Vol 10 ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA N°2 (1985)

# CLASSIFICATION DES DÉPLOIEMENTS DE GERMES DE SYSTÈMES MICRODIFFÉRENTIELS HOLONOMES DE MULTIPLICITÉ 2

NGUYEN TIEN ĐAI

## §1. INTRODUCTION

Soit $M_o$ un germe de système microdifférentiel holonome à une variable de multiplicité 2, défini au voisinage du point $(o, dt) \in T^* \mathbf{C}$. Il est bien connu que par un choix de générateurs convenables (voir [2]), on peut présenter $M_o$ sous la forme:

$$M_o : tu_o = (A_o + A_1 D_t^{-1})\, u_o, \qquad (1.1)$$

où $A_o$, $A_1$ sont des matrices constantes d'ordre 2 et $A_1$ est une matrice de la forme de Jordan.

Rappelons la notion de déploiement du système $M_o$ (au sens de [1] ou [2]). Soit $\mathcal{P}$ l'anneau des germes des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini verticaux sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, c'est – à — dire

$\mathcal{P} = \{ P(x, t; D_t),$ où $t \in \mathbf{C}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n \}$.

On définit

$\mathcal{R} = \mathcal{P} \langle D_{x_1}, \dots, D_{xn} \rangle$.

On dit qu'un $\mathcal{R}$ — module, holonome $M$ est non caractéristique (pour la projection $\pi : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}^n$), si la variété caractéristique ne contient aucun coveteur horiontal non nul.

DÉFINITION 1. *On dit que $M$ est un déploiement de système $M_o$ de base $X = \mathbf{C}^n$, si $M$ est un $R$ — module holonome non caractéristique et si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1) $$M_o = j^* M,$$

où $$j: \mathbf{C} \to X \times \mathbf{C}$$
$$t \mapsto (o,t)$$

et $j^*$ est l'image réciproque du $j$.

2) $M$ est libre de rang fini sur l'anneau $\mathcal{O}_x\{\{D_t^{-1}\}\}[D_t]$ (cela équivaut à l'existence d'une bonne filtration vérifiant la condition de platitude [1]).

On dit qu'un autre d'éploiement $M'$ de base $X' = \mathbf{C}^m$ est image réciproque du $M$ par le changement de base $\varphi : X' \to X$, s'il existe un morphisme fibré $\overline{\varphi}$ au dessus de $\varphi$, i.e. un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' \times \mathbf{C} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & X \times \mathbf{C} \\ \text{proj} \downarrow & & \downarrow \text{proj.} \\ X' & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

avec $\overline{\varphi}/\{o\} \times \mathbf{C}$ égal à l'identité tel que

$$M' = \overline{\varphi}^* M$$

On note alors $M' = \varphi^*(M)$, en remarquant que $M'$ ne dépend que de $\varphi$ à un isomorphisme au dessus de $1_x$, près.

DÉFINITION 2 *On dit que le système $M$ est stable s'il n'admet que des déploiements triviaux (c. à. d. des images réciproques du système $M$ par une rétraction).*

L'objet du présent article est de classifier tous les déploiements stables de système $M_o$ de type (1.1).

Ce travail a été accompli sous la direction de Frédéric Pham à qui l'exprime ma gratitude. Je voudrais aussi remercier J. Briançon, A. Galigo, J.M. Granger et Ph. Maisonobe pour les discussions pendant mon séjour au Département de Mathématiques de l'Université de Nice.

## § 2. RÉSULTATS.

Soit $M$ un déploiement de système $M_o$ de base $X = \mathbf{C}^n$. Alors d'après un résultat de Malgrange [2] on peut présenter $M$ sous la forme réduite suivante :

$$M : \begin{cases} tu = [A_o(x) + A_1 D_t^{-1}]\, u, \\ D'_{x_i} D_t^{-1} u = B_i(x)\, u \quad , \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{2.1}$$

où $A_o(x)$, $B_i(x)$ sont les matrices analytiques de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ d'ordre 2 et $A_o(0) = A_o$. Les conditions d'intégrabilité sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} [A_o(x), B_i(x)] = 0, \; i = 1, \ldots, n. \\ -\dfrac{\partial A_o(x)}{\partial x_i} = [A_i, B_i(x)] + B_i(x), \\ [B_i(x), B_j(x)] = 0, \; i \neq j \\ \dfrac{\partial B_i(x)}{\partial x_j} - \dfrac{\partial B_j(x)}{\partial x_i} = 0, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

*Remarque 2.1.* De l'équation $(2.2)_2$ on tire :

$$\text{trac}\,\frac{\partial A_o(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,\text{trac}\,A_o(x) = -\,\text{trac}\,B_i(x).$$

Alors, si l'on fait le changement de variable :

$$t' = t - \frac{1}{2}\,\text{trac}\,A_o(x),$$

on peut supposer que les matrices $A_o(x)$, $B_i(x)$ ($i = 1\ldots, n$) vérifiant :

$$\text{trac}\,A_o(x) = \text{trac}\,B_i(x) = 0. \tag{2.3}$$

I — Cas où $X = \mathbf{C}$

Pour simplifier, on considère tout d'abord le cas $n = 1$ (c.à.d. $X = \mathbf{C}$). Alors les équations (2.1) et (2.2) deviennent respectivement

$$M : \left\{\begin{array}{l} tu = [A_o(x) + A_1 D_t^{-1}]\,u \\ D_x D_t^{-1} u = B(x)u, \end{array}\right. \qquad x \in \mathbf{C} \tag{2.4}$$

et

$$[A_o(x), B(x)] = 0 \tag{2.5}$$

$$-\frac{\partial A_o(x)}{\partial x} = [A_1, B(x)] + B(x). \tag{2.6}$$

D'après (2.3) on peut supposer que les matrices $A_o(x)$, $B(x)$ sont de la forme :

$$A_o(x) = -\begin{pmatrix} s(x), & p(x) \\ q(x), & -s(x) \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} b(x), & c(x) \\ d(x), & -b(x) \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

où $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ sont des fonctions analytiques de $x$.

LEMME 2.2. *Il existe une fonction méromorphe $k(x)$ telle que :*

$$B(x) = k(x).\,A_o(x) \tag{2.9}$$

*Démonstration :*

En substituant (2.7), (2.8) dans la formule (2.5) on obtient :

$$0 = [A_0(x), B(x)]$$

$$= \begin{pmatrix} pd - qc, & 2(sc - bp) \\ 2(qb - sd), & qc - pd \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$0 = pd - qc = sc - pb = qb - sd. \tag{2.10}$$

D'après (2.6) $B(x) \neq 0$, alors en vertu de (2.10) il existe une fonction méromorphe $k(x)$ telle que :

$$\begin{aligned} b(x) &= k(x) \,.\, s(x), \\ c(x) &= k(x) \,.\, p(x), \\ d(x) &= k(x) \,.\, q(x). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Donc on a bien (2.9).

Notons que les conditions (2.5) et (2.9) sont équivalentes.

*Remarque.* 2.3 Si $k(x) = 0$, d'après (2.9) on a $B(x) = 0$. D'où il résulte, en tenant compte de (2.6) $A_0(x) = A_0(0) = A_0$, c'est-à-dire $M = M_0$. Alors $m$ devient un déploiement trivial de $M_0$. Pour trouver tous les déploiements nontriviaux de $M_0$, on peut supposer que :

$$k(x) = a_0(x)^m + a_1 x^{m+1} + ..., \; a_0 \neq 0, \; m \in Z.$$

*Remarque* 2. 4. a) Si $A_0 = A_0(0) \neq 0$, la relation (2.9) implique, comme on le voit facilement, $m \geqslant 0$, et par le changement de variable

$$x' = x'(x) = [(m + 1)\, h(x)]^{1/m+1}, \tag{2.12}$$

où

$h(x) = \int k(x) dx, \; h(0) = 0,$

on peut se ramener au cas

$$k(x) = x^m, \; m \geqslant 0. \tag{2.13}$$

b) Si $A_0 = 0$, on obtient $m = -1$. En comparant la multiplicité de $x$ dans les équations (2.6) et en changeant de variable,

$$x' = x'(x) = \exp\left(\int k(x)\, dx\right), \tag{2.14}$$

on se ramène au cas

$$k(x) = \frac{a}{x}, \; a \neq 0. \tag{2.15}$$

Dans la suite, pour déterminer les matrices $A_0(x)$, $B(x)$ (c'est-à-dire le déploiement $M$), nous allons résoudre les équations (2.6) en supposant que $A_0(x)$ et $B(x)$ sont définis par (2.7), (2.8) (ou (2.11)).

Notons

$$A_0 = -\begin{pmatrix} s_0, & p_0 \\ q_0, & -s_0 \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

et

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

ou

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

avec $-1 < \mathrm{Re}\,(\lambda_1 - \lambda_2) \leqslant 0$.

En utilisant les relations (2.11) on déduit de (2.6) que

— dans le cas (2.17):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q(x)}{\partial x} = k(x).\, q(x), \\ \dfrac{\partial s(x)}{\partial x} = k(x).\, [s(x) + q(x)], \\ \dfrac{\partial p(x)}{\partial x} = k(x).\, [p(x) - 2\, s(x)]. \end{cases} \tag{2.19}$$

— dans le cas (2.18)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s(x)}{\partial x} = k(x)\, .\, s(x), \\ \dfrac{\partial p(x)}{\partial x} = (1 + \lambda_1 - \lambda_2)\, k(x)\, .\, p(x), \\ \dfrac{\partial q(x)}{\partial x} = (1 - \lambda_1 + \lambda_2)\, k(x)\, .\, q(x). \end{cases} \tag{2.20}$$

*A. Cas où $A_o \neq 0$*

Nous avons le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Tout déploiement $M$ (de la forme (2.4)) de $M_o$ est image réciproque par un changement de base convenable d'un unique déploiement versel $M_{ver}$ de la forme suivante:*

$$M_{ver}: \begin{cases} tu = \left[ -\begin{pmatrix} s_o + q_o x, & p_o - 2s_o x - q_o x^2 \\ q_o\ , & -s_o - q_o x \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} D_t^{-1} \right] u, \\ D_x\, D_t^{-1} u \begin{pmatrix} s_o + q_o x, & p_o - 2s_o x - q_o x^2 \\ q_o\ , & -s_o - q_o x \end{pmatrix} e^x u. \end{cases} \tag{2.21}$$

*ou*

$$M_{ver}:\begin{cases} tu=\left[-\begin{pmatrix} s_o & , & p_o . e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \\ q_o\, e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} & , & -s_o \end{pmatrix} e^x+\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} D_t^{-1}\right]u \\ D_x D_t^{-1}\, u=\begin{pmatrix} s_o & , & p_o . e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \\ q_o . e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} & , & -s_o \end{pmatrix} e^x u . \end{cases} \qquad (2.22)$$

*Démonstration:*

En vertu de (2.13) l'hypothèse $A_o \neq 0$ implique $k(x)=x^m$, $m \geqslant 0$.

— Si $A_1$ est de la forme (2.17), nous voyons facilement que les équations (2.19) avec les conditions initiales $q(0)=q_o$, $s(0)=s_o$, $p(0)=p_o$ admettent les solutions suivantes:

$$q(x)=q_o . \exp\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right),$$

$$s(x)=\left(s_o+q_o\,\frac{x^{m+1}}{m+1}\right). \exp\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right),$$

$$p(x)=\left(p_o-2s_o\right)\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}-q_o\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)^2\right). \exp\left(-\frac{x^{m+1}}{m+1}\right).$$

Donc il suffit de faire le changement de base défini par

$$\varphi : X \to X'$$
$$x \mapsto x' = \varphi(x)$$

où

$$\varphi(x)=\frac{x^{m+1}}{m+1}. \qquad (2.23)$$

Ceci nous donne $M=\varphi^*(M_{ver})$, où $M_{ver}$ est de la forme (2.21)

— Si $A_1$ est de la forme (2.18), nous trouvons de la même façon les solutions des équations (2.20):

$$s(x)=s_0 . \exp\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right),$$

$$q(x)=q_0 . \exp\left(\frac{1-\lambda_1+\lambda_2}{m+1} . x^{m+1}\right).$$

$$p(x)=p_0 . \exp\left(\frac{1+\lambda_1-\lambda_2}{m+1} . x^{m+1}\right).$$

Alors par le changement de base (2.23) nous avons le résultat désiré $M \equiv \varphi^*(M_{ver})$, où $\varphi$ est défini par (2.23) et $M_{ver}$ est donné par (2.22).

*Remarque 2.5.* Le lieu singulier de $M_{ver}$ est une courbe lisse de multiplicité 2 définie par l'équation

$$p(x, t) = \det (t \, . \, I - A_0 \, (x))$$
$$= t^2 - \left(s_o^2 + p_o \, q_0\right) e^{2x} .$$

Le point $(x, t) \equiv (0, 0) \in \mathbf{C}^2$ est un point générique de cette courbe.

Il est bien connu que le système $M_0$ est irrégulier seulement dans les deux cas suivants ;

— Si $A_1$ est de la forme (2.17) ;

$$s_o^2 + p_o \, q_o = 0 \text{ et } q_0 \neq 0.$$

— Si $A_1$ est de la forme (2.18),

$$s_0^2 + p_o \, q_o = 0 \text{ et } s_0 \neq 0.$$

Et seulement dans ces cas son déploiement $M_{ver}$ n'est pas à S.R. (au sens de [4]).

*B-C s où* $A_o = 0$ *et* $A_1$ *est de la forme (2.17).*

THÉORÈME 2. *Le système* $M_o$ *défini par* $M_o \, : \, tu_o = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} D_t^{-1} \, u_o$ (2.24) *est stable.*

*Démonstration.*

Soit $M$ un déploiement de $M_o$ défini par (2.4). Alors, en vertu de (2.15) les équations (2.19) ont les solutions suivantes :

$$q(x) = \delta \, . \, x^a \, ,$$
$$s(x) = (\beta + \delta \, . \, a \, . \log x) \, . \, x^a \, ,$$
$$p(x) = (\gamma - 2\beta \, . \, a \log x - \delta \, . \, a^2 \, . \, \log^2 x) \, . \, x^a \, ,$$

où $\beta$, $\gamma$, $\sigma$ sont des constants convenables. Puisque nous considérons seulement le cas ou les matrices $A_0 \, (x)$ sont analytiques au voisinage de $x = 0 \in \mathbf{C}$, il en résulte que les coefficients de $\log x$, $\log^2 x$ doivent s'annuler, c'est-à-dire :

$$\beta = \delta = 0.$$

par conséquent,

$$A_0 \, (x) = -\begin{pmatrix} 0 & p(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que par le changement de générateurs

$$u = \mathrm{P} v \tag{2.25}$$

avec

$$P(x, D_t) = I - A_0(x) D_t$$

on peut transformer $M$ en un système $M_0$. Donc le déploiement $\acute{M}$ est **trivial.**

*C — Cas où $A_0 = 0$ et $A_1$ est de la forme* (2.18)

Dans ce cas le système $M_0$ est de la forme suivante:

$$M_0 : tu_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda 2 \end{pmatrix} D_t^{-1} u_0, \tag{2.26}$$

$$\text{avec } -1 < \operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \leqslant 0. \tag{2.27}$$

**En utilisant (2.15) les équations (2.20) ont des solutions suivantes:**

$$\begin{cases} s(x) = \beta \cdot x^a, & \beta \in \mathbf{C}, \\ p(x) = \gamma \cdot x^{a(1-\lambda_1+\lambda_2)}, & \gamma \in \mathbf{C}, \\ q(x) = \delta \cdot x^{a(1-\lambda_1+\lambda_2)}, & \delta \in \mathbf{C}. \end{cases} \tag{2.28}$$

**Puisque les fonctions $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ définies par (2.28) sont analytiques en $x = 0 \in \mathbf{C}$, on obtient les résultats suivants.**

PROPOSITION 2.6. *Si $\lambda_1 - \lambda_2 \notin Q$, tout déploiement $M$ de système $M_0$ est image réciproque par un changement de base convenable d'un unique déploiement $\mathcal{L}(\lambda 1, \lambda_2)$ de la forme*

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2) : \begin{cases} tu = \left[ -\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda 2 \end{pmatrix} D_t^{-1} \right] u, \\ D_x D_t^{-1} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u. \end{cases} \tag{2.29}$$

*Démonstration.*

**Dans le cas considéré $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbf{Q}$, les seules fonctions analytiques nontriviales de (2.28) sont les suivantes:**

**1) $s(x) = q(x) = 0$, $p(x) = \gamma \cdot x^n$, $\gamma \neq 0$, $n \geqslant 1$,**

**ou**

**2) $s(x) = p(x) = 0$, $q(x) = \delta \cdot x^n$, $\delta \neq 0$, $n \geqslant 1$,**

**ou**

**3) $p(x) = q(x) = 0$, $s(x) = \beta \cdot x^n$, $\beta \neq 0$, $n \geqslant 1$.**

**Dans les deux premiers cas 1) ou 2) en prenant le changement de générateurs $u = Pv$, avec**

$$P(x, D_t) = I + \begin{pmatrix} 0 & p(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_t$$

ou

$$P(x, D_t) = I + \begin{pmatrix} 0 & , 0 \\ q(x) . & 0 \end{pmatrix} D_t$$

on voit que le déploiement $M$ est trivial. Dans le dernier cas 3) pour obtenir le résultat désiré $M = \varphi * (\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2))$, il suffit d'utiliser le changement de base

$$\varphi : X \to X' \qquad (2.30)$$
$$x \mapsto x' = \varphi(x),$$

avec $\varphi(x) = \beta \cdot x^n$.

Supposons maintenant que

$$\lambda_1 - \lambda_2 = -\frac{k}{m} \in \mathbf{Q}. \qquad (2.31)$$

avec $(k, m) = 1$, $0 \leqslant k < m$.

En comparant les degrés en $x$ des **fonctions analytiques** $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ définies par (2.28) nous avons:

PROPOSITION 2.7. *Les seuls déploiements nontriviaux de $M_0$ sont les suivants:*

$$\begin{cases} s(x) = \beta . x^n, \ \beta \neq 0, \ n \geqslant 1, \\ p(x) = q(x) = 0 \end{cases} \qquad (2.32)$$

et

$$\begin{cases} s(x) = \beta . (x^n)^m, \ \beta \neq 0, \ n \in \mathbf{N}, \\ p(x) = \gamma . (x^n)^{m-k} \\ q(x) = \delta . (x^n)^{m+k} \end{cases} , (\gamma, \delta) \neq (0, 0), \qquad (2.33)$$

*et dans le cas où* $m + k$ *est impair*

$$\begin{cases} s(x) = 0, \\ p(x) = \gamma . (x^n)^{m-k}, \ \gamma \neq 0, \ n \in \mathbf{N} \\ q(x) = \delta . (x^n)^{m+k}, \ \delta \neq 0 \end{cases} \qquad (2.34)$$

et dans le cas où $m + k$ est pair

$$\begin{cases} s(x) = 0, \\ p(x) = \gamma . (x^n)^{\frac{m-k}{2}}, \ \gamma \neq 0, \ n \in \mathbf{N} \\ q(x) = \delta . (x^n)^{\frac{m+k}{2}}, \ \delta \neq 0. \end{cases} \qquad (2.35)$$

*Remarque 2.8* 1) Le déploiement $M$ défini par (2.32) vérifie $M = \varphi^* (\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2))$ où $\varphi$ et $\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2)$ sont donnés respectivement par (2.30) et (2.29).

2) Définissons le déploiement le plus simple dans le cas (2.34) (resp. (2.35)) par:

$$M(\lambda_1, \lambda_2, 0) : \begin{cases} tu = \left[ -\begin{pmatrix} 0 & x^{m-k} \\ x^{m+k} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} D_t^{-1} \right] u, \\ D_x D_t^{-1} u = m \cdot \begin{pmatrix} 0 & x^{m-k-1} \\ x^{m+k-1} & 0 \end{pmatrix} u . \end{cases}$$

c'est-à-dire dans le cas $n = 1$, $\gamma = \delta = 1$.

(resp.

$$N(\lambda_1, \lambda_2) : \begin{cases} tu = \left[ -\begin{pmatrix} 0 & x^{\frac{m-k}{2}} \\ x^{\frac{m+k}{2}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} D_t^{-1} \right] u, \\ D_x D_t^{-1} u = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} 0 & x^{\frac{m-k}{2} - 1} \\ x^{\frac{m+k}{2} - 1} & 0 \end{pmatrix} u. \end{cases} \tag{2.36}$$

c'est-à-dire dans le cas $n = 1$, $\gamma = \delta = 1$).

Alors le déploiement $M$ de système $M_0$ défini par (2.34) (resp. (2.35)) est image réciproque du système $M(\lambda_1, \lambda_2 ; 0)$ (resp. $N(\lambda_1, \lambda_2)$) par le changement de base

$$\varphi : X \to X'$$
$$x \to \varphi(x),$$

où $\varphi(x) = (\gamma.\delta)^{1/2m} \cdot x^n$

(resp. $\varphi(x) = (\gamma . \delta)^{1/m} . x^n$)

et par le changement de générateurs $u = Pv$

où
$$P = \begin{pmatrix} (\gamma\delta)^{k/2m} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} \end{pmatrix} ;$$

La preuve est obtenue par un calcul direct.

3) Enfin nous considérons le déploiement $M$ défini par (2.33).

— Si $\beta^2 + \gamma\delta = 0$. Il est facile de montrer que par le changement de base

$$\varphi : X \to X'$$
$$x \to x' = \varphi(x) = (\beta)^{1/m} . x^n$$

et par le changement de générateurs $u = Pv$

où
$$p = \begin{pmatrix} \beta/\delta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} - k/m$$

le déploiement $M$ est image réciproque du déploiement $P(\lambda_1, \lambda_2)$ défini par

$$P(\lambda_1, \lambda_2) \begin{cases} tu = \left[ - \begin{pmatrix} x^m & x^{m-k} \\ -x^{m+k} & -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} D_t^{-1} \right] u, \\ D_x D_t^{-1} u = m \begin{pmatrix} x^{m-1} & x^{m-k-1} \\ -x^{m+k-1} & -x^{m-1} \end{pmatrix} u . \end{cases} \tag{2.37}$$

— Si $\beta^2 + \gamma\delta \neq 0$,
faisons le changement de base

$\varphi : X \to X$

$x \to \varphi(x)$

avec $\varphi(x) = \alpha . x^n$, $\alpha = (\beta^2 + \gamma\delta)^{1/2m}$. et faisons le changement de générateurs $u = Pv$, avec

$$P = \begin{cases} \begin{pmatrix} \beta + \alpha^m , & 0 \\ 0 , & \gamma . \alpha^k \end{pmatrix} , \text{ si } \gamma \neq 0, \delta \neq 0. \\ \begin{pmatrix} 2\alpha^m , & 0 \\ 0 , & \gamma . \alpha^k \end{pmatrix} , \text{ si} \gamma \neq 0 , \delta = 0. \\ \begin{pmatrix} \delta , & 0 \\ 0 , & 2\alpha^{m+k} \end{pmatrix} , \text{ si } \gamma = 0 , \delta \neq 0. \end{cases}$$

Alors le déploiement $M$ est image réciproque du déploiement $M(\lambda_1 \lambda_2; b)$ défini par

$$M(\lambda_1, \lambda_2 ; b) \begin{cases} tu = \left[ - \begin{pmatrix} bx^m & (1+b)\, x^{m-k} \\ (1-b)\, x^{m+k} & -bx^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} D_t^{-1} \right] u , \\ D_x D_t^{-1} u = m. \begin{pmatrix} bx^{m-1} & (1+b)\, x^{m-k-1} \\ (1-b)\, x^{m+k-1} & -bx^{m-1} \end{pmatrix} u. \end{cases} \tag{2.38}$$

avec $b = \alpha^{-m}\beta$.

Avant d'étudier les déploiements $M(\lambda_1, \lambda_2; b)$, $b \in \mathbf{C}$ définis par (2.38) nous allons établir les lemmes suivants :

LEMME 2.9 *Soit* $b \in \mathbf{C}$, $0 \neq b \neq \pm 1$.
*Alors on a*

$M(\lambda_1, \lambda_2; -b) = \varphi\, (M(\lambda_1, \lambda_2; b))$, *où* $\varphi$ *est le changement de base défini par*

$\varphi : X \to X$ (2.39)

$x \to \varphi(x)$

où $\varphi(x) = \varepsilon . x, \quad \varepsilon^m = -1.$

*Démonstration.*

Par un calcul direct sur (2. 38) en utilisant (2.39).

LEMME 2.10. *Soit $b_1, b_2 \in \mathbf{C}$ vérifiant* $b_2 = b_1 + \dfrac{2m}{k}$ (2,40)

1) *Si $b_1 \neq \pm 1$, par le changement de générateurs $u_1 = P_1 . u_2$, où*

$$P_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1+b_1}{1-b_1}, & 0 \\ 0 & , -1 \end{pmatrix} + \frac{2m}{k} \begin{pmatrix} \dfrac{b_1+1}{b_1-1} . x^m, & \dfrac{b_1+1}{b_1-1} x^{m-k} \\ -x^{m+k} & , \quad -x^m \end{pmatrix} D_t .$$

*Le système $M(\lambda_1, \lambda_2; b_2)$ se transforme en $M(\lambda_1, \lambda_2; b_1)$.*

2) *Si $b_2 \neq \pm 1$, par le changement de générateurs $u_1 = P_2 . u_2$, où*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{b_2+1}{b_2-1} \end{pmatrix} + \frac{2m}{k} \begin{pmatrix} -x^m, & \dfrac{1+b_2}{1-b_2} x^{m-k} \\ x^{m+k}, & \dfrac{b_2+1}{b_2-1} x^m \end{pmatrix} D_t$$

*Le système $M(\lambda_1, \lambda_2; b_2)$ se transforme aussi en $M(\lambda_1, \lambda_2; b_1)$.*

*Démonstration.*

En désignant par $P_i^{-1}(x, D_t)$ l'opérateur inverse de $P_i(x, D_t)$, on peut vérifier que

$$P_1^{-1}(x, D_t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-b_1}{1+b_1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2m}{k} \begin{pmatrix} \dfrac{1-b_1}{1+b_1} x^m; & -x^{m-k} \\ \dfrac{b_1-1}{b_1+1} x^{m+k}. & x^m \end{pmatrix} D_t$$

et

$$P_2^{-1}(x, D_t) = \begin{pmatrix} 1 & , 0 \\ 0, & \dfrac{b_2-1}{b_2+1} \end{pmatrix} + \frac{2m}{k} \begin{pmatrix} x^m & , \quad x^{m-k} \\ \dfrac{1-b_2}{1+b_2} x^{m+k} & , \dfrac{1-b_2}{1+b_2} x^m \end{pmatrix} D_t .$$

Alors si nous écrivons (2.38) sous la forme :

$$M(\lambda_1, \lambda_2; b_1) : \begin{cases} t u_1 & = A_1(x, D_t^{-1}) u_1, \\ D_x D_t^{-1} u_1 & = B_1(x, D_t^{-1}) u_1 \end{cases}$$

et

$$M(\lambda_1, \lambda_2; b_2): \begin{cases} tu_2 = A_2(x, D_t^{-1})\, u_2, \\ D_x D_t^{-1} u_2 = B_2(x), D_t^{-1})\, u_2 \end{cases}$$

nous obtenons justement les formules de changement de générateurs :

$$\nabla P \,.\, D_t^{-2} = A_1 P - P A_2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \,.\, D_t^{-1} = B_1 P - P B_1,$$

avec $P = P_1$ (resp . $P = P_2$) et $\nabla P \equiv \frac{\partial}{\partial D_t^{-1}} P$, d'où le lemme 2. 10.

DÉFINITION 3. *Soient $k$, $m \in \mathbf{N}$, $0 < k < m$. On appelle $G(k, m)$ un domaine fondamental de $\mathbf{C}$ sous l'action du groupe engendré par*

$$\begin{cases} b \mapsto -b \\ \text{et} \\ b \mapsto b + \dfrac{2m}{k}, \end{cases} \tag{2.41}$$

*On pose*

$G^*(k, m) = G(k, m) - \{$*le réprésentant de* $o \in \mathbf{C}\}$.

DÉFINITION 4. *On appelle liste finale de déploiements du système $M_0$ un ensemble de déploiements vérifiant les propriétés suivantes :*

*— tout déploiement de $M_0$ est image réciproque par un changement de base convenable de l'un des déploiements de cette liste.*

*— la liste est minimale pour cette propriété.*

D'après les résultats précédents et la proposition (2.14) qui montre que tout déploiement de la base $X = \mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$ du système $M_o$ est image réciproque de l'un des déploiements de la base $\mathbf{C}$ du système $M_o$, nous avons

THÉORÈME 3. *Soit $M_o$ le système défini de la forme* (2.26). *Alors on peut choisir comme liste finale $F$ de déploiements de $M_o$ les déploiements suivants :*

*— Si* $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbf{Q} - \{0\}$,

$$F = \{\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2)\},$$

*— Si* $\lambda_1 - \lambda_2 = -\dfrac{k}{m} \in \mathbf{Q}$, $(k, m) = 1$, $0 < k < m$,

1) *Cas où $m + k$ est impair*

$$F = \{\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2);\ \mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2);\ M(\lambda_1, \lambda_2;\, b),\ b \in G(k, m)\},$$

2) *Cas où $m+k$ est pair (c'est-à-dire $m$ et $k$ sont impairs).*

$F = \{ \mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2); \mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2); M(\lambda_1, \lambda_2 ; b), b \in G^*(k, m); N(\lambda_1, \lambda_2)\}$

*Remarque 2.11.* Le système $(\mathcal{P}\lambda_1, \lambda_2)$ défini par (2.37) n'est pas à S. R. (au sens de [4]) donc le système $M_o$ à S. R. peut avoir déploiement nontrivial qui n'est pas à S. R.

*Remarque 2.12.* Il est facile de montrer que le lieu singulier du système $M(\lambda_1, \lambda_2 ; b)$ est

$$P(x,t) = \det (t\,\mathrm{I} - A_o(x))$$
$$= t^2 - x^{2m} = 0,$$

qui est une courbe à deux branches :

$$t_{1,2} = \pm x^m$$

d'ordres $e_1$, $e_2$ définis par

$$e_1 + e_2 = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$e_1 - e_2 = b(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Le lemme 2.9 équivaut à la propriété commutative des ordres $e_1$, $e_2$ ; le lemme 2,10 équivaut à la propriété fondamentale pour $e_1$, $e_2$ qui se changent modulo $\mathbf{Z}$ par le changement de générateurs.

Le lieu singulier du système $N(\lambda_1, \lambda_2)$ est

$$P(x, t) = t^2 - x^m = 0$$

qui est une courbe irréductible d'ordre $e = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Lorsque $(k, m) = (1, 2)$, les systèmes $M(\lambda_1, \lambda_2 ; b)$, $b \in G(1, 2)$ donnent toutes les intéractions analytiques stables de deux systèmes simples à lieu singulier lisse (voir [3]). Lorsque $(k, m) = 1,3)$, $N(\lambda_1, \lambda_2)$ est le système de Gauss – Manin de la fronce.

*II – Cas où $X = \mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$.*

Soit $M$ un déploiement de $M_0$ de la base $X = \mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$. D'après (2.1) – (2.3) on a :

$$M ; \begin{cases} tu = [A_0(x) + A_1 D_t^{-1}]u, \\ Dx_i\, D_t^{-1} u = B_i(x)u, \; i = 1,.., n, \end{cases} \qquad (2.1)_2$$

où les matrices $A_0(x)$, $A_1$, $B_i(x)$ vérifient les relations suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} [A_0(x), B_i(x)] = 0, \ i = 1,\dots, n. \\ -\dfrac{\partial A_0(x)}{\partial x_i} = [A_1, B_i(x)] + B_i(x), \\ [B_i(x), B_j(x)] = 0, \ i, j = 1,\dots, n, \\ \dfrac{\partial B_i(x)}{\partial x_j} - \dfrac{\partial B_j(x)}{\partial x_i} = 0, \ i \neq j. \end{array}\right. \qquad (2.2)_2$$

Par le changement de variable

$$t' = t - \frac{1}{2}\operatorname{trac} A_0(x),$$

on peut toujours supposer que

$$\operatorname{trac} A_0(x) = \operatorname{trac} B_i(x) = 0 \qquad (2.3)_2$$

*Remarque 2. 13.* Si $M$ est un déploiement nontrivial de $M_0$ de base $X = \mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$, alors on a toujours $A_0(x) \neq 0$, $B_i(x) \neq 0$, $i = 1,\dots, n$. Ensuite, par le même raisonnement que celui utilisé dans le lemme 2.2 on peut montrer l'existence des fonctions méromorphes $k_i(x)$, $i = 1,\dots, n$ telles que.

$$B_i(x) = k_i(x) \,.\, A_0(x), \ i = 1,\dots, n. \qquad (2.43)$$

Alors, en posant

$$A_0(x) = -\begin{pmatrix} s(x) & p(x) \\ q(x) & -s(x) \end{pmatrix},$$

$$B_i(x) = \begin{pmatrix} b_i(x) & c_i(x) \\ d_i(x) & -b_i(x) \end{pmatrix},$$

on a les relations:

$$\left\{\begin{array}{l} b_i(x) = k_i(x) \,.\, s(x), \\ c_i(x) = k_i(x) \,.\, p(x), \\ d_i(x) = k_i(x) \,.\, q(x). \end{array}\right. \qquad (2.44)$$

Comme dans le cas $n = 1$, pour déterminer $A_0(x)$, $B_i(x)$ on substitue (2.43) aux équations $(2.2)_2$ et on obtient:

— Dans le cas (2.17):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial q(x)}{\partial x_i} = k_i(x) \,.\, q(x), \ i = 1,\dots, n \\ \dfrac{\partial s(x)}{\partial x_i} = k_i(x)\,[s(x) + q(x)], \\ \dfrac{\partial p(x)}{\partial x_i} = k_i(x)\,[p(x) - 2 \,.\, s(x)] \end{array}\right. \qquad (2.45)$$

— Dans le cas (2.18) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (x)}{\partial x_i} = k_i(x) \cdot s(x), \ i = 1,\dots, n \\ \dfrac{\partial p(x)}{\partial x_i} = (1 + \lambda_1 - \lambda_2)\, k_i(x) p(x), \\ \dfrac{\partial q(x)}{\partial x_i} = (1 - \lambda_1 + \lambda_2)\, k_i(x)\, q(x). \end{cases} \tag{2.46}$$

PROPOSITION 2.14. *Soit $M$ un déploiement de $M_0$ de base $X = \mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$. Alors $M$ est image réciproque d'un déploiement $M'$ de base $X' = \mathbf{C}$ par un changement de base convenable $\varphi : X \to X'$, c'est-à-dire*

$$M = \varphi^*(M').$$

*Démonstration.*

On a les deux cas suivants:

1) Si $A_0(0) \neq 0$, alors les fonctions $k_i(x)$, $i = 1,\dots, n$ sont analytiques. Les équations $(2.45)_1$ (resp . $(2.46)_1$ ) impliquent l'existence d'une fonction analytique $k(x)$ telle que $k(0) = 0$ et $k_i(x) = \dfrac{\partial k(x)}{\partial x_i}$, $i = 1,\dots, n$.

Alors si on prend le changement de base

$$\varphi : X \to X' = \mathbf{C}$$
$$x \to \varphi(x) = k(x)$$

on a

$$M = \varphi_*(M')$$

ou $M'$ est défini par (2.21) (resp . (2.22)).

2) Maintenant considérons le cas $A_0(0) = 0$. Si $A_1$ est de la forme (2.17), par la même méthode que celle utilisée dans la partie $B$ nous pouvons démontrer que $s(x) = q(x) = 0$. Alors le changement de générateurs défini par (2.25) montre que le système $M_0$ n'a que des déploiements triviaux.

Enfin supposons que $A_1$ est de la forme (2.18). Alors les équations (2.46) nous donnent des solutions

$$\log (s(x) + C_1) = \frac{1}{1+\lambda_1-\lambda_2} \log (p(x) + C_2)$$
$$= \frac{1}{1-\lambda_1+\lambda_2} \log (q(x) + C_3),$$

où $C_1$, $C_2$, $C_3$ sont les constants arbitraires. Par conséquent

$$C_1 \cdot s(x) = C_2\, [p(x)]^{1/1+\lambda_1-\lambda_2} = C_3\, [q(x)]^{1/1-\lambda_1+\lambda_2} \tag{2.47}$$

L'anneau $C\{x_1, \dots, x_n\}$ étant factoriel, les fonctions $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ peuvent se décomposer en facteurs irréductibles. En comparant les facteurs irréductibles dans (2.47) et en tenant compte de (2.31) on peut trouver une fonction $\varphi(x)$ telle que

$$\begin{aligned} s(x) &= \beta \, . \, [\varphi(x)]^m , \\ p(x) &= \gamma \, . \, [\varphi(x)]^{m-k} , \\ q(x) &= \delta \, . \, [\varphi(x)]^{m+k} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Alors le changement de base

$$\varphi : X \to X' = \mathbf{C} . \tag{2.49}$$

Où $\varphi(x)$ est défini par (2.48) montre que l'on peut ramener le déploiement $M$ à l'un des déploiements considérés dans la proposition 2.7.

Main tenant nous pouvons caractériser tous les déploiements stables du système $M_0$ grâce au théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Soit $M_o$ un système de la forme (1.1).*

*a) Si $A_0 \neq 0$, le système $M_o$ a un déploiement versel $M_{ver}$ défini par (2.21) ou (2.22).*

*b) Si $A_o = 0$ et si $A_1$ est de la forme (2.17), le système $M_o$ est stable.*

*c) Si $A_o = 0$ et si $A_1$ est de la forme (2.18), alors pour qu'un déploiement $M$ de $M_o$ soit stable, il faut et il suffit qu'il soit image réciproque d'un des déploiements de la liste finale $F$ par une submersion (de sorbe que la liste finale $F$ est l'ensemble des déploiements stables à un nombre minimal de paramètres):*

*Démonstration.*

Les deux premières assertions étant évidentes, nous allons démontrer seulement l'assertion c).

Soit $M$ un déploiement du $M_o$ de la base $X = \mathbf{C}^n$. Alors d'après la définition de la liste finale $F$ il existe un déploiement $M' \in F$ de la base $X' = \mathbf{C}$ tel que

$$M = \varphi^*(M'), \tag{2.50}$$

où $\varphi : X \to X'$ est un changement de base convenable. Donc la conclusion de l'assertion c) signifie que $M$ est stable si et seulement si.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) \neq 0. \tag{2.51}$$

1. Supposons d'abord que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(0) \neq 0$. Pour abréger la démonstration on suppose que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0) \neq 0$, c'est-à-dire

$\varphi(x) = \varphi(x_1,\dots, x_n) = ax_1 + \dots,$

avec $a \neq 0$, $a \in \mathbf{C}$.

Prenons la restriction de $\varphi$ sur $x_1$ :

$$\varphi_1\ (x_1) \equiv \varphi/_{x_2 = \dots = x_n = 0}$$
$$= ax_1 + \dots,$$

et posons

$$M_1 \equiv M/_{(x_2,\dots, x_n)} M. \tag{2.52}$$

D'après (2.50) nous avons $M_1 = \varphi_1{}^* (M')$. D'autre part, puisque la fonction $\varphi_1$ est un isomorphisme analytique, son inverse $\psi = \varphi_1^{-1}$ existe, par conséquent,

$$M' = \psi^*\ (M_1). \tag{2.53}$$

Comme $M'$ appartient à $F$, le déploiement $M'$ est stable. D'où, en tenant compte de (2.53), on déduit que $M_1$ est stable. D'autre part, (2.52) montre que $M$ est le déploiement de $M_1$ de la base $(x_2,\dots, x_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$, on voit donc que $M$ est aussi stable.

2) Réciproquement, supposons que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ (0) = 0. \tag{2.54}$$

Considérons la fonction

$$\Phi : X \times Z = \mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \to X' = \mathbf{C}$$
$$(x, z) \mapsto \Phi\ (x, z)$$

définie par

$$\Phi(x, z) = \varphi(x) - z \tag{2.55}$$

Notons

$$\overline{M} = \Phi^*(M'). \tag{2.56}$$

D'après (250) et (2.56) le système $\overline{M}$ est un déploiement de $M$ de la base $Z$. Nous allons démontrer que $\overline{M}$ est un déploiement nontrivial de $M$.

En effet, si $\overline{M}$ était le déploiement trivial de $M$, il existerait une rétraction $f : X \times z \to X$ telle que

$$\overline{M} = f^*(M). \tag{2.57}$$

Désignons par $\mathcal{B}if\ (M) \in$ resp $\mathcal{B}if\ (M')$, $\mathcal{B}if\ (\overline{M})$ l'ensemble des points de bifurcation de lieu singulier de $M$ (resp. $M'$ $\overline{M}$). D'après (2.50) et (2.57) nous avons

$$\mathcal{B}if\ (M) = \varphi^{-1}\ (\mathcal{B}if\ (M'))$$
$$\text{et } \mathcal{B}if\ (\overline{M}) = \varphi^{-1}\ (\mathcal{B}if\ (M)).$$

le système $M' \in F$ étant stable, on a $\mathcal{B}if\ (M') = 0$. Ceci implique

$$\mathcal{B}if\ (M) = \varphi^{-1}\ (0)$$

$$\text{et } \mathcal{B}if\ (M) = \phi^{-1}\ (0). \tag{2.58}$$

Par ailleuns,

$$\Phi^{-1}\ (0) = \text{graf}\ (\varphi) \subset X \times Z, \tag{2.59}$$

parce que $\Phi$ est définie par (2.55). Alors en désignant par $\pi : x \times Z \to Z$ la projection sur $Z$, nous savons que $d\varphi\ (0) = 0$ si et seulement si $\pi/_{\text{graf}(\varphi)}$ n'est pas une submersion. En tenant compte de (2.54) et (2,59), on en déduit que.

$$\pi/_{\phi-1(0)} \text{ n'est pas une submersion.} \tag{2.60}$$

D'autre part, en utilisant (2.57) nous avons

$$\mathcal{B}if\ (\bar{M}) = f^{-1}\ (\mathcal{B}if\ (M)) = f^{-1}\ (\varphi^{-1}\ (0)) \supset f^{-1}\ (0),$$

et d'après (2.58)

$$\phi^{-1}\ (0) \supset f^{-1}\ (0). \tag{2.61}$$

Puisque $f$ est une rétraction, le théorème de fonction implicite montre que $\pi/_{f^{-1}(o)}$ est une submersion, contrairement aux conditions (2.60) et (2.61).

BIBLIOGRAPHIE


[1] F. Pham, *Déploiements de singularités de systèmes holonomes*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. T.289, 24/9/1979, p. 179-182.

[2] B. Malgrange, *Déformations de systèmes différentiels et microdifférentiels*, Séminaire E.N.S., 1979-1980.

[3] Nguyen Huu Duc, *Systèm de Gauss-Manin à bord et stabilité de l'interaction analytique*, C.R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math. T.291, 29/9/1981, p.194-197.

[4] M. KashiWara and T. KaWai, *On holonomic systems of microdifferential equation*, III. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 17 (1981), p. 813 — 979.



*Manuscrit reçu le 13 avril 1984*



INSTITUTE OF MATHEMATICS, P.O. BOX 631, 10000 BO HO, HANOI, VIETNAM.