $v(\zeta)$.

Из определения $\tilde{u}(\zeta)$ и свойств п/д операторов вытекает

ТЕОРЕМА 1.1. *Отображение*

$$\tilde{u}(\zeta) : \mathcal{O}(G) \to \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta) \tag{1.1}$$

непрерывно.

Доказательство. Прежде всего заметим, что непрерывность отображения (1.1) достаточно проверить для полицилиндра $S_R = \{z : |z_j| < R_j \leqslant \infty,\ 0 \leqslant j \leqslant n\}$, ибо в общем случае значение $\langle \tilde{u}(\zeta), v(\zeta)\rangle$ представимо в виде конечного числа слагаемых, аналогичных случаю S_R.

Итак, пусть $G = S_R$ и $u_\nu(z) \to u(z)$ $(\nu \to \infty)$ локально равномерно в G. Тогда для любой функции $v(\zeta) \in \mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_\zeta)$

$$\langle \tilde{u}(\zeta) - \tilde{u}_\nu(\zeta), v(\zeta)\rangle = [u(\partial) - u_\nu(\partial)]\, v(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (u_\alpha - u_{\nu\alpha})\, \partial^\alpha v(0), \tag{1.2}$$

где $u_\alpha = D^\alpha u(0)/\alpha!$, $u_{\nu\alpha} = D^\alpha u_\nu(0)/\alpha!$ — коэффициенты Тейлора функций $u(z)$ и $u_\nu(z)$.

Так как $v(\zeta) \in \mathscr{E}xp_R(\mathbf{C}^n_\zeta)$, то в соответствии с Утверждением 1.1 гл. 1 существуют постоянная $\mathscr{M} > 0$ и вектор $r < R$ такие, что

$$| \partial^\alpha v(\zeta) | \leqslant \mathscr{M} \exp (r_1 | \zeta_1 | + ... + r_n | \zeta_n |) \cdot r^\alpha$$

и, следовательно, $| \partial^\alpha v(0) | \leqslant \mathscr{M} r^\alpha$. Далее, поскольку $u_\nu(z) \to u(z)$ равномерно на любом компакте $K \subset S_R$, то из формулы Коши немедленно следует, что найдутся постоянные $\mathscr{M}_1 > 0$ и вектор r_1, удовлетворяющий неравенству $r < r_1 < R$ такие, что

$$| D^\alpha [u(0) - u_\nu(0)] | \leqslant \frac{\mathscr{M}_1 \alpha !}{r_1^\alpha} \max_{z \in \Gamma_1} | u(z) - u_\nu(z) | ,$$

где Γ_1 — остов полицилиндра S_{r_1}.

Учитывая полученные неравенства из (1.2) находим, что

$$| \langle \tilde{u}(\zeta) - \tilde{u}_\nu(\zeta), v(\zeta) \rangle | \leqslant \mathscr{M}_2 \max_{z \in \Gamma_1} | u(z) - u_\nu(z) | ,$$

где

$$\mathscr{M}_2 = \mathscr{M}\mathscr{M}_1 \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^\alpha < \infty \text{ — постоянная.}$$

Ясно, что последнее неравенство доказывает непрерывность отображения (1.1). Утверждение теоремы доказано.

Замечание. Преобразование Фурье $\tilde{u}(\zeta)$ будем обозначать также через $[Fu]$ (ζ) и отображение (1.1) записывать в виде

$$\mathcal{O}(G) \xrightarrow{F} \mathscr{E}' xp_G (\mathbf{C}^n_\zeta).$$

2. Формула обращения. Имеет место

ТЕОРЕМА 2.2. *Отображение*

$$F : \mathcal{O}(G) \to \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$$

взаимно однозначно, причем обратное отображение F^{-1} *определяется формулой*

$$u(z) = \langle \tilde{u}(\zeta), \exp z\zeta \rangle, \ z \in G. \qquad (1.2)$$

Доказательство. Действительно, если $\tilde{u}(\zeta) = u(-\partial) \ \delta(\zeta)$ — преобразование Фурье функции $u(z)$, то для любой функции $\exp z\zeta$, где $z \in G$, имеем

$$\langle \tilde{u}(\zeta), \exp z\zeta \rangle = \langle \delta(\zeta), u(\partial) \exp z\zeta \rangle = u(z).$$

Тем самым формула обращения (1.2) получена Остается показать, что каждый экспоненциальный функционал является преобразованием Фурье некоторой одной и только одной аналитической в области функции. Но это есть в точности утверждение теоремы 4.1 гл.I о представлении произвольного функционала $h(\zeta) \in \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$ в виде $h(\zeta) = A(-\partial)\delta(\zeta)$, где $A(z) \in \mathcal{O}(G)$. Теорема доказана.

3. Таблица двойственности. Введенное отображение Фурье удовлетворяет свойствам, аналогичным (или совпадающим) свойствам классического преобразования Фурье. Приведем эти свойства в виде таблицы.

Таблица двойственности

1. Линейность отображения F $au(z)+bv(z)$; $a, b \in \mathbf{C}^1$	$a\tilde{u}(\zeta)+b\tilde{v}(\zeta) \in \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$
2. Теорема подобия $u(az)$, $a \in \mathbf{C}^n$ $(az=(a_1z_1,\dots,a_nz_n))$	$a^{-n}\tilde{u}(a^{-1}\zeta) \in \mathscr{E}xp_{a^{-1}G}(\mathbf{C}^n_\zeta)$ $(a^{-1}=(a_1^{-1},\dots,a_n^{-1}))$
3. Теорема смещения $u(z-a)$, $a \in \mathbf{C}^n$	$e^{-a\zeta}\tilde{u}(\zeta) \in \mathscr{E}xp_{G+a}(\mathbf{C}^n_\zeta)$
4. Теорема запаздывания $e^{\tau z}u(z)$, $\tau \in \mathbf{C}^n$	$\tilde{u}(\zeta-\tau) \in \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$
5. Умножение на независимые переменные $z^\alpha u(z)$	$(-\partial)^\alpha\tilde{u}(\zeta) \in \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$
6. Дифференцирование оригинала $D^\alpha u(z)$	$\zeta^\alpha\tilde{u}(\zeta) \in \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$

Примечание. В п.п.2,3 введены обозначения

$$a^{-1}G=\{z \in \mathbf{C}^n : az \in G\},$$

$$G+a=\{z \in \mathbf{C}^n : z-a \in G\}.$$

4. *Примеры*. 1) Вычислим преобразование Фурье функции $u(z)=\exp az^2$, где $az^2=a_1z_1^2+\dots a_nz_n^2$. По определению имеем

$$\tilde{u}(\zeta)=\exp a\partial^2 .\ \delta(\zeta),$$

откуда, учитывая формулу

$$\delta(\zeta)=(2\sqrt{\pi})^{-n}(a_1\dots a_n)^{1/2}\exp(-a\partial^2)\ .\ \exp(-\zeta^2/4a)$$

(см. § 4 гл. 1), находим, что

$$[F\exp a z^2](\zeta)=(2\sqrt{\pi})^{-n}(a_1\dots a_n)^{-1/2}\exp(-\zeta^2/4a).$$

Таким образом, преобразование Фурье целой функции $\exp az^2$ есть регулярный экспоненциальный функционал, определяемый ядром $\exp(-\zeta^2/4a)$ и системой контуров $(-\sqrt{a_j}\,\infty, \sqrt{a_j}\,\infty)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

2) Найдем преобразование Фурье функции $u(z) = z^{-m}$, где $z \in \mathbf{C}^1$, m — натуральное число. Очевидно,

$$\frac{1}{z^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} D^{m-1} \frac{1}{z},$$

и, следовательно (см. таблицу двойственности)

$$F\left[\frac{1}{z^m}\right](\zeta) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \zeta^{m-1} F\left[\frac{1}{z}\right](\zeta) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\zeta^{m-1} \; n(\zeta), \tag{1.3}$$

где $n(\zeta) = \mathbf{nat} \int \delta(\zeta)\, \mathbf{d}\zeta$ — натуральная **первообразная** дельта-функции.

С другой стороны, по определению

$$F\left[\frac{1}{z^m}\right](\zeta) = \left(-\frac{1}{\partial}\right)^m \delta(\zeta) = (-1)^m \underbrace{\partial^{-1} \ldots \partial^{-1}}_{m} \delta(\zeta) = \tag{1.4}$$

$$= (-1)^m \underbrace{\partial^{-1} \ldots \partial^{-1}}_{m-1} n(\zeta).$$

Сравнивая при различных m формулы (1.3) и (1.4), замечаем, что при натуральном интегрировании функция $n(\zeta)$ ведет себя аналогично функции $(1/2)\; sgn\; x$, $x \in \mathbf{R}^1$, при определенном интегрировании от нуля до x. Тем самым естественно определить сигнатуру комплексных чисел формулой

$$sgn\; \zeta \overset{def}{=} 2\; n(\zeta).$$

В этих обозначениях $\left[F\,\frac{1}{z^m}\right](\zeta) = \frac{(-1)^m \zeta^m}{2\,(m-1)!}\, sgn\; \zeta.$

3) Пусть $u(z) = \exp[-1/(z-a)]$, где $a \in \mathbf{C}^1$ — фиксированное число, $z \in \mathbf{C}^1$. Имеем по теореме смещения

$$\left[F\, e^{\frac{1}{z-a}}\right](\zeta) = e^{-a\zeta}\left[F\, e^{-\frac{1}{z}}\right](\zeta).$$

Далее, так как

$$e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\cdot z^m} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\, z^m},$$

то

$$\left[F\, e^{-\frac{1}{z}}\right](\zeta) = \delta(\zeta) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta^{m-1}}{m!\,(m-1)!}\, n(\zeta).$$

Следовательно,

$$\left[F e^{-\frac{1}{z-a}}\right](\zeta) = e^{-a\zeta}\left[\delta(\zeta) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta^{m-1}}{m!\,(m-1)!}\, n(\zeta)\right].$$

В этом параграфе изучается преобразование Фурье функций $u(z)$ из пространства $\mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$. Устанавливается, что в этом случае преобразование Фурье $\tilde{u}(\zeta)$ является не только экспоненциальным, но и аналитическим функционалом. Этот факт явится в дальнейшем основным для разработки комплексного метода Фурье.

Начнем с выяснения отношения введенного преобразования Фурье к классическому преобразованию Бореля.

2.1. Связь с преобразованием Бореля. Пусть вначале

$$u(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} u_\alpha z^\alpha, \; u_\alpha = D^\alpha u(0) / \alpha!,$$

— целая функция экспоненциального типа, т.е. целая функция, удовлетворяющая неравенству

$$| u(z) | \leqslant \mathscr{M} \exp (r_1 \mid z_1 \mid + \ldots + r_n \mid z_n \mid),$$

где $\mathscr{M} < 0$, $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, далее, $Bu(\zeta)$ — функция, ассоциированная с $u(z)$ по Борелю (или, что то же, преобразование Бореля), т.е.

$$Bu(\zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\alpha!\, u_\alpha}{\zeta^{\alpha+1}},$$

где $\alpha + 1 = (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_n + 1)$. Очевидно, $Bu(\zeta)$ — аналитична при $| \zeta_j | > r_j (1 \leqslant j \leqslant n)$, причем ряд сходится в этой области локально равномерно.

В соответствии с определением 1.1 настоящей главы функция $u(z)$, как всякая целая функция, имеет преобразование Фурье

$$\tilde{u}(\zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} u_\alpha (-\partial)^\alpha \delta(\zeta),$$

которое является экспоненциальным функционалом, определенным над пространством $\mathscr{E}xp(\mathbf{C}^n_\zeta)$ всех функций экспоненциального типа. Покажем что в данном случае преобразование Фурье может быть продолжено до аналитического функционала, ядром которого является преобразование Бореля $Bu(\zeta)$.

Действительно, пусть $\varphi(\zeta)$ есть аналитическая функция в полицилиндре U_R, где $R > r$ произвольно. Тогда по формуле Коши

$$\partial^\alpha \varphi(0) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{\varphi(s)\, ds}{s^{\alpha+1}},$$

где в качестве Γ можно взять остов любого полицилиндра $U\bar{r}$, у которого $r < \bar{r} < R$. Отсюда получаем, что

$$\langle \tilde{u}(\xi), \; \varphi(\zeta) \rangle = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} u_\alpha \langle (-\partial)^\alpha \delta(\zeta), \varphi(\zeta) \rangle =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} u_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{u_\alpha \cdot \alpha!}{\zeta^{\alpha+1}} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma Bu(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (2.1)$$

Последнее соотношение показывает, что $\tilde{u}(\zeta)$ есть непрерывный функционал над пространством аналитических в U_R функций с топологией равномерной сходимости на компактах. При этом, формула (2.1) определяет регулярный аналитический функционал в полицилиндре U_R и, тем более, во всем пространстве $\mathbf{C}^n_\zeta$. Ядром этого регулярного функционала является преобразование Бореля $B\,u(\zeta)$.

Отметим при этом, что по формуле обращения

$$u(z) = \langle \tilde{u}(\zeta), e^{z\zeta} \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} Bu(\zeta) e^{z\zeta}\, d\zeta,$$

что совпадает с классической формулой обращения Бореля.

Обратно, если $h(\zeta) \in \mathcal{O}'(\mathbf{C}^n_\zeta)$, то (как для всякого аналитического функционала, см., например, Л.Хермандер [34], В.В.Напалков [26] и др.) найдется компактное множество $K \subset \mathbf{C}^n_\zeta$, такое, что

$$|\langle h(\zeta), \varphi(\zeta) \rangle| \leqslant \mathcal{M} \max_{\zeta \in K} |\varphi(\zeta)|,$$

где $\mathcal{M} > 0$ — постоянная. Отсюда немедленно следует, что функция

$$u(z) = \langle h(\zeta), \exp z\zeta \rangle, \quad z \in \mathbf{C}^n,$$

есть функция экспоненциального типа. Остается заметить, что, так как аналитический в $\mathbf{C}^n_\zeta$ функционал однозначно определяется своими значениями на экспонентах (пространство $\mathbf{C}^n$ есть область Рунге), то соответствие между $h(\zeta)$ и $u(z)$ взаимно однозначно, причем $h(\zeta) = \tilde{u}(\zeta)$. Таким образом, получаем в итоге

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Имеет место изоморфизм*

$$F : \mathcal{E}xp(\mathbf{C}^n_z) \to \mathcal{O}'(\mathbf{C}^n_\zeta),$$

причем обратное отображение определяется формулой обращения.

2. 2. Общий случай. Теорема Пэли-Винера. Пусть теперь $u(z) \in \mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, где $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$ — некоторая область двойственных переменных. Напомним, что

$$\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z) = \left\{ u(z) : u(z) = \sum_{\lambda \in \Omega} u_\lambda(z) \right\},$$

где значения $\lambda \in \Omega$ пробегают всевозможные конечные наборы и $u_\lambda(z) \in \mathcal{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_z)$ (см. § 2, гл. I). Тогда в соответснвии с результатами п. 1.

$$\tilde{u}(\zeta) = \sum_{\lambda \in \Omega} \tilde{u}_\lambda(\zeta),$$

где $\tilde{u}_\lambda(\zeta)$ являются регулярными аналитическими функционалами в полицилиндрах

$U_{R,\lambda}$. Тем самым, преобразование Фурье $\widetilde{u}(\zeta)$ является конечной суммой аналитических функционалов, регулярных в $\bar{U}_{R,\lambda}$ и, как следствие, в области Ω. Оно определяется формулой

$$\langle \widetilde{u}(\zeta), \varphi(\zeta) \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\lambda\in\Omega} \int_{\Gamma_\lambda} B\, u_\lambda(\zeta)\, \varphi(\zeta) d(\zeta),$$

где Γ_λ — остовы полицилиндров $U_{R,\lambda}$, $\varphi(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$ — произвольная функция.

Таким образом,

$$F : \mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z) \to \mathcal{O}'(\Omega).$$

Обратно, пусть Ω — область Рунге и $h(\zeta) \in \mathcal{O}'(\Omega)$. Тогда, как уже отмечалось, существует компакт $K \subset \Omega$ такой, что

$$|\langle h(\zeta), \varphi(\zeta) \rangle| \leqslant \mathcal{M} \max_{\zeta\in K} |\varphi(\zeta)|,$$

где $\mathcal{M} > 0$ — постоянная, $\varphi(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$. Это неравенство говорит о том, что функционал $h(\zeta)$ по теореме Хана-Банаха продолжается до непрерывного функционала над пространством $C(K)$ непрерывных на K функций. Следовательно, в соответствии с теоремой Рисса существует счетно-аддитивная мера $\mu(d\zeta)$, сосредоточенная на K, такая, что

$$\langle h(\zeta), \varphi(\zeta) \rangle = \int_K \varphi(\zeta)\, \mu(d\zeta), \quad \varphi(\zeta) \in C(K). \tag{2.2}$$

Поскольку K компактно, то существует, очевидно, конечное семейство борелевских множеств K_i ($i = 1, \ldots, N$) таких, что:

1) $K_i \cap K_j = \varnothing,\ i \neq j$;

2) $\bigcup_{1\leqslant j\leqslant N} K_i = K$;

3) любое множество K_i содержится целиком хотя бы в одном полицилиндре «аналитичности» U_{λ_i} (при этом один полицилиндр может быть пронумерован несколько раз).

Обозначим через $\mu_i(d\zeta)$ сужение меры $\mu(d\zeta)$ на множество K_i. Тогда в силу свойств 1), 2)

$$\mu(d\zeta) = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \mu_i(d\zeta)$$

и, следовательно, из формулы (2.2), в частности, получим, что

$$u(z) \equiv \langle h(\zeta), e^{z\zeta} \rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \int_{K_i} e^{z\zeta}\, \mu_i(d\zeta) \equiv \sum_{1\leqslant i\leqslant N} u_i(z).$$

В силу свойства 3) каждая функция $u_i(z) \in \mathcal{E}xp_{R,\lambda_i}(\mathbf{C}^n_z)$ и, значит, $u(z) \in \mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$.

В заключение, заметим, что поскольку Ω есть область Рунге, то функционал $h(\zeta)$ однозначно определяется функцией $u(z)$, при этом $h(\zeta) = \widetilde{u}(\zeta)$. Тем самым установлена

ТЕОРЕМА 2.1. *Если Ω – область Рунге, то отображение*

$$F : \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z) \to O'(\Omega)$$

есть изоморфизм, причем обратное отображение определяется формулой обращения.

Замечание. Теорему 2.1 естественно назвать комплексной теоремой Пэли-Винера, ибо каждый аналитический функционал определяется некоторой компактной мерой. Таким образом, теорему 2.1 можно сформулировать следующим образом:

Преобразование Фурье целой функции $u(z)$ определяется компактной мерой, содержащейся в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$, тогда и только тогда, когда $u(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$.

2.3. Дополнение к таблице двойственности. Доказанная теорема 2.1 позволяет сделать дополнение к таблице двойственности функций-оригиналов и их преобразований Фурье, существенное в приложениях к псевдо-дифференциальным уравнениям. Именно, пусть $A(\zeta) \in O(\Omega)$. Тогда для любого $h(\zeta) \in O'(\Omega)$, очевидно, определено произведение $A(\zeta)h(\zeta)$, являющееся вновь аналитическим функционалом в области Ω. Таким образом, если $u(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$ и $A(D)$ — п/д оператор с символом $A(\zeta)$, то

$$A(D)u(z) \overset{F}{\longleftrightarrow} A(\zeta)\,\widetilde{u}(\zeta).$$

Следовательно, таблицу двойственности (п. 2, § 1) мы можем дополнить строкой

$u(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$	$\widetilde{u}(\zeta) \in O'(\Omega)$
$A(D)\ u(z)$	$D(\zeta)\ \widetilde{u}(\zeta)$

где $A(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция в области Ω.

2.4. Свойство « унитарности » преобразования Фурье. Пусть $u(z) \in O(G)$ где $G \subset \mathbf{C}^n_z$ — некоторая область, и $v(\zeta) \in \mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$. Тогда, как это вытекает из предыдущих результатов, $\widetilde{u}(\zeta) \in \mathscr{E}'xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$ и $v(z) \in O'(G)$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2.2. *Для любых функций $u(z) \in O(G)$ и $v(\zeta) \in \mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$ имеет место равенство*

$$\langle \widetilde{u}(\zeta),\ v(\zeta)\rangle = \langle \widetilde{v}(z),\ u(z)\rangle. \tag{2.3}$$

Доказательство. Действительно, т.к. $v(\zeta) \in \mathscr{E}xp_G(\mathbf{C}^n_\zeta)$, то

$$v(\zeta) = \sum_{\lambda \in G} e^{\lambda\zeta}\,\varphi_\lambda(\zeta),$$

где $\varphi_\lambda(\zeta) \in \mathscr{E}xp_{R,\lambda}(\mathbf{C}^n_\zeta)$. Тогда

$$\langle \widetilde{u}(\zeta),\ v(\zeta)\rangle = \langle u(-\partial)\,\sigma(\zeta),\ v(\zeta)\rangle = \sum_{\lambda \in G} \langle \sigma(\zeta),\ u(\partial)\ e^{\lambda\zeta}\varphi_\lambda(\zeta)\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda \in G} \langle \sigma(\zeta),\ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha u(\lambda)}{\alpha!}\ (\partial - \lambda I)^\alpha\ [e^{\lambda\zeta}\varphi_\lambda(\zeta)]\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda \in G} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\ D^\alpha u(\lambda)\ \partial^\alpha\varphi_\lambda(0).$$

С другой стороны,

$$\langle \widehat{v}(z),\ u(z)\rangle = \sum_{\lambda \in G} \langle e^{-\lambda D}\varphi_\lambda(-D)\,\sigma(z),\ u(z)\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda \in G} \langle \sigma(z),\ \varphi_\lambda(D)\ e^{\lambda D}\ u(z)\rangle = \sum_{\lambda \in G} \langle \sigma(z),\ \varphi_\lambda(D)\,u(\lambda + z)\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda \in G} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha\varphi_\lambda(0)}{\alpha!}\ D^\alpha u(\lambda).$$

Сравнивая полученные выражения, убеждаемся в справедливости формулы (2.3). Теорема доказана.

Замечание. В целях симметрии формуле (2.3) можно придать вид

$$\langle \widehat{u}(\zeta),\ v(\zeta)\rangle = \langle u(z),\ \widetilde{v}(z)\rangle.$$

В такой форме она, очевидно, обобщает свойство унитарности L_2 - преобразования Фурье и является одной из форм равенства Парсеваля.

§ 3. РЕШЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ П/Д УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

В этом параграфе развивается метод Фурье для п/д уравнений с комплексными переменными, вполне аналогичный классическому вещественному случаю. По сути дела здесь повторяются результаты главы II, поэтому будем кратки.

1. П/д уравнения во всем пространстве. Рассматривается задача о разрешимости уравнения

$$A(D)\ u(z) = h(z),\ z \in \mathbf{C}^n, \tag{3.1}$$

где $A(D)$ – п/д оператор с символом $A(\zeta)$, являющимся аналитической функцией в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$. Область Ω есть область Рунге.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть, наряду с функцией $A(\zeta)$, и функция $A^{-1}(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$. Тогда для любой функции $h(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ существует единственное решение уравнения* (3.1) $u(z) \in \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$, *при этом $u(z)$ определяется формулой*

$$u(z) = \langle\ \widetilde{h}(\zeta),\quad A^{-1}(\zeta)\ e^{z\zeta}\ \rangle,$$

где $\widetilde{h}(\zeta)$ — преобразование Фурье функции $h(z)$.

Доказательство. Воспользуемся изоморфизмом

$$F : \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z) \to \mathcal{O}'(\Omega),$$

благодаря которому, применяя к уравнению (3.1) преобразование фурье, получим в пространстве $\mathcal{O}'(\Omega)$ эквивалентное уравнение

$$A(\zeta)\,\widetilde{u}(\zeta) = h(\zeta).$$

Отсюда $\widetilde{u}(\zeta) = A^{-1}(\zeta)\,\widetilde{h}(\zeta)$ и, следовательно, по формуле обращения

$$u(z) = \langle A^{-1}(\zeta)\,\widetilde{h}(\zeta), e^{z\zeta}\rangle = \langle \widetilde{h}(\zeta), A^{-1}(\zeta)\,e^{z\zeta}\rangle.$$

Ясно, что $u(z)$ есть искомое решение. Теорема доказана.

Аналогично формулируется двойственный результат.

ТЕОРЕМА 3.2 *Пусть в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$ функции $A(\zeta)$ и $A^{-1}(\zeta)$ аналитичны. Тогда для любой правой части $h(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$ уравнение (3.1) однозначно разрешимо, при этом решение определяется формулой*

$$u(z) = F\,[\,A^{-1}(\zeta)\,\langle\, h\ (z), e^{z\zeta}\,\rangle]\,(z).$$

Доказательство. Здесь для доказательства воспользуемся изоморфизмом

$$F : \mathcal{O}(\Omega^-) \to \mathscr{E}'xp_{\Omega^-}(\mathbf{C}^n_z)$$

(обратим внимание на то, что по сравнению с общей теорией здесь переменные z и ζ поменялись ролями). Используя формулу обращения, переходим от уравнения (3.1) к эквивалентному уравнению для функций из $\mathcal{O}(\Omega^-)$:

$$A(-\zeta)\,\widehat{u}(z) = \widehat{h}(\zeta),\ \zeta \in \Omega^- \tag{3.2}$$

где $\widehat{u}\,(\zeta) = \langle\, u\,(\zeta), \exp z\zeta\,\rangle$.

Из (3.2) немедленно получаем ответ

$$u(z) = F\,[\,A^{-1}(-\zeta)\,\langle\, h(z), \exp z\zeta\rangle]\,(z).$$

Это и требовалось.

2. Задача Коши. Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial^m u}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, D)\,\frac{\partial^k u}{\partial w^k} = h(w, z),\ w \in \mathbf{C}^1,\ z \in \mathbf{C}^n, \tag{3.3}$$

$$u\,(0, z) = \varphi_0(z)\ ,\dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial w^{m-1}}\,(0, z) = \varphi_{m-1}\,(z), \tag{3.4}$$

где $A_k(w, D)$ — п/д операторы, символы которых $A_k(w, \zeta)$ аналитичны по $w \in \mathbf{C}^1$ и $\zeta \in \Omega$, где $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$ — некоторая область.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть функция $h(w, z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$ при каждом $w \in \mathbf{C}^1$ и аналитична по w. Пусть, далее, $\varphi_k(z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Тогда задача Коши (3.3), (3.4) имеет единственное решение $u(w, z) \in \mathscr{E}xp_{\Omega}(\mathbf{C}^n_z)$ по переменным $z \in \mathbf{C}^n$ и аналитическое по $w \in \mathbf{C}^1$.*

Доказательство. Перейдем в задаче (3.3), (3.4) к преобразованию Фурье по z:

$$\tilde{u}^{(m)}(w, \zeta) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, \zeta)\tilde{u}^{(k)}(w, \zeta) = \tilde{h}(w, \zeta), \qquad (3.5)$$

$$\tilde{u}^{(k)}(0, \zeta) = \tilde{\varphi}_k(\zeta), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \qquad (3.6)$$

В соответствии с изоморфизмом

$$F : \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z) \to \mathcal{O}'(\Omega)$$

задача (3.5), (3.6) есть задача Коши в классе аналитических функционалов для обыкновенного дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами Она имеет единственное решение $u(w, \zeta)$ которое может быть получено стандартными методами. Отметим, что $\tilde{u}(w, z)$ является аналитическим функционалом в области Ω, зависящим от $w \in \mathbf{C}^1$ также аналитически. Очевидно, функция $u(w, z) = \langle \tilde{u}(w, \zeta), exp\ z\zeta \rangle$, $z \in \mathbf{C}^n$, является решением исходной задачи. Теорема доказана.

Аналогично доказывается двойственная

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть $h(w, z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega-}(\mathbf{C}^n_z)$ при каждом $w \in \mathbf{C}^1$ и аналитически зависит от w. Пусть, далее $\varphi_k(z) \in \mathscr{E}'xp_{\Omega-}(\mathbf{C}^n_z), k = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда задача Коши (3.3), (3.4) имеет единственное решение $u(w, z) \in$ $\in \mathscr{E}'xp_{\Omega-}(\mathbf{C}^n_z)$ по переменным z и аналитическое по w.*

Замечание. Сейчас представляется уместным обсудить результат С.Стейнберга, о котором мы говорили во введении. Как уже отмечалось, С.Стейнберг [49] изучал методом Фурье задачу Коши

$$(*) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = f\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)u, \quad u(0, z) = u_0(z), \quad z \in \mathbf{C}^n.$$

Автор пишет: "We can define the Fourier — Borel transform of $\mu \in \mathcal{O}'(\Omega)$ by

$$\hat{\mu}(z) = F(\mu) = \langle \mu, e^{\lambda z} \rangle.$$

Also, it is clear, that $\hat{\mu}(z)$ is entire, and since Ω is Runge, that F is $1-1$. If we let $E_1 = F[\mathcal{O}'(\Omega)]$, then $\exp(t\partial/\partial z)$ is a bounded operator on E_1 for all t; and if $u_0 \in E_1$, then $\exp(tf(\partial/\partial z))u_0$ is the solution to problem $(*)$ for $u_0 \in E_1$»

Учитывая теорему 2.1 настоящей главы, получаем, что $E_1 = \mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$. Следовательно, оператор $f(\partial/\partial z)$ есть п/д оператор с областью определения $\mathscr{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ и символом $f(\zeta)$. Тем самым результат С. Стейнберга получает трактовку в исходных переменных $z \in \mathbf{C}^n$ и становится замкнутым.

В заключение параграфа покажем, как методом Фурье доказывается теорема Коши — Ковалевской. Ограничимся ради сокращения записи случаем $h(w, z) \equiv 0$. Именно, рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^m u}{\partial w^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, D) \frac{\partial^k u}{\partial w^k} = 0, w \in \mathbf{C}^1, z \in \mathbf{C}^n, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial w^k}(0, z) = \varphi_k(z), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{3.8}$$

где уравнение (3.7) есть уравнение типа Ковалевской с коэффициентами, аналитически зависящими от $w \in \mathbf{C}^1$.

ТЕОРЕМА 3.5. *Для любых функций* $\varphi_k(z) \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, *существует единственное решение задачи* (3.7), (3.8) $u(w, z) \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^{n+1})$.

Доказательство. В соответствии с результатами § 1 настоящей главы имеем

$$F: \mathcal{O}(\mathbf{C}^n_z) \longleftrightarrow \mathcal{E}'xp(\mathbf{C}^n_z),$$

где $\mathcal{E}'xp(\mathbf{C}^n_\zeta)$ есть пространство экспоненциальных функционалов над пространством $\mathcal{E}xp(\mathbf{C}^n_\zeta)$ всех функций экспоненциального типа. Следовательно, после преобразования Фурье в задаче (3.7) (3.8) получим, что $u(w, \zeta) \in \mathcal{E}'xp(\mathbf{C}^n_\zeta)$ является решением задачи

$$u^{(m)}(w, \zeta) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(w, \zeta) u^{(k)}(w, \zeta) = 0, \tag{3.9}$$

$$u^{(k)}(0, \zeta) = \tilde{\varphi}_k(\zeta), k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{3.10}$$

где $\tilde{\varphi}_k(\zeta) \in \mathcal{E}'xp(\mathbf{C}^n_\zeta)$.

Решение задачи (3.9), (3. 10) формально записывается в виде

$$u(w, \zeta) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j(w, \zeta)\varphi_j(\zeta), \tag{3. 11}$$

где $u_j(w, z)$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ — суть решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_j^m(w, \zeta) + \sum_{K=0}^{m-1} A_k(w, \zeta) u_j^k(w, \zeta) = 0$$

при начальных условиях $u_j^k(0, \zeta) = \delta_{jk}$ (δ_{jk} — символ Кронекера).

Как установлено в § 3, гл. II, функции $u_j(w, \zeta)$ являются целыми функциями экспоненциального типа по переменным $\zeta \in \mathbf{C}^n$. Но функции экспоненциального типа являются, очевидно, мультипликаторами в пространстве экспоненциальных функционалов, ассоциированным с полным евклидовым пространством $\mathbf{C}_z^n$. Следовательно, формула (3. 11) имеет смысл и определяет неформальное решение задачи (3.9), (3.10). Отсюда немедленно получаем, что функция

$$u(w,z) = \langle u(w,\zeta) , \exp z\zeta \rangle , z \in \mathbf{C}^n$$

определяет решение исходной задачи (3.7) , (3.8). Теорема доказана.

Замечание. В случае $\varphi_k(z) \in O(G)$, где $G \subset \mathbf{C}_z^n$ — некоторая область, формула (3.11) определяет локальное решение задачи Коши, ибо в случае $G \neq \mathbf{C}_z^n$ функции $u_j(w, \zeta)$ являются мультипликаторами в пространстве экспоненциальных функционалов только при малых значениях w .

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Беллман и К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения* М. : Мир, 1967.

[2] С.Бохнер, *Лекции об интегралах Фурье*, М. : Физматгиз, 1962.

[3] ДЖ.Бьёркен и С. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория*, т. I. М. : Мир, 1978.

[4] Н. Винер и Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области*, М. : Физматгиз, 1964.

[5] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, М.: Наука, 1964.

[6] А. О. Гельфонд, *Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и асимптотические периоды целых функций*, Труды МИАН СССР им В.А.Стеклова, 1951, 38.

[7] В. П. Громов, *О полноте систем аналитических функций в области*, Матем. сб., 1963, 62 : 3, с. 320-334.

[8] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной форме*, М. Наука, 1966.

[9] Ю. А. Дубинский, *Алгебра п/д операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике*, УМН, 1982, 37(5), с. 97-137.

[10] Ю. А. Дубинский, *Псевдодифференциальные операторы с комплексными переменными и их приложения*, ДАН, 1983, 268(5), с. 1046-50.

[11] Ю.А. Дубинский, *Задача Коши для уравнений в частных производных с комплексными переменными*, ДАН, 1982, 264 (5), 1945-48.

[12] Ю.А. Дубинский, *Алгебра дифференциальных операторов бесконечного порядка и п/д уравнения с аналитическим символом*, ДАН, 1982, 264(4), 807-12.

[13] Ю. А. Дубинский, *Псевдодифференциальные операторы с комплексными переменными и их приложения*, ДАН, 1983, 268: 5. 1045 - 1050.

[14] Ю. А. Дубинский, *Преобразование Фурье аналитических функций. Комплексный метод Фурье*, ДАН, 1984, 275 : 3.

[15] Ю. Ф. Коробейник, *Аналитические решения операторных уравнений бесконечного порядка*, Автореферат докторской диссертации, РГУ, Ростов-на - Дону, 1966.

[16] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, М. : Гостехиздат, 1956.

[17] А. Ф. Леонтьев, *Обобщения рядов экспонент*, М. : Наука, 1981.

[18] А. Ф. Леонтьев, *Целые функции. Ряды экспонент*, М.: Наука, 1983.

[19] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*. М. : Наука, 1976.
[20] Ж. Лере и Л. Гординг и Т. Котаке *Задача Коши*. М. : Мир, 1967.
[21] Ж. Лере, *Линейная аналитическая задача Коши с сингулярными данными* (по работам Хамады и Вагшала). *Частичная гиперболичность*, УМН, 1974, 29 : 2, с. 207–215.
[22] С. Мандельбройт *Ряды Дирихле. Принципы и методы*, М. : Мир, 1973.
[23] А. И. Маркушевич *О базисе в пространстве аналитических функций*, Матем, сб., 1945, 17 (59), с. 211–252.
[24] С. Мизохата, *О системах Ковалевской*, УМН, 1974, 29 : 2, с. 216 — 227.
[25] А.А. Миролюбов и М.А. Солдатов, *Линейные однородные разностные уравнения*, М.: Наука, 1981.
[26] В.В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, М.: Наука, 1982.
[27] Л. В. Овсянников, *Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств*, ДАН 1965, 163: 4, с. 819 — 822.
[28] Л. В. Овсянников, *Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств*, ДАН, 1971, 200 : 4, с. 789—792.
[29] О. А. Олейник и Е. В. Радкевич, *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой*, Матем. анализ (итоги науки), 1971, М : Изд-во ВИНИТИ.
[30] Л. И. Ронкин, *Введение в теорию целых функций многих переменных*, М : Наука, 1971.
[31] А. Садуллаев, *Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях*, УМН, 1981, 36 : 4, с.53—105.
[32] Б. Ю. Стернин В. Е. Шаталов, *Аналитические лагранжевы многообразия и интегралы Фейнмана*, УМН, 1979, 34:6 , с. 194–198.
[33] Б. А. Фукс, *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных*, М. : Физматгиз, 1962.
[34] Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, М. Мир, 1968.
[35] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, М. : Наука, 1969.
[36] В. Е. Шаталов *Асимптотическое решение комплексно-аналитической задачи Коши*, ДАН, 1983, 273: 2, с. 309–312.
[37] M. Baouendi and C. Goulaouic, *Cauchy problem for analytic pseudo-differential operators*, Comm. in Part. Diff. Eq., 1976, 1: 2, p. 135–189.
[38] M. Baouendi et C. Goulaouic, *Problems de Cauchy pseudo-analytiques*, Journ. Eg. Derivees de Rennes, 1975, p. 27 — 41, Asterisque, N. 34 — 35, soc. Math. France, Paris, 1976.
[39] E. Borel, Lecons sur les séries divergentes, 2 éd. — Paris, 1928.
[40] L. Boutet de Monvel, *Operators pseudo-differentielles analytiques et opérateurs d'ordre infini*, Ann. Inst. Fourier, 1972, 22 (3), p. 229–268.
[41] L. Ehrenpreis, *Fourier analysis in several complex variables*, N.Y. Wiley — Interscience publishers, 1970.
[42] Y. Hamada, J. Lerey et A. Takeuchi, *Prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy linéaire*, C.R. Acad. Sc., Paris, 1983, ser A, 296 : 10, p.435.
[43] O. Heaviside, Electrical papers, London—New York, 1892.
[44] B. Malgrange, *Existence et approximation des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1955 — 1956, 6, p. 271 — 355.
[45] A. Martineau, *Equations différentielles d'ordre infini*, Bull. Soc. Math. France, 1967, 95, p. 109–154.
[46] A. Martineau, *Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier — Borel*, J. An. Math., 1963, 9, p. 1—163.

[47] G. Polya, *Untersuchungen über Lüken und singularitäten von Potenzreihen*, Math. Z., 1929, 19, 549.

[48] S. Steinberg, *Local propagator theory*, Rocky mountain Journ. Math., 1980, 10 (4), p. 767—798.

[49] S. Steinberg, *The Cauchy problem for differential equations. of infinite order*, J.diff. eq., 1971, 9: 3, p. 591.

[50] F. Treves, *Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators*, Inst. Math. Pura Appl., 1968, Rio de Janeiro.

[51] F. Treves, *Hyperdifferential operaters in complex space*, Bull. Soc. Math France, 1969. 97, p. 193—223.

[52] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Washington: Nat. Bureau of stand., Appl. Math. Ser, 1964 (перевод на русский язык : М. Наука 1979).

Поступила в редакцию 10 августа 1985г

Analytic pseudodifferential operators and their applications

Ju. A. Dubinskii

Abstract

On this paper the author studies:

The algebra of pseudodifferential operators whose symbols are analytic functions in an arbitrary Runge set $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, The space $\mathcal{E}xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ of exponential functions and its conjugate $\mathcal{E}'xp_\Omega(\mathbf{C}^n_z)$ (space of exponential functionals). The operator method (of Heaviside type) for the equations

$$A(D)\,u(z) = h(z),\ z \in \mathbf{C}^n,$$

and for the Cauchy problem

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D)\,\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = h(t, z),$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(0, z) = \varphi_k(z),\ k = 0, 1, \dots, m-1,$$

where $A_k(t, D)$ are p/d operators with symbols $A_k(t, \zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{C}^n_\zeta$ being a Runge set, and finally the complex Fourier method.

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ