ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 10 No2 (1985)

CONDITION D'EXISTENCE DU PRODUIT DE DEUX DISTRIBUTIONS

HA TIEN NGOAN

§1. INTRODUCTION

Il est bien connu que le produit de deux distributions existe (par définition) si l'une d'elles est infiniment différentiable. Des propriétés locales des distributions on déduit aussi que leur produit existe, lorsque leurs supports singuliers ne se croisent pas.

Dans le cas général, avant d'étudier l'existence, il faut d'abord préciser ce qu'on entend par produit de deux distributions. En s'appuyant sur les propriétés de transformation de Fourier L. Hörmander a défini dans [1] le produit de deux distributions $u(x)$ et $v(x)$ de $\mathscr{S}'(R_n)$ par la formule suivante

$$u.\, v \equiv (2\pi)^{-\frac{n}{2}} F^{-1}(\hat{u}(\xi) * \hat{v}(\xi)), \tag{1}$$

où

$$\hat{\varphi}(\xi) = F(\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx,\ \varphi \in C_0^\infty(R_n).$$

et F^{-1} est la transformation de Fourier inverse, à condition que l'intégrale de convolution $\hat{u}(\xi) * \hat{v}(\xi)$ converge absolument. Dans le même article L. Hörmander a trouvé des conditions imposées aux fronts d'onde WF pour garantir l'existence du produit $u.v$. Ces conditions sont de la forme suivante:

$$WF(u) + WF(v) \subset R_n \times (R^n \setminus \{0\}) \tag{2}$$

ou, d'une façon équivalente:

$$\forall (x, \xi) \in R_n \times (R^n \setminus \{0\}) \left.\begin{array}{r} \text{ou bien } (x, \xi) \notin WF(u) \\ \text{ou bien } (x, -\xi) \notin WF(v) \end{array}\right\} \tag{3}$$

Pour $u(x) \in \mathcal{D}'(R_n)$ le front d'onde $WF(u)$ est défini par

$$WF(u) = \bigcap_{\substack{A \in CL^0(R_n) \\ \varphi \in C_o^\infty(R_n) \\ A(\varphi u) \in C^\infty(R_n)}} \text{Char}\,(A\varphi) \tag{4}$$

où $CL^s(R_n)$ désigne l'ensemble des opérateurs pseudo différentiels classiques d'ordre s,

$$\text{Char}\,(A\varphi) = \{(x, \xi) \in R_n \times (R^n \setminus \{0\});\ \varphi(x)\, a_o(x, \xi) = 0\} \tag{5}$$

et $a_o(x, \xi)$ est le symbole principal de l'opérateur A.

Malgré tout son intérêt, le résultat de L. Hőrmander ne peut être considéré comme un critère universel. En effet, dans le cas, où $n = 1$, $u(x) = v(x) = \theta(x)$, $\theta(x)$ étant la fonction de Heaviside, il est facile de vérifier que

$$WF(u) = WF(v) = \{(0, \lambda), (0, -\lambda);\ \lambda > 0\}.$$

Bien que les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ ne satisfassent pas à la condition (2), leur produit existe et n'est autre que la fonction $\theta(x)$.

Le but de cette note est d'étendre la condition (2) afin d'obtenir un critère universel. Nous allons tout d'abord mo fier la définition (1) de L. Hörmander pour obtenir une autre p us générale, tout en restant encore naturelle.

Soit $\omega(x) \in C_o^\infty(R_n)$ une fonction telle que $\int \omega(x)\, dx = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{D}'(R_n)$ posons $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\, \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ et $u_\varepsilon = u * \omega_\varepsilon$ (convolution de $u(x)$ et $\omega_\varepsilon(x)$).

DÉFINITION 1. *Nous dirons que le produit de deux distributions $u(x)$ et $v(x)$ existe si lorsque $\varepsilon \to 0$ la limite $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x)$ dans la topologie de $\mathcal{D}'(R_n)$ existe et ne dépend pas du choix de $\omega(x)$. Cette limite s'appelle alors le produit $(u.v)(x)$ des deux distributions considérées.*

Nous allons établir pour le produit ainsi défini une condition d'existence qui contient comme cas particuliers la condition (2) et l'exemple considéré plus haut. Cette condition repose sur une généralisation de la notion de front d'onde.

§2. ESPACES DE TYPE (L). FRONT D'ONDE

Soit M un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(R_n)$ contenant $C^\infty(R_n)$. Désignons par M_c l'ensemble des éléments de M à support compact. Si N est un espace vectoriel topologique on désigne par N' l'espace dual muni de la topologie de convergence faible sur les compacts. Ainsi on a $f_m \to 0$ dans N' si et seulement si pour tout compact $K \subset N$.

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{g \in K} |\langle f_m, g \rangle| = 0.$$

DÉFINITION 2. *On appelle espace de type (L) tout espace M vérifiant les conditions suivantes*

1) M est local et on a les inclusions topologiques suivantes

$$C^\infty(R_n) \subset M \subset \mathcal{D}'(R_n).$$

La localité de M signifie que

$$u \in M \Leftrightarrow u \in \mathcal{D}'(R_n),\ \varphi u \in M \ \forall \varphi \in C_0^\infty(R_n);$$

2) Pour tout $u \in M$: $u_\varepsilon \to u$ dans la topologie de M lorsque $\varepsilon \to 0$;

3) Tout opérateur pseudodifférentiel classique $A \in CL^0(R_n)$ transforme continûment M_c dans M.

Il est facile de vérifier que chacun des espaces suivants est de type *(L)*: $C^\infty(R_n)$; $\mathcal{D}'(R_n)$; $L^p_{loc}(R_n)$, $1 < p < \infty$; $H^s_{loc}(R_n)$; $H^{s,p}_{loc}(R_n)$, $1 < p < \infty$, où

$$H^{s,p}_{loc}(R_n) = \{ u \in \mathcal{D}'(R_n) ;\ A(\varphi u) \in L^p_{loc}(R_n),\ \forall A \in cL^s(R_n),\ \varphi \in C_0^\infty(R_n) \}$$

Suivant L. Hőrmander, nous introduisons maintenant la notion de front d'onde WF_M relatif à un espace M de type (L).

DÉFINITION 3. *Pour $u \in D'(R_n)$ nous posons*

$$WF_M(u) = \bigcap_{\substack{A \in CL^0(R_n) \\ \varphi \in C_0^\infty(R_n) \\ A(\varphi u) \in M}} Char\,(A\varphi) \tag{6}$$

où Char $(A\varphi)$ est défini par (5).

Evidemment $WF_M(u)$ est un ensemble fermé dans $R_n \times (R^n \setminus \{0\})$ et est conique par rapport à ξ.

Remarque 1. 1) Il est clair que si $M = C^\infty(R_n)$ alors $WF_M(u)$ coïncide avec $WF(u)$;

2) Si $M = H^s_{loc}(R_n)$ on retrouve le cas $WF_s(u)$ introduit par L. Hőrmander dans [2];

3) Si $M = D'(R_n)$ nous avons $WF_M(u) = \phi$ pour toute distribution $u \in D'(R_n)$.

La proposition suivante établit un lien entre WF_M et WF.

PROPOSITION 1 *Soit $u \in D'(R_n)$. Alors $(x_0, \xi_0) \notin WF_M(u)$ si et seulement si $u = u_1 + u_2$, où $u_1 \in M$ et $(x_0, \xi_0) \notin WF(u_2)$.*

Preuve. a) Soit $u = u_1 + u_2$, où $u_1 \in M$ et $(x_0, \xi_0) \notin WF(u_2)$. Montrons que $(x_0, \xi_0) \notin WF_M(u)$.

En vertu de la définition (4) il existe $A \in CL^0(R_n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(R_n)$ tels que $A(\varphi u_2) \in C^\infty(R_n)$ et $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{Char}\,(A\varphi)$. Comme $A(\varphi u_1) \in M$ on en déduit grâce à la Définition 2, $A(\varphi u) = A(\varphi u_1) + A(\varphi u_2) \in M$. On obtient donc par (6) $(x_0, \xi_0) \notin WF_M(u)$.

b) Soit $(x_0, \zeta_0) \notin WF_M(u)$. Alors il existe $A \in CL^0(R_n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(R_n)$ tels que $A(\varphi u) \in M$ et $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{Char}\,(A\varphi)$. On en déduit par (5) que $\varphi(x_0) \neq 0$ et $a_0(x_0, \xi^0) \neq 0$.

A l'aide de la *parametrix*, si nécessaire, pour l'opérateur A dans un certain voisinage conique Γ du point (x_0, ξ_0), nous pouvons supposer que son symbole total est identique à 1 dans un voisinage conique $\Gamma_1 \subset\subset \Gamma$ du point (x_0, ξ_0). Soit $\chi(\xi)$ une fonction de $C^\infty(R, n)$ homogène d'ordre o en ξ, $\chi(\xi) = 1$ dans on certain voisinage conique $\Gamma_2 \subset\subset \Gamma_1$ et $\chi(\xi) = 0$ en dehors de Γ_1. Alors pour chaque fonction $\psi(x) \in C_0^\infty(R_n)$ avec $\psi(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$ dans un voisinage du point x_0, l'opérateur $\chi(D)\psi(x)A - \chi(D)\psi(x)$ est d'ordre $-\infty$. Puisque $A(\varphi u) \in M$ et $\chi(D)\psi(x)A(\varphi u) \in M$ on a $\chi(D)\psi\varphi u \in M$. D'autre part nous avons l'identité évidente

$$u = \chi(D)(\psi\varphi u) + [(I - \chi(D))\,(\psi\varphi u) + (1 - \psi\varphi)u].$$

Si nous posons $u_1 = \chi(D)(\psi\varphi u)$, alors $u_1 \in M$. Puisque $\varphi\psi = 1$ dans un voisinage du point x_0 et que $\chi(\xi) = 1$ dans Γ_2 il en résulte que $(x_0, \xi_0) \notin WF(u_2)$, où $u_2 = u - u_1$ est la fonction entre crochets dans l'expression de u.

PROPOSITION 2. *Soit $(x_0\ \xi_0) \notin WF(u)$. Alors il existe un voisinage V_{x_0} du point $x_0 \in R_n$ et un voisinage conique Γ_{ξ_0} du point $\xi_0 \in R^n \setminus \{0\}$ tels que, pour toutes fonctions $\psi(x) \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(R_n)$ et $\chi(\xi) \in C^\infty(R^n)$ avec $\chi(\xi) = 0$ en dehors de Γ_{ξ_0}, $0 \leqslant \chi(\xi) \leqslant 1$ dans Γ_{ξ_0}, on ait*

1. $\chi(D)\,(\psi u) \in C^\infty(R_n)$, $\chi(D)[\varphi(\psi u)] \in C^\infty(R_n)$,
2. *Lorsque* $\varepsilon \to 0$

$$\chi(D)(\psi u)_\varepsilon \to \chi(D)(\psi u)$$

$$\chi(D)[\varphi(\psi u)_\varepsilon] \to \chi(D)[\varphi(\psi u)]$$

dans la topologie de $C^\infty(R_n)$

Preuve. Si $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$, alors selon L. Hörmander [1] il y a un voisinage V_{x_0} du point $x_0 \in R_n$ et un voisinage conique Γ_{ξ_0} du point $\xi_0 \in R_n \setminus \{0\}$ tels que pour toutes fonctions $\psi(x) \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(R_n)$, les transformations de Fourier $\widehat{\psi u}(\xi)$ et $\widehat{\varphi(\psi u)}(\xi)$ décroissent rapidement dans Γ_{ξ_0}. Si $\chi(\xi)$

satisfait aux conditions ci-dessus alors $\chi(\xi)\widehat{\psi u}(\xi)$ et $\chi(\xi)\widehat{\varphi(\psi u)}(\xi)$ décroissent rapidement dans l'espace R_n tout entier. Donc les fonctions

$$\chi(D)[\psi u] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int e^{ix\xi}\chi(\xi)\widehat{\psi u}(\xi)\, d\xi.$$

$$\chi(D)[\varphi(\psi u)] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int e^{ix\xi}\chi(\xi)\widehat{\varphi(\psi u)}(\xi)\, d\xi.$$

appartiennent à $C^\infty(R_n)$, Puisque

$$\chi(D)[(\psi u)_\varepsilon] = [\chi(D)(\psi u)]_\varepsilon$$

les fonctions $\chi(D)[\Psi u)_\varepsilon]$ convergent vers $\chi(D)(\Psi u)$ dans la topologie de $C^\infty(R_n)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Montrons maintenant que dans la même topologie on a

$$\chi(D)[\varphi(\Psi u)_\varepsilon] \to \chi(D)[\varphi(\Psi u)].$$

En effet, pour tout multiple $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ on a

$$D_x^\alpha\{\chi(D)[\varphi(\Psi u)_\varepsilon] - \chi(D)[\varphi(\Psi u)]\} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int e^{ix\xi}\chi(\xi)(i\xi)^\alpha\left[\widehat{\varphi(\Psi u)}_\varepsilon(\xi) - \widehat{\varphi(\Psi u)}(\xi)\right] d\xi. \tag{7}$$

Mais il est facile de voir que pour tout point $\xi \in R_n$

$$\widehat{\varphi(\Psi u)}_\varepsilon(\xi) \to \widehat{\varphi(\Psi u)}(\xi)$$

et que l'intégrale

$$\int \chi(\xi)\left|(i\,\xi)^\alpha\left[\widehat{\varphi(\Psi u)}_\varepsilon(\xi) - \widehat{\varphi(\Psi u)}(\xi)\right]\right| d\xi$$

est uniformément bornée par rapport à ε. En faisant tendre ε vers zéro dans (7) on obtient le résultat désiré.

PROPOSITION 3. *Soit $(x_0, \xi_0) \notin WF_M(u)$. Alors il existe un voisinage V_{x_0} du point $x_0 \in R_n$, un voisinage conique Γ_{ξ_0} du point $\xi_0 \in R^n \setminus \{0\}$ tels que, pour toutes fonctions $\Psi(x) \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(R_n)$ et $\chi(\xi) \in C^\infty(R_n)$ avec $\chi(\xi) = 0$ en dehors Γ_{ξ_0}, $0 \leqslant \chi(\xi) \leqslant 1$ dans Γ_{ξ_0}, on ait*

1) $\chi(D)(\Psi u) \in M$, $\quad \chi(D)[\varphi(\Psi u)] \in M$

2) *Lorsque* $\varepsilon \to 0$

$$\chi(D)(\Psi u)_\varepsilon \to \chi(D)(\Psi u),$$
$$\chi(D)[\varphi(\Psi u)_\varepsilon] \to \chi(D)[\varphi(\Psi u)]$$

dans la topologie de M,

Preuve. Soit $(x_0, \xi_0) \notin WF_M(u)$. D'après la Proposition 1 on peut écrire $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in M$ et $(x_0\ \xi_0) \notin WF(u_2)$. Le résultat découle de la Proposition 2 et de la linéarité de l'opérateur $\chi(D)$.

Le résultat principal de cette note est le théorème suivant :

THÉORÈME. *Soient $u(x)$, $v(x)$ deux distributions de $\mathcal{D}'(R_n)$. Alors, pour que le produit de $u(x)$ et $v(x)$ existe il suffit qu'il y ait pour tout $(x, \xi) \in R_n \times (R_n \setminus \{0\})$ un espace M de type (L) dépendant éventuellement de (x, ξ) et satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) *L'espace $(M_c)'$ est aussi de type (L),*

2) *ou bien $(x, \xi) \notin WF_M(u)$ et $(x, -\xi) \notin WF_{(M_c)'}(v)$, ou bien $(x, \xi) \notin WF_{(M_c)'}(u)$ et $(x, -\xi) \notin WF_M(v)$.*

$$\left.\begin{array}{l} \text{ou bien } (x, \xi) \notin WF_M(u) \text{ et } (x, -\xi) \notin WF_{(M_c)'}(v), \\ \text{ou bien } (x, \xi) \notin WF_{(M_c)'}(u) \text{ et } (x, -\xi) \notin WF_M(v). \end{array}\right\} \quad (8)$$

Remarque 2. Cette condition est une généralisation naturelle de celle de L. Hörmander. En effet, pour obtenir (3) il suffit de prendre dans (8) $M = C^\infty(R_n)$.

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin de la proposition suivant.

PROPOSITION 4. *Soit M un espace de type (L) tel que $(M_c)'$ le soit aussi. Alors :*

1. Pour tous $u(x) \in M$, $v(x) \in (M_c)'$ le produit $(uv)(x)$ existe au sens de la Définition 1, et

$$\langle uv, \varphi \rangle = \langle v, \varphi u \rangle \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(R_n) \tag{9}$$

2. Le produit défini par (9) est une transformation continue de $M \times (M_c)'$ dans $\mathcal{D}'(R_n)$.

Preuve. Soit $u_\varepsilon = u * w_\varepsilon$, $v_\varepsilon = v * w_\varepsilon$. Montrons que lorsque $\varepsilon \to 0$ la limite $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \langle u_\varepsilon(x)\, v_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle$ existe pour toute $\varphi(x) \in C_0^\infty(R_n)$. Par définition on a

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans la topologie de } M,$$
$$v_\varepsilon \to v \text{ dans la topologie de } (M_c)'.$$

Posons $K = \{\varphi u_\varepsilon\}$. Evidemment K est un ensemble relativement compact dans M_c. Nous avons

$$\lim_{\varepsilon \to} \langle u_\varepsilon v_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle v_\varepsilon, \varphi u_\varepsilon \rangle =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \langle v_\varepsilon - v, \varphi u_\varepsilon \rangle + \lim_{\varepsilon \to 0} \langle v, \varphi u_\varepsilon \rangle.$$

D'autre part

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle v, \varphi u_\varepsilon \rangle = \langle v, \varphi u \rangle,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\langle v_\varepsilon - v, \varphi v_\varepsilon \rangle| \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{w \in K} |\langle v_\varepsilon - v, w \rangle| = 0:$$

ce qui prouve la première assertion de la proposition. La deuxième peut se démontrer d'une façon analogue.

Preuve du Théorème. En vertu de la propriété locale des distributions il suffit de montrer que pour chaque $x_0 \in R_n$ il y a un voisinage U_{x_0} du point x_0 tel que, pour toute fonction $\varphi(x) \in C_0^\infty(U_{x_0})$, la limite $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \langle v_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle$ existe. Pour cela, soit x_0 un point fixé. Par hypothèse, à chaque $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ on peut associer un espace $M^{(\xi)}$ de type (L) tel que l'espace $\left(M_c^{(\xi)}\right)$ soit aussi de type (L) et que la condition (8) soit satisfaite. Alors on peut trouver un voisinage V_ξ du point x_0 et un voisinage conique Γ_ξ du point ξ comme indiqués dans la Proposition 3. Du recouvrement infini $U\{\Gamma_\xi : \xi \in R_n \setminus \{0\}\} = R_n \setminus \{0\}$ on peut extraire un recouvrement fini $U\{\Gamma_{\xi(j)} : j = 1, \ldots, m\} = R_n \setminus \{0\}$. Utilisant la partition de l'unité on obtient des fonctions $x_j(\xi)$ telles que $\chi_j(\xi) \in C^\infty(R_n)$, $\chi_j(\xi) = 0$ en dehors de $\Gamma_\xi(j)$ et $\sum\limits_{j=1}^m \chi_j^2(\xi) = 1$. Posons

$$V_{x_0} = \bigcap_{j=1}^m V_\xi(j)$$

Pour le voisinage U_{x0} du point x_0 on peut choisir un U tel que $U \subset\subset V_{x_0}$. Soit $\psi(x) \in C_0^\infty(V_{x0})$ telle que

$$U_{x0} \subset\subset \{x \in V_{x_0}; \psi(x) = 1\}.$$

Alors, pour toute fonction $\varphi(x) \in C_0^\infty(U_{x_0})$ au moins l'une des assertions suivantes est vraie:

A) Ou bien

$$\chi_j(D)[\psi u] \in M^{(j)}, \qquad \chi_j(D)[\varphi(\psi u)] \in M^{(j)},$$

$$\chi_j(-D)[\psi v] \in (M_c^{(j)})', \qquad \chi_j(-D)[\varphi(\psi v)] \in (M_c^{(j)})';$$

$$\left.\begin{array}{l} \chi_j(D)[(\psi u)_\varepsilon] \to \chi_j(D)[\psi u] \\ \chi_j(D)[\varphi(\psi u)_\varepsilon] \to \chi_j(D)[\varphi(\psi u)] \end{array}\right\} \text{dans la topologie de } M^{(j)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \chi_j(-D)[(\psi v)_\varepsilon] \to \chi_j(-D)[\psi v] \\ \chi_j(-D)[(\varphi(\psi v)_\varepsilon] \to \chi_j(-D)[\varphi(\psi v)] \end{array}\right\} \text{dans la topologie de } (M_c^{(j)})'$$

B) Ou bien

$$\chi_j(D)[\psi u] \in (M_c^{(j)})', \qquad \chi_j(D)[\varphi(\psi u)] \in (M_c^{(j)})',$$

$$\chi_j(-D)[\psi v] \in M^{(j)}, \qquad \chi_j(-D)[\varphi(\psi v)] \in M^{(j)},$$

$$\left.\begin{array}{l}\chi_j(D)\ [(\psi u)_\varepsilon] \ \to\ \chi_j(D)\,[\psi u] \\[2ex] \chi_j(D)\,[\varphi(\psi u)_\varepsilon] \ \to\ \chi_j(D)\,[\varphi(\psi u)]\end{array}\right\}\ \text{dans la topologie de } (M_c^{(j)})\cdot$$

$$\left.\begin{array}{l}\chi_j(-D)\ [(\psi v)_\varepsilon] \ \to\ \chi_j(-D)\,[\psi v] \\[2ex] \chi_j(-D)\,[\varphi(\psi v)_\varepsilon] \ \to\ \chi_j(-D)\,[\varphi(\psi v)]\end{array}\right\}\ \text{dans la topologie de } M^{(j)}$$

où, pour simplifier, $M^{(j)}$ au lieu de $M^{(\xi^{(j)})}$.

Grâce à (10), pour toute fonction $\varphi(x) \in C_0^\infty(U_{x_0})$ et pour tout ε assez petit nous avons

$$\langle\, u_\varepsilon(x)\, v_\varepsilon(x),\ \varphi(x)\rangle = \langle(\psi u)_\varepsilon\ (x)\ \ (\psi v)_\varepsilon\,(x),\ \varphi(x)\,\rangle \tag{11}$$

En utilisant l'égalité de Parseval transformons maintenant la deuxième partie de (11.) comme suit :

$$\langle\, (\psi u)_\varepsilon\ \ (\psi v)_\varepsilon\,,\ \varphi\,\rangle = \int (\psi u)_\varepsilon\,(x)\ (\psi v)_\varepsilon\,(x)\ \varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \widehat{(\psi u)}_\varepsilon\ (\xi)\ \widehat{\varphi(\psi v)}_\varepsilon\ (-\xi)\ \mathrm{d}\xi = \int \Big[\ \sum_{j=1}^{m} \chi_j^2(\xi)\ \Big]\,\widehat{(\psi u)}_\varepsilon\ (\xi)\ \widehat{\varphi(\psi v)}_\varepsilon\ (-\xi)\ \mathrm{d}\xi =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int \widehat{\chi_j(D)\ (\psi u)_\varepsilon}\ \ (\xi)\ \ \widehat{\chi_j(-D)\,[\varphi(\psi v)_\varepsilon\,]}\,(-\xi)\ \mathrm{d}\xi. \tag{12}$$

Nous allons montrer que pour chaque j, lorsque $\varepsilon \to 0$ l'intégrale

$$\int \widehat{\chi_j\,(D)\ (\psi u)_\varepsilon}\ \ (\xi)\ \ \widehat{\chi_j(-D)\,[\varphi(\psi v)_\varepsilon}\ (-\xi)\ \mathrm{d}\xi$$

converge à une valeur indépendante du choix de la fonction $\omega(x)$.

Fixons un j. Alors au moins l'une des assertions A et B, soit par exemple A, est vraie. Donc quand $\varepsilon \to 0$ nous avons

$$\chi_j\,(D)\ \ ((\psi u)_\varepsilon\,)\ \ \to\ \ \chi_j(D)\ (\psi u) \tag{13}$$

dans la topologie de $M_{(j)}$

Considérons maintenant l'expression $\chi_j(-D)[\varphi(\psi v)_\varepsilon\,]$. Evidemment

$$\chi_j(-D)\,(\varphi(\psi\, v)_\varepsilon\,) = \varphi\,\chi_j\,(-D)\,((\psi\, v)_\varepsilon\,) + [\chi_j\,(-D),\varphi]((\psi\, v)_\varepsilon\,) \tag{14}$$

où $[A,\ B]$ désigne le commutateur des deux opérateurs A et B. Soit $\psi_1(x)$ une fonction de $C_0^\infty(R_n)$ égale à 1 dans un certain voisinage de l'ensemble V_{x_0}. Cela signifie que pour ε assez petit nous avons

$$(\psi\, v)_\varepsilon\,(x) = \psi_1(x)(\psi\, v)_\varepsilon\,(x). \tag{15}$$

Par suite,

$$[\chi_j(-D),\varphi]((\psi v)_\varepsilon)=[\chi_j(-D),\varphi](\psi_1(\psi v)_\varepsilon)=$$
$$=\{\psi_1[\chi_j(-D,\varphi]+[[\chi_j(-D),\varphi],\psi_1]\}((\psi v)_\varepsilon). \tag{16}$$

En utilisant (15) et la définition du commutateur nous pouvons obtenir pour tout entier N:

$$\chi_j(-D)(\varphi(\psi v)_\varepsilon)=\varphi\chi_j(-D)((\varphi v)_\varepsilon)+\psi_1[\chi_j(-D),\varphi]((\psi v)_\varepsilon)+$$
$$+\psi_1[[\chi_j(-D),\varphi],\psi_1]((\psi v)_\varepsilon)+\dots+$$
$$+\psi_1[\dots[[\chi_j(-D),\underbrace{\varphi],\psi_1],\dots,\psi_1}_{(N-1)\text{ fois}}]((\psi v)_\varepsilon)+$$
$$+[\dots[[\chi_j(-D),\underbrace{\varphi],\psi_1],\dots,\psi_1}_{N\text{ fois}}](\psi v)_\varepsilon. \tag{17}$$

De (17) et de l'égalité de Parseval il résulte que

$$\int\widehat{\chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon}(\xi)\,\overline{\chi_j(-D)[\varphi(\psi v)_\varepsilon]}(-\xi)d\xi=$$
$$=\langle\chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon\ \chi_j(-D)(\psi v)_\varepsilon,\varphi\rangle+$$
$$+\langle\chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon[\chi_j(-D),\varphi]((\psi v)_\varepsilon),\psi_1\rangle+$$
$$+\langle\chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon[[\chi_j(-D),\varphi],\psi_1((\psi v)_\varepsilon),\psi_1\rangle+\dots+$$
$$+\langle\chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon[\dots[[\chi_j(-D),\underbrace{\varphi],\psi_1],\dots,\psi_1}_{(N-1)\text{fois}}](\psi v)_\varepsilon),\psi_1\rangle+$$
$$+\int\widehat{\chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon}(\xi)\,\overline{[\dots[[\chi_j(-D),\underbrace{\varphi],\psi_1],\dots,\psi_1}_{N\text{ fois}}]((\psi v)_\varepsilon}\,)(-\xi)d\xi. \tag{18}$$

Puisque

$$\operatorname{supp}\varphi\subset\subset\{x;\quad\psi(x)=1\},$$
$$\operatorname{supp}\psi\subset\subset\{x;\quad\psi_1(x)=1\},$$

nous avons pour tout k $(1\leqslant k\leqslant N-1)$:

$$[\dots[[\chi_j(-D),\underbrace{\varphi],\psi_1],\dots,\psi_1}_{k\text{ fois}}]\quad((\psi v)_\varepsilon)=$$
$$=\chi_j(-D)(\varphi(\psi v)_\varepsilon)+\psi_2^{(k)}(x)\,\chi_j(-D)(\psi(\psi v)_\varepsilon)+$$
$$+\psi_3^k(x)\,\chi_j(-D)((\psi v)_\varepsilon), \tag{19}$$

où $\psi_2^{(k)}(x)$ et $\psi_3^{(k)}(x)$ appartiennent à $C_0^\infty(R_n)$. D'où, à cause de la condition A,

$$[\dots[[\chi_j(-D),\varphi],\underbrace{\psi_1],\dots,\psi_1}_{k\text{ fois}}]\ ((\psi v)_\varepsilon)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\dots[[\chi_j(-D),\underbrace{\varphi],\psi_1],\dots,\psi_1}_{k\text{ fois}}] \tag{20}$$

dans la topologie de $(M_c^{(j)})'$, lorsque $\varepsilon\to 0$, pour tout k $(1\leqslant k\leqslant N-1)$.

En vertu de (13), (20) et la Proposition 4 on peut vérifier sans peine que chacune des limites suivantes existe et ne dépend pas du choix de la fonction $\omega(x)$:

$$\left\langle \chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon \chi_j(-D)(\psi v)_\varepsilon, \varphi \right\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\langle \chi_j(D)(\psi u)\chi_j(-D)(\psi v), \varphi \right\rangle,$$

$$\left\langle \chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon [\chi_j(-D), \varphi]((\psi v)_\varepsilon), \psi_1 \right\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\langle \chi_j(D)(\psi u)[\chi_j(-D), \varphi](\psi v), \psi_1 \right\rangle,$$

$$\left\langle \chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon [[\chi_j(-D), \varphi], \psi_1]((\psi v)_\varepsilon), \psi_1 \right\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\langle \chi_j(D)(\psi u)[[\chi_j(-D), \varphi], \psi_1](\psi v), \psi_1 \right\rangle,$$

$$\left\langle \chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon [\dots[[\chi_j(-D), \underbrace{\varphi], \psi_1], \dots, \psi_1}_{(N-1)\text{ fois}}]((\psi v)_\varepsilon), \psi_1 \right\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\langle \chi_j(D)(\psi u)[\dots[[\chi_j(-D), \underbrace{\varphi], \psi_1], \dots, \psi_1}_{(N-1)\text{ fois}}](\psi v); \psi_1 \right\rangle.$$

Pour achever la preuve, occupons-nous du dernier terme au second membre de (17). Il est facile de montrer que pour tout $\xi \in R_n$ fixé

$$\left|\begin{array}{c} \chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon(\xi) \to \widehat{\chi_j(D)(\psi u)}(\xi) \\ \overline{[\dots[[\chi_j(-D), \underbrace{\varphi], \psi_1], \dots, \psi_1}_{N\text{ fois}}]((\psi v)_\varepsilon)}(-\xi) \to \\ \to [\dots[[\chi_j(-D), \underbrace{\varphi], \psi_1], \dots, \psi_1}_{N\text{ fois}}](\psi v)(-\xi). \end{array}\right.$$

Comme $\psi(x) \in C_0^\infty(V_{x_0})$ et

$$\widehat{\chi_j(D)(\psi v)_\varepsilon}(\xi) = \chi_j(\xi)\widehat{(\psi u)_\varepsilon}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\chi_j(\xi)\widehat{\omega}(\varepsilon\xi)\widehat{\psi u}(\xi)$$

il existe $N_1 \geqslant 0$ tel que

$$\|\chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon\|_{H^{-N_1}(R_n)} \leqslant C_1, \tag{21}$$

où C_1 ne dépend pas de ε et $H^s(R_n)$ est l'espace de Sobolev muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^s(R_n)} = \int(1 = |\xi|^2)^s |u(\xi)|^2 d\xi.$$

Puisque $\widehat{(\psi v)}_\varepsilon(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{\omega}(\varepsilon\xi)\widehat{\psi v}(\xi)$, il y a $N_2 > 0$ tel que

$$\|(\psi v)_\varepsilon\|_{H^{-N_2}(R_n)} \leqslant C_2,$$

où C_2 ne dépend pas non plus de ε.

D'après le Théorème de l'ordre du commutateur des opérateurs pseudodifférentiels (voir [3]), l'opérateur

$$[\dots[[\chi_j(-D), \underbrace{\varphi], \psi_1], \dots, \psi_1]}_{N \text{ fois}}((\psi v)_\varepsilon)$$

est d'ordre $-N$. Par suite

$$\| [\dots[[\chi_j(-D), \underbrace{\varphi], \psi_1], \dots, \psi_1]}_{N \text{ fois}} \|_{H^{N-N_2}(R_n)} ((\psi v)_\varepsilon) < C_3 \tag{22}$$

où C_3 ne dépend pas de ε.

Choisissons maintenant N de telle manière que

$$N - N_2 \geqslant N_1 \tag{23}$$

En vertu de (21), (22) et (23) la fonction

$$\widehat{\chi_j(D)(\psi u)_\varepsilon}(\xi)\, \overline{[\dots[[\chi_j(-D), \underbrace{\psi], \psi_1], \dots, \psi_1]}_{N \text{ fois}}((\psi v)_\varepsilon)}(-\xi)$$

est absolument intégrable, et de plus, sa norme en L_1 est uniformément bornée par rapport à ε. Nous avons donc montré qu'on peut passer à la limite dans le terme considéré, Ceci termine la preuve du Théorème.

RÉFÉRENCE

[1] L. Hörmander, *Fourier integral operators*, I, Acta Math. 127 (1971), P. 79 — 183.

[2] J. J. Duistermatt and L. Hörmande, *Fourier integral operators*, II, Acta Math. 128 (1972) p. 183 — 269.

[3] J. Kohn and L. Nirenberg, *An algebra of pseudo-differential operators*, Comm, Pure Appl Math., 18 (1965), P. 269 — 305.

Manuscrit reçu le 13 Juin 1983

INSTITUTE OF MATHEMATICS, P.O. BOX 631 BO HO 10000 HANOI, VIETNAM