ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 10 № 1 (1985)

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЛИПИЧЕСКИХ ПО ДУГЛИСУ–НИРЕНБЕРГУ СИСТЕМ. I.

ЛЕ ХЫУ ЗИЕН

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена решению пролбеме гомотопической классификации эллиптических по Дуглису – Ниренбергу систем дифференциальных уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим систему $p > 2$ уравнений с двумя независимыми переменными x, y и с постоянными коэффициентами :

$$(*) \qquad L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y) = 0,$$

которая предполагается эллиптической по Дуглису–Ниренбергу [4–5]. Порядок дифференцирования элемента $Lij\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ матрицы $L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ равен $\alpha_{ij} = s_i + t_j$ $(ij = 1,2,..., p)$ (см. [4]). В общем случае, когда порядки дифференцирования не равны друг другу будем называть такие системы неоднородными, а в случае $\alpha_{ij} = n (i,j = 1,2,..., p)$ — однородными. Случай, когда $s_i = 0$ $(i = 1,2,..., p)$ называется эллиптическим по Петровскому.

Класс систем вида (*) определяется набором чисел $\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12},..., \alpha_{pp})$ и его обозначаем $\mathcal{N}(\alpha,p)$.

Проблема гомотопической классификации множеств эллиптических систем была поставлена в совместном докладе И. М Гельфанда, И. Г. Петровского, Г. Е. Шилова на Всесоюзном математическом съезде в 1956 [9]. Важность выяснения вопроса о различии компонент связности неоднократно подчеркивал И. И. Гельфанд [7–8]. Первые результаты в этом направлении были получены Б. Боярским [I]. Он провел классификацию эллиптических систем двух уравнений на плоскости. Классификапия общих однородных эллиптических систем на плоскости с числом уравнений больщим двух была проведена П.А. Фроловым [17 – 22]. В этих работах были найдены полные топологические инварианты для множеств эллиптических систем и указаны представители каждой компоненты. Некоторые подходы к решению вопроса гомотопической классификации в многомерном случае даны В.И. Шевченко [23–25]. Отметим работу В.С. Виноградова [3], посвященную классификации одного класса матричных полиномов с четырьмя независимыми переменными.

Все выщеупомянутые работы касались лишь однородных эллиптических систем. Однако теория краевых задач была исследована и для неоднородных еллиптических систем. Поэтому большой интерес представляет решение проблемы гомотопической классификации неоднородных эллиптических систем и краевых задач.

Исследования настоящей работы охватывают вопросы гомотопической классификации множества $\mathcal{N}(\alpha,p)$ систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу с числом уравнений на плоскости большим двух.

Развивая метод П.А. Фролова, пользуемый им для однородного случая [17—18], мы сопоставим каждой системе данного класса $\mathcal{N}(\alpha,p)$ некоторому матричному пучку $L(\lambda)$. Потом мы проведем классификацию матричных пучков. Для этого нужно выделить проетейщие линейные матричные пучка. В отличии от однородного случая, такие выделения, вообще говоря невозможны, так как данный класс может быть неинвариантным после гомотопии. Особенно трудным является случай вещественных систем. В отдельных случаях пучок может быть представлен в виде двух более простых пучков, один из которых имеет размерность меньшей и это позволяет применить индукцию. В случае эллиптических по Петровскому пучков, когда пучок $L(\lambda)$ имеет нечетный размер и минимальное значение однородных порядков по столбцам (или по строкам) тоже нечетное, выделить вещественный линейный пучок уже нельзя. Тогда мы рассмотрим множество всех пучков с данной фиксированной строкой вида $(0 \dots 0\ 1\ \lambda)$ и проведем классификацию для него.

Так как общие неоднородные системы вообще говоря не являются невырожденными и после выделения простейщих пучков не известно, чем будет другой пучок, тогда мы, пользуя результат невырожденного случая выделим неоднородные пучки и применим соответствующие гомотопии.

Главный результат данной работы состоит в том, что множество $\mathcal{N}(\alpha, p)$ распадается на четыре компоненты связности и выиисываются их представители.

§ 1. О ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ НЕОДНОРОДНЫХ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ

Известно [10], что общая теория операторных дифференциальных уравнений основана на теории операторных пучков:

$$L(\lambda) = \lambda^n A_o + \lambda^{n-1} A_1 + \dots + A_n \tag{1}$$

где A_j – некоторые операторы. Для нашей цели, мы будем предполагать что A_j – некоторая матрица размера $p \times p$ и в этом слуцае будем говорить, что пучок $L(\lambda)$ является матричным.

Пусть α_{ij} – целые числа такие, что $\alpha_{ij}=s_i+t_j(i,\ j=1,\ 2,\dots,\ p)$, s_i, t_j – целые числа. Будем говорит, что пучок $L(\lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{N}(\lambda,\ \alpha,\ p)$, если элементы $L_{ij}(\lambda)$ матрицы $L(\lambda)$ является некоторыми полиномами относительно λ степени не большей α_{ij} и $\det L(\lambda)=\det\{L_{ij}(\lambda)\}$ – полином степени $\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_{ii}$ необрашается в нуль на всей действительной оси.

Если максимальная степень всех элементов какой-нибудь строки равна s_0, то будем говорит, что степень этой строки будет s_0.

Дадим некоторые определения,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Пучок $L(\lambda)$называется невырожденными, если степень полинома $\det L(\lambda)$ равна сумме всех степеней его строк. В противном случае, $L(\lambda)$ будем называть вырожденным.*

В дальнейщем будем понимать собственные векторы и собственные значения, пучка, как и в [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 2. *Пучок $L(\lambda)\in\mathcal{N}(\lambda,\ \alpha, p)$ называется эллиптическим по Петровскому, если $L(\lambda)$ — невырожденный.*

В случае эллиптических по Петровскому пучков будем в дальнейщем пользовать обозначение $\mathcal{N}(\lambda,\ s,\ p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Два матричных пучка принадлежащих $\mathcal{N}(\lambda,\ \alpha,\ p)$ гомотопны, если их можно соединить некоторой непрерывной деформацией их коэффициентов, невыводя из данного класса.*

В этой статье знак $\approx$ означает гомотопность соответствующих пучков.

Теперь будем рассматривать более простой случай неоднородных эллиптических систем а именно, когда степени строк однородны, т.е. $\alpha_{ij}=s_i(j=1,2,\dots,\ p)$. Заметим, что класс таких систем инвариантен при правом умножении на постоянную матрицу, т.е.

(2) $$\mathcal{N}(\lambda,\ s,\ p)=\mathcal{N}(\lambda,\ s,\ p)\times GL(R,\ p)$$

Свяжем пучок $L(\lambda)$ с некоторым линейным пучком:

(3) $$\mathcal{L}(\lambda)=\lambda\mathcal{A}-E_{sp}\qquad s=\max_j s_j$$

где $\mathcal{A}$ — матрица размера $sp\times sp$ вида

(4) $$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} 0 & E_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_p & 0 & \dots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E_p\\ -A_0A_s^{-1} & -A_1A_s^{-1} & -A_2A_s^{-1} & -A_3A_s^{-1} & \dots & -A_{1\text{-}2}A_s^{-1} & -A_{s-1}.A_s^{-1}\end{bmatrix}$$

Очевидно, что пучки $L(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$ имеют одинаковые спектры. Без ограничения общности можно считать, что все собственные значения матричного пучка $L(\lambda)$ различны. Этого можно добиться при возмущении невырожденной матрицы.

Пусть f_0 – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_0 пучка $\mathcal{L}(\lambda)$:

$$\mathcal{L}(\lambda_0) f_0 = 0$$

если запишем вектор f_0 в виде

$$f_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_s^0 \end{pmatrix}$$

где $\overset{0}{x}_j$ — числовые вектора — столбцы высоты p. Тогда из (5) следует соотношение

$$\overset{0}{x}_j = \lambda_j^{s-j} \overset{0}{x}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

и вектор $A_s^{-1} \overset{0}{x}_s = \varphi_0$ является собственным вектором $L(\lambda)$, отвечающим значению λ_0.

Из (4) следует, что оператор $\mathcal{A}$, действующий в sp — мерном векторном пространстве имеет $\sum\limits_{j=1}^{p} s_j$ различных ненулевых собственных значений равных $\lambda_j \left(j = 1, 2, \ldots, \sum\limits_{j=1}^{p} s_j\right)$.

Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ жорданова цепочка $\mathcal{A}$, отвечающая собственному значению $\mu_0 = \lambda_0^{-1}$

Если обозначим

$$f_q = \begin{pmatrix} x_1^q \\ x_2^q \\ \vdots \\ x_s^q \end{pmatrix}$$

где x_j^q – числовые вектор — столбцы высоты p, соотношения (5) могут быть представлены в таком виде:

$$x_{j+1}^q = \mu_0 x_j^q + x_j^{q-1}$$

Для определенноти, полагаем: $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_p = s$

Имеем

$$\mathcal{A} = \mathfrak{F} \mathfrak{J} \mathfrak{F}^{-1}$$

Здесь $\mathcal{J} = \mathrm{diag}\,\{J_1, J_0\}$; $J_1 = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_N^{-1}\right\}$

$N = \sum_{j=1}^{p} s_j$; $J_0 = \mathrm{diag}\left\{H_{p_1}, H_{p_2}, \ldots, H_{p_\nu}\right\}$ — жорданова клетка матрицы $\mathcal{A}$, отвечающая нулевому собственному значению. Тогда:

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_0)$$

где

$$\mathfrak{F}_1 = (f_1, f_2, \ldots, f_N),$$

а

$$\mathfrak{F}_0 = \left(\mathfrak{F}_0^1, \mathfrak{F}_0^2, \ldots, \mathfrak{F}_0^\nu\right)$$

Очевидно матрицы $\mathfrak{F}_0^j$ имеет вид:

$$\mathfrak{F}_0^j = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \cdots & y_{p_j} \\ 0 & y_1 \cdots & y_{p_j-1} \\ . & . & . \\ 0 & 0 & y_1 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Не трудно видеть, что $p_j < \min\limits_{1 \leqslant l \leqslant p} s_l$

Отсюда следует и следующая

ЛЕММА 1.1. *Для любого матричного пучка $L(\lambda) \in \mathcal{N}(\lambda, s, p)$ существует по крайней мере одна система p собственных векторов, которая линейно независима.*

Далее речь будет только о вещественных пучках.

Пусть $s_1 = 1$. Покажем, что при малых деформациях элементов матриц A_{s-1}, A_s можно добиться, чтобы некоторая система $2\left[\frac{p}{2}\right]$ собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_{2\left[\frac{p}{2}\right]}, \overline{\lambda}_{2\left[\frac{p}{2}\right]}$ была независимой $\left(\left[\frac{p}{2}\right]\right.$ — целая часть $\left.\frac{p}{2}\right)$.

Действительно, из Леммы I.I следует, что всегда для пучка $L(\lambda)$ найдется линейно независимая система p собственных векторов: $\varphi_1, \overline{\varphi_1}, \ldots, \varphi_m, \overline{\varphi_m}, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{m+\rho}$ $(2m + \rho = p)$.

Ясно, что система векторов

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\varphi_1\\ \varphi_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\overline{\lambda_1\varphi_1}\\ \overline{\varphi_1}\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix}\lambda_m\varphi_m\\ \varphi_m\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\overline{\lambda}_m\overline{\varphi}_m\\ \overline{\varphi}_m\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_{m+1}\varphi_{m+1}\\ \varphi_{m+1}\end{bmatrix}, \begin{pmatrix}\overline{\lambda}_{m+1}\overline{\varphi}_{m+1}\\ \overline{\varphi}_{m+1}\end{pmatrix},\ldots,\begin{bmatrix}\lambda_{m+\rho}\varphi_{m+\rho}\\ \varphi_{m+\rho}\end{bmatrix}, \begin{pmatrix}\overline{\lambda}_{m+\rho}\overline{\varphi}_{m+\rho}\\ \overline{\varphi}_{m+\rho}\end{pmatrix}.$$

линейно независима.

Обозначая $\Omega_0 = \left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m+1}\right)$

$\mathcal{D}_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}\}$ — матрица, на диагонали которой стоят λ_1, λ_2 ..., λ_{m+1}, тогда имеем тождества :

$$\sum_{j=0}^{s} A_j \Omega_0 \mathcal{D}_0^{s-j} = 0$$

и

$$\sum_{j=0}^{s} A_j \overline{\Omega_0}\, \overline{\mathcal{D}_0}^{s-j} = 0$$

Перепишем эти соотношения в матричной форме:

$$(A_{s-1}, A_s)\,\Omega = (\overline{\Phi}, \overline{\Phi}),$$

Здесь

$$\Omega = \begin{bmatrix}\Omega_0\mathcal{D}_0 & \overline{\Omega}_0\overline{\mathcal{D}}_0\\ \Omega_0 & \overline{\Omega}_0\end{bmatrix}$$

а

$$\Phi = (A_0\Omega_0\mathcal{D}_0^{s} + A_1\Omega_0\mathcal{D}_0^{s-1} + \ldots + A_{s-2}\Omega_0\mathcal{D}_0^{2}),$$

так как Ω имеет максимальный ранг, то малые деформации коэффициентов A_s, A_{s-1} можно производить с помощью малых деформаций собственных векторов φ_1, φ_2,..., φ_{m+1}, $\overline{\varphi}$ $\overline{\varphi_2}$,..., $\overline{\varphi}_{m+1}$.

Продолжая эти рассуждения, после конечного шага мы можем добиться того, чтобы при малых деформациях коэффициентов A_s, A_{s-1} любая подсистема системы $2\left[\frac{\rho}{2}\right] + 2m$ собственных векторов φ_1, φ_1,..., $\varphi_{m+\left[\frac{\rho}{2}\right]}$, $\overline{\varphi}_{m+\left[\frac{\rho}{2}\right]}$, отвечающих собственным значениям λ_1 $\overline{\lambda_1}$,..., $\lambda_{m+\left[\frac{\rho}{2}\right]}$, $\overline{\lambda}_{m+\left[\frac{\rho}{2}\right]}$ была линейно независимой.

Если $s_1 > 1$, то аналогично показывается, что при малых деформациях матричных коэффициентов A_s, A_{s-1}, A_{s-2} любая подсистема системы $2p$ собственных векторов φ_1, $\bar{\varphi}_1$, ..., φ_p, $\bar{\varphi}_p$ отвечающих собственным значениям λ_1, $\bar{\lambda}_1$, ..., λ_p, $\bar{\lambda}_p$ будет линейно независимой.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ КЛАССА $\mathcal{N}$ (λ, s, p)

Напомним, что пучок $L(\lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{N}(\lambda, s, p)$ если все элементы матрицы $L(\overline{\lambda})$ однородны по строкам и det $L(\lambda)$ — полином степени $\sum_{j=1}^{p} s_j$ относительно λ.

Будем рассматривать только вещественные пучки. Тогда класс $\mathcal{N}(\lambda,s,p)$ распадается на два множества $\mathcal{N}^+$ и $\mathcal{N}^-$, отвечающие пучком с положительным и отрицательным детерминантом соответственно.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые разложения пучка из класса $\mathcal{N}(\lambda, s, p)$.

ЛЕММА 2.1. *Если $s_1 = 2q_1$, то пучок $L(\lambda)$ можно представить в виде произведения двух пучков:*

$$L(\lambda) = L_1(\lambda).\ L_2(\lambda) \tag{6}$$

где $L_2(\lambda)$ — однородный пучок степени $2q_1$, а $L_1(\lambda)$ — пучок вида:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \sim \\ \vdots & L_1(\lambda) \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Доказательство:

Пусть Z_1 — правый матричный корень пучка $L(\lambda)$, который построен с помощью собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ и отвечающих им собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$.

$$Z_1 = F_1 D_1 F_1^{-1}$$

где

$$D_1 = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\},\ F_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p\}$$

Из теории Безу [6] имеем: $L(\lambda) = \tilde{L}^1(\lambda)(\lambda E - Z_1)$

Далее проводя малые деформации A_s, A_{s-1} (это не выводит $L(\lambda)$ из данного класса) можно полагать, что все собственные векторы $L^1(\lambda)$, отвечающие собственным значениям $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_p$ линейно независимы.

В самом деле, так кгк $L(Z_1) = L(\overline{Z_1}) = 0$, то

$$(7)\quad \sum_{j=0}^{s} A_j F_1 D_1^{s-j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{s} A_j \overline{F}_1 \overline{D}_1^{s-j} = 0$$

И теперь рассмотрим такую деформацию собственных значений

$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1$; $\overline{\lambda_1}(\varepsilon) = \overline{\lambda_1}$

$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_1 + (1-\varepsilon)\lambda_j$; $\overline{\lambda_j}(\varepsilon) = \overline{\lambda_1}(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\overline{\lambda}_j$, $j = 2, 3, \dots, p$,

$\varepsilon \in [01]$.

тогда из (7) деформации матриц $A_{s-1}(\varepsilon)$, $A_s(\varepsilon)$

определяются равенством

$$\{A_{s-1}(\varepsilon), A_s(\varepsilon)\} = \{\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon\} \mathfrak{F}^{-1}_{(\varepsilon)}$$

где

$$\Phi_\varepsilon = \sum_{j=0}^{s-2} A_j F_1 D_1^{s-j}(\varepsilon)$$

и

$$\mathfrak{F}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} F_1 D_1(\varepsilon) & \overline{F}_1 \overline{D}_1(\varepsilon) \\ F_1 & \overline{F}_1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что собственные векторы $\psi_j (j = 1, 2, \dots \rho)$ определяемые равенствами $\psi_j = (\overline{\lambda}_j(\ ) F_p - Z_1)\overline{\psi_j}$ $(j = 1, 2 \dots, p)$ аналитически зависят от $\varepsilon \in [01]$, поэтому при достаточно малом ε_0 система векторов $\psi_j(\varepsilon_0)(j = 1, 2, \dots, p)$ линейно независима.

Теперь для пучка $L^1(\lambda)$ построим матричный корень Z_2, отвечающий собственным значениям $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_p$ и собственным векторам $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_p$:

$$\widetilde{L}^1(\lambda) = L'(\lambda)(\lambda E_p - Z_2)$$

Следовательно

$$L(\lambda) = L'(\lambda)(\lambda E_p - Z_2)(\lambda E_p - Z_1)$$

Ясно, что степень j – ой строки пучка $L'(\lambda)$ меньше соответствующей степени пучка $L\ (\lambda)$ на две единицы, Так как $s_1 = 2q_1$, то применим разложение (8) для пучка $L'(\lambda)$ и после q_1 — шчгов получим

$$L(\lambda) = L^2(\lambda)\, L_2\ (\lambda)$$

Для того, чтобы $L^2(\lambda)$ имел вид $L_1(\lambda)$ только надо умножить справа на некоторую постоянную невырожденную матрицу и провести соответствующую гомотопию. Лемма доказана.

Повторяя рассуждения доказательства Леммы 2.1 имеем следующие

ЛЕММА 2.2. *Если $s_1 = 2q_1 + 1$, то пучок $L(\lambda)$ можно представить в виде*

$$L(\lambda) = L_1(\lambda)\ L_2(\lambda)$$

где L_2 — однородный пучок степени $2q_1$, а $L_1(\lambda)$ — пучок с строками степени 1, $(s_2 - s_1 + 1), \ldots, (s_2 - s_1 + 1)$ *— соответственно.*

ЛЕММА 2.3. *Если $p = 2k$, то матричный пучок $L(\lambda)$ можно представить в виде произведения двух вещественных пучков:*

$$L(\lambda) = L_1(\lambda)\, L_2(\lambda)$$

где $L_2(\lambda)$ — однородный пучок степени s_1, а $L_1(\lambda)$ имеет строки степени $0, s_2 - s_1, \ldots, s_p - s_1$ *— соответственно.*

Введем в рассмотрение один класс пучок специального вида, а именно:

$$\mathcal{N}_0^+(\lambda, s, p) = \Big\{ L(\lambda) \in \mathcal{N}^+(\lambda, s, p) \text{ и } L(\lambda) \text{ имеет}$$

$$\text{некоторую фиксированную строку вида } (0..01.0..\lambda) \Big\}$$

Теперь мы выводим некоторые разложения $L(\lambda) \in \mathcal{N}_0^+(\lambda, s, p)$ в зависимости от четности порядка p.

Пусть $\mathcal{N}_{0j}^+(\lambda, s, p)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ класс вида $\mathcal{N}_0^+(\lambda, s, p)$ с фиксированной j — строкой вида $(0\ldots01\ \lambda)$.

Случай $p = 2k$:

Пусть $L(\lambda) \in \mathcal{N}_{0p}^+(\lambda, s, p)$. Тогда собственный вектор φ_j, отвечающий собственному значению λ_j имеет вид:

$$\varphi_j = (*\ *\ldots * - \lambda_j y_j, y_j) \qquad (y_j > 0)$$

Построим матричный корень Z с помощью собственных значений $\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda}_k$ и отвечающих им собственных векторов $\varphi_1, \overline{\varphi}_1, \ldots, \varphi_k, \overline{\varphi}_k$:

$$Z = FDF^{-1}$$

где
$$\mathcal{D} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda}_k\}$$

а
$$F = (\varphi_1, \overline{\varphi}_1, \ldots, \varphi_k, \overline{\varphi}_k)$$

Отсюда
$$L(\lambda) = L_1(\lambda)(\lambda E_p - Z)$$

Нетрудно видеть, что последняя строка Z имеет вид $(0 \ldots 0 - 10)$. Следовательно $L_1(\lambda)$ обладает последней единичной сторокой: $(0\ldots01)$.

Случай $p = 2k + 1$:

В этом случае нельзя построит правый вещественный матричный корень для $L(\lambda) \in \mathcal{N}_{op}^+(\lambda, s, p)$. Будем поступать следующим образом (см. [17 — 18]):

Возьмем такую систему собственных значений $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}$ и соответствующих им собственных векторов, что последние линейно независимы. Затем построим матрицу:

(9) $$\mathcal{G} = (Re\varphi_1,\ \mathrm{Jm}\varphi_1 \ldots,\ \mathrm{Re}\varphi_k,\ \mathrm{Jm}\varphi_k)$$

размера $(2k+1) \times 2k$, и рассмотрим систему уравнений

(10) $$h\mathcal{G} = 0$$

где h — строка длины $(2k+1)$: $h = (h_1, h_2, \ldots, h_{2k+1})$.

Из (9) видно, что ранг $\mathcal{G} = 2k$. Без ограничения общности можно полагать, что минор состоящий из последних $2k$ строк отличен от нуля. (Этого можно добиться малой деформацией коэффициентов пучка $L(\lambda)$, не меняя вид последней строки). Так, что можно сказать, что решение h системы (10) имеет вид: $h = (1, h_2, h_3, \ldots, h_{2k+1})$.

Введем в рассмотрение матрицу H порядка $(2k+1)$:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & h_2 & \ldots & h_{2k+1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

и представим пучок $L(\lambda)$ в виде:

$$L(\lambda) = \tilde{L}(\lambda).H$$

Собственные векторы $\psi_j, \overline{\psi}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ пучка $\tilde{L}(\lambda)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_j, \overline{\lambda}_j (j = 1, 2, \ldots, k)$ имеют вид:

$$\begin{matrix} \psi_j = H\varphi_j \\ \overline{\psi}_j = H\overline{\varphi}_j \end{matrix} \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

которые в силу [10] имеют первую координату нулевой.

Сохраняя вещественность и вид последней строки $L(\lambda)$, сдеформируем $L(\lambda)$ в $L(\lambda)$ гомотопией $h_j(\varepsilon) = \varepsilon h_j$ $(j = 2, 3, \ldots, 2k+1)$, $(\varepsilon \in [0\ 1])$. Таким образом, можно считать, что собственные векторы $\varphi_j, \overline{\varphi}_j$ пучка $L(\lambda)$ имеет первую координату — нулевой.

Далее, в евклидовом пространстве размерности $(2k+2)$ построим вспомогательный вещественный пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ вида

(11) $$\mathcal{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 \ 0 \ldots 0 \\ l_1(\lambda) \\ l_2(\lambda) & L(\lambda) \\ l_p(\lambda) \end{bmatrix}$$

где $l_n(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ не нарушают степеней строк пучка $L(\lambda)$, которые считаем совпадавшимися со соответствующими степенями пучка $L(\lambda)$. Мы выберем $l_n(\lambda)$ так, чтобы $_0 = (1, i, 0 \ldots 0)$ и $f_0 = (1, -i, 0 \ldots 0)$ стали собственными векторами. отвечающими собственным значениям $\lambda_0 = \bar{i}$, $\lambda_0 = -i$ $(i_2 = -1)$ пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ (для сохранения однократности спектра $\mathcal{L}(\lambda)$ можно, без ограничения общности, заранее полагать, что собственные значения $L(\lambda)$ отличны от i и $-i$)

Так, если $$L(\lambda) = \{ L^{nm}(\lambda)\}_{n_1 m = 1, \ldots, p}$$ и где

$$L^{nm}(\lambda) = \sum_{j=1}^{sn} a^j_{nm} \, \lambda^{\overline{sni}}$$

то $l_n(\lambda)$ можно выбрать таким образом:

а) При s_n -четном:

$$l_n(\lambda) = -\lambda\left(a^1_{n1}\lambda^{s_n-1} + a^2_{n1}\lambda^{s_n-2} + \ldots + a_{n_1}^{s_n-1}\lambda\right) - a_{n_1}^{s_n}\lambda + $$
$$+ \lambda\left(a^0_{n1}\lambda^{s_n-2} + a^1_{n1}\lambda^{s_n-3} + \ldots + a_{n1}^{s_n-2}\right)$$

В) При S_n — нечетном

$$l_n(\lambda) = -\lambda\left(a^1_{n_1}\lambda^{s_n-1} + a^2_{n_1}\lambda^{s_n-2} + \ldots + a_{n_1}^{n-1}\lambda\right) + a_{n_1}^{s_n-1} - a_{n_1}^{sn}\lambda +$$
$$\lambda\left(a^0_{n_1}\lambda^{s_n-2} + a^1_{n_1}\lambda^{s_n-3} + \ldots + a_{n_1}^{s_n-3}\lambda\right)$$

Нетрудно проверяется, что $L(i) f_0 = L(-i)\bar{f_0} = 0$

Теперь для пучка $L(\lambda)$ можно уже построить правый матричный корень Z_0 с помощью собственных векторов $f_0, \bar{f_0}$, $f_j = (0, \psi_j)$, $\bar{f_j} = (0, \bar{\psi_j})$ $j = 1, 2, \ldots, k$ и собственных значений $i, -i, \lambda_j, \bar{\lambda}_j$. Имеем

$$Z_0 = F_0 D_0 F_0^{-1}$$

$$\mathcal{D}_0 = \mathrm{diag}\,\{i, -i, \lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k\}$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ i & -i & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & * & * & \ldots & * \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & -\lambda_1 y_1 & -\lambda_1 y_1 & & -\lambda_k y_k \\ 0 & 0 & y_1 & y_1 & & yk \end{bmatrix}$$

непосредственным вычислением можно убедиться что

$$Z_0 = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Z_1 \right\}$$

Здесь $Z_1 = F_1 \mathcal{D}_1 F_1^{-1}$, Где $\mathcal{D}_1 = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \bar\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \bar\lambda_k\}$

Сдедовательно:

$$L(\lambda) \approx L_1(\lambda)(\lambda E_{p+1} - Z_0) = L_1(\lambda)\,\mathrm{diag}\{K(\lambda), (\lambda E_{p-1} - Z_1)\}$$

Где
$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Далее умножить F_1 слева на некоторуо вещественнуо матрицу C чтобы CF_1 принимала вид:

$$\tilde F_1 = CF_1 = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \cdots & * & 0 & 0 \\ -\lambda_1 y_1 & \bar\lambda_1 y_1 & \cdots & -\bar\lambda_{k-1} y_{k-1} & -\lambda_k y_k & -\bar\lambda_k y_k \\ y_1 & y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_k & y_k \end{pmatrix}$$

и в представлении $C^{-1} \tilde F_1 = F_1$ мы проведем гомотопию

$$C_{kl} = (1-\varepsilon)\, C_{kl}$$
$$y_j(\varepsilon) = (1-\varepsilon) \qquad 1 \leqslant j \leqslant k-1$$

$\varepsilon \in [01]$, одновременно сдеформируем $\lambda_j, \bar\lambda_j$ в i и $-i$ соответственно:

$$\lambda_j = (i\varepsilon + (1-\varepsilon)\lambda_j)$$
$$\bar\lambda_j = (-i\varepsilon + (1-\varepsilon)\lambda_j)$$

Ясно, что при такой деформации вид последней строки $(\lambda E_{p-1} - Z_1)$ сохраняется и пучок $(\lambda E_{p-1} - Z_1)$ преобразуется к виду:

$$(\lambda E_{p-1} - Z_1) = \mathrm{diag}\{(\lambda E_{p-3} - Z), K(\lambda)\}$$

Таким образом, нам удалось продеформировать пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ к виду:

$$(12)\quad \mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{L}_1(\lambda)\,\mathrm{diag}\{K(\lambda), (\lambda E_{p-3} - Z), K(\lambda)\}$$

где $(\lambda E_{p-3} - Z)$ — линейный эллиптический пучок. Отсюда ясно, что первая строка $\mathcal{L}_1(\lambda)$ имеет вид $(\lambda\ 10\ldots\ 0)$, а его последняя — $(0\ldots\ 01)$. Следовательно в процессе выделения линейного пучка степени всех строк $L(\lambda)$ уменьшаются на единицу.

ЛЕММА 2. 4. *Множество* $\mathcal{N}_0^+(\lambda, s, 3)$ *имеет две компоненты связности.*

Доказательство: Пусть $L(\lambda) \in \mathcal{N}_{0}^{+}(\lambda, s, 3)$ и $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2} s_j = 1$. Положим для определенности $s_2 = 1$.

Тогда введем в 4 — мерном векторном пространстве пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ вида (11). Так как в силу (12):

$$\mathcal{L}(\lambda) \approx \operatorname{diag}\{L_1(\lambda), 1\} \operatorname{diag}\{K(\lambda), K(\lambda)\}$$

Причем $L_1(\lambda)$ имеет вид

$$L_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \overset{*}{a}_1 & \overset{*}{a}_2 & \overset{*}{a}_3 \end{bmatrix}$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — вещественные числа.

Из эллиптичности пучка $L_1(\lambda)$ следует, что $a_3 \neq 0$ (так как, в противном случае число $\lambda = \dfrac{a_1}{a_2}$ будет вещественным значением, что невозможно для эллиптического пучка!)

Положим

$$L_1(\lambda) = L_1(\lambda)\, C$$

где

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{a_1}{a_3} & -\dfrac{a_2}{a_3} & \dfrac{1}{|a_3|} \end{bmatrix}$$

Тогда $$\widetilde{L}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sgn} a_3 \end{pmatrix}$$

Поскольку $\det C > 0$, матрица C гомотопна единичной. Отсюда имеем, что пучок $L_1(\lambda)$ гомотопен пучку

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sgn} a_3 \end{pmatrix}$$

И следовательно (проходит линейная гомотопия) пучку:

$$\operatorname{diag}\left\{1, \Delta^{s_1^0-1}(\lambda) \operatorname{sgn} a_3, 1\right\} \operatorname{diag}\left\{K(\lambda), \operatorname{sgn} a_3\right\}$$

где $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 1$ и $s_1^0 = \dfrac{s_1}{2}$

Из (13) следует

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathrm{diag}\,\{1,\ \mathrm{sgn}\,a_3\,\Delta^{s_1^0-1}(\lambda),\ E_3\}\ \mathrm{diag}\ \{E_2\,.\,\Delta(\lambda),\ \mathrm{sgn}\,a_3,\ 1\} \times \mathrm{diag}\ \{E_3\ ,\ \ K(\lambda)\}.$$

А это означает, что

$$L(\lambda) \approx \mathrm{diag}\,\{\mathrm{sgn}\,a_3\,\Delta^{s_1^0}(\lambda),\ E_2\}\ \mathrm{diag}\ \{1,\ \mathrm{sgn}\,a_3,\ 1\}\ \mathrm{diag}\ \{1,\ \mathcal{K}(\lambda)\}.$$

Лемма доказана при $s_2 = 1$ Различные представители получаются в зависимости от знака a_3, а именно эти представители могут записаны в такой форме:

$$L_1^+(\lambda) = \begin{pmatrix} \Delta^{s_1^0}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & K(\lambda) & \end{pmatrix}$$

$$L_1^+(\lambda) = \begin{pmatrix} -\Delta^{s_1^0}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Случай $s_1 = 1(\ s_2 = 2s_2^0)$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2} s_j = 2$. Из (16) имеем:

$$\mathcal{L}(\lambda) \approx \mathrm{diag}\ \{L_1,\ \{L(\lambda),\ 1\}\ \mathrm{diag}\ \{K(\lambda),\ (K\lambda)\}$$

где $L_1(\lambda) \in \mathcal{N}_{01}^r\,(\lambda,\ s';\ 3)\ (s_1' = 1,\ \ s_2' = s_1 - 1,\ s_3' = \ s_2 - 1)$.

Применяя данную лемму при случае $\min s_j' = 1$ для пучка $L_1(\lambda)$ мы приходим к выводу:

пучок $L_1(\lambda)$ гомотопен либо

$$\mathrm{diag}\ \{\,K(\lambda),\ 1\,\}\ \ \mathrm{diag}\ \{\,E_2,\ \Delta^{\frac{s_2-1}{2}}(\lambda)\,\}$$

либо

$$\mathrm{diag}\ \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix},\ -\Delta^{\frac{s_2-1}{2}}(\lambda)\right\}$$

при $s_1 = 2$ (тогда и $s_2 = 2s_2^0 + 1$)

Отсюда мы заключаем, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ гомотопен либо пучку

$$\operatorname{diag}\left\{\Delta(\lambda),\ \Delta(\lambda)\ \Delta^{s_2^0}(\lambda),\ 1\right\}\operatorname{diag}\left\{E_2,\ K(\lambda)\right\},$$ либо пучка

$$\operatorname{diag}\left\{\Delta(\lambda),\ -\Delta(\lambda),\ \Delta^{s_2^0}(\lambda),\ 1\right\}\operatorname{diag}\left\{F_2,\ \widetilde{K}(\lambda)\right\},$$ где

$$\widetilde{K}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

И следоватлеьно

$$L(\lambda) \approx \operatorname{diag}\left\{\Delta(\lambda),\ \Delta^{s_2^0}(\lambda),\ 1\right\}\operatorname{diag}\left\{1,\ K(\lambda)\right\}$$

или

$$L(\lambda) \approx \operatorname{diag}\left\{-\Delta(\lambda),\ \Delta^{s_2^0}(\lambda),\ 1\right\}\operatorname{diag}\left\{1,\ (\widetilde{K}\lambda)\right\}$$

Случай $s_2 = 2$ доказывается абсолютно аналогичным образом.

Далее пусть лемма уже верна при $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2} s_j = 2s_0 - 1$ и $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2} s_j = 2s_0$. Покажем она верна также при $\min s_j = 2s_0 + 1$ и $\min s_j = 2s_0 + 2$.

Пусть сначала $\min\limits_{j=1,2} s_j = 2s_0 + 1 = s_2$. Из (12) следует, что вспомогательный пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ гомотопен пучку:

$$\operatorname{diag}\left\{L_1(\lambda),\ 1\right\}\operatorname{diag}\left\{K(\lambda),\ K(\lambda)\right\}$$

где $L_1(\lambda) \in \mathcal{N}_{01}^{+}(\lambda, s', 3)$ $(s'_2 = s_1 - 1,\ s'_3 = s_2 - 1 = 2s_0$ и $\min\limits_{2\leqslant j\leqslant 3} s'_j = 2s_0$. По предположению индукции можем выписать все представители двух компонент:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -\Delta^{s_1^0-1}(\lambda) & \lambda\Delta^{s_1^0-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^{s^0}(\lambda) \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \Delta^{s_1^0-1}(\lambda) & -\lambda\Delta^{s_1^0-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta^{s^0}(\lambda) \end{bmatrix}$$

и проведем несложное вычисление мы получим, что $\mathcal{L}(\lambda)$ гомотопен либо $\operatorname{diag}\left\{\Delta(\lambda)\ \Delta^{s_1^0}(\lambda),\ \Delta^{s_1^0}(\lambda),\ 1\right\}\operatorname{diag}\left\{E_2,\ K(\lambda)\right\}$

либо $\operatorname{diag}\left\{\Delta(\lambda),\ -\Delta^{s_1^0}(\lambda),\ \Delta^{s^0}(\lambda),\ 1\right\}\operatorname{diag}\left\{E_2,\ \widetilde{K}(\lambda)\right\}$. Сравнивая последние пучки с (11), мы приходим к утверждению леммы.

Случай $\min(s_1, s_2) = 2s^0 + 2$ рассматривается подобным образом

ЛЕММА 2.5 *Множество* $\mathcal{N}^+(\lambda, s, 3)$ *имеет две компоненты связности. Если* $s_j = 2q_j (j = 1, 2, 3)$ *то представителями являются следующие пучки*

$$\text{diag}\left\{\overset{q_1}{\Delta}(\lambda), \overset{q_2}{\Delta}(\lambda), \overset{q_3}{\Delta}(\lambda)\right\} \tag{15}$$

и

$$\text{diag}\left\{\overset{q_1}{\Delta}(\lambda), \overset{q_2-1}{\Delta}(\lambda), \overset{q_3-1}{\Delta}(\lambda)\right\} \text{diag}\left\{1, \overset{2}{K}(\lambda)\right\}. \tag{16}$$

Если же $s_1 = 2q_1$, а $s_j = 2q_j + 1$ $(j = 2, 3)$, то *представителями будут следующие*

$$\text{diag}\left\{\overset{q_1}{\Delta}(\lambda), \overset{q_2}{\Delta}(\lambda), \overset{q_3}{\Delta}(\lambda)\right\} \text{diag}\left\{1, K(\lambda)\right\} \tag{17}$$

и

$$\text{diag}\left\{\overset{q_1}{\Delta}(\lambda), \overset{q_2}{\Delta}(\lambda), \overset{q_3}{\Delta}(\lambda)\right\} \text{diag}\left\{1, K'(\lambda)\right\} \tag{18}$$

Доказательство: Пусть $s_j = 2q_j$ $(j = 1, 2, 3)$ и $\min s_j = s_1$ $(s_1 \geqslant 2$. Тогда из леммы 2. 1 для пучка $L(\lambda)$ будем иметь

$$L(\lambda) = L_1(\lambda)\, L_2(\lambda)$$

Здесь $L_1(\lambda) = \text{diag}\{1, \widetilde{L}_1(\lambda)\}$, а пучок $L_2(\lambda)$ -однородный степени $2q_1$. А как известно [30], что $L_2(\lambda)$ гомотопен либо пучку

$$\overset{q_1}{\Delta}(\lambda)\, E_3 \tag{19}$$

либо пучку

$$\text{diag}\left\{\overset{q_1}{\Delta}(\lambda), \overset{q_2-1}{\Delta}(\lambda), \overset{q_3-1}{\Delta}(\lambda)\right\} \text{diag}\left\{1, \overset{2}{K}(\lambda)\right\}. \tag{20}$$

Ясно, что $\widetilde{L}_1(\lambda)$ можно продеформировать к виду:

$$\text{diag}\left\{E_2, \overset{q_3-q_2}{\Delta}(\lambda)\right\} \text{diag}\left\{1, l_1(\lambda)\right\}$$

Здесь $l_1(\lambda) = l_{11}(\lambda)\, l_{12}(\lambda) \ldots l_{1\, q_2 - q_1}(\lambda)$; $l_{1j}(\lambda)$ — квадратный пучок, который очевидно гомотопен одному из следующих

$$\Delta(\lambda),\ K^2(\lambda),\ (K^2(\lambda))'$$

(где как обычно, $(K^2(\lambda))'$ — транспорнированный к пучку $K^2(\lambda)$)
Теперь из (19) вытекает, что

$$L(\lambda) \approx \operatorname{diag}\left\{E_2,\ \Delta^{q_3-q_2}(\lambda)\right\} \operatorname{diag}\left\{1,\ l_1(\lambda)\right\} \cdot \Delta^{q_1}(\lambda) =$$

$$\operatorname{diag}\left\{E_2,\ \Delta^{q_3-q_2}(\lambda)\right\} \operatorname{diag}\left\{\Delta(\lambda),\ l_{11}(\lambda) \ldots l_{s\, q_2-q_1}(\lambda)\right\} \times$$

$$\operatorname{diag}\left\{\Delta^{q_1-1}(\lambda),\ \Delta^{q_1}(\lambda),\ \Delta^{q_1}(\lambda)\right\}.$$

А так как пучок $\operatorname{diag}\{\Delta(\lambda),\ l_{1j}(\lambda)\}$ гомотопен либо $E_3 \cdot \Delta(\lambda)$, либо $\operatorname{diag}\{\Delta(\lambda),\ \mathcal{K}^2(\lambda)\}$, то из последнего соотношения (после не сложного вычисления) следует, что $L(\lambda)$ можно продеформировать либо к (15), либо к (16).

Аналогичноеутверждение имеет место, если $L_2(\lambda)$ продеформируется к виду (20).

Пуств теперь $s_1 = 2q_1$, а $s_j = 2q_j + 1\ (j = 2, 3)$ и $s_1 = \min s_j$. Тогда в силу леммы 2.1 имеем разложения (6). Следовательно, для пучка $L_1(\lambda)$ в этом же разложении можно выделить линейный вещественный пучок $\operatorname{diag}\{1,\ l_0(\lambda)\}$:

$$L_1(\lambda) = \operatorname{diag}\{1,\ L_0(\lambda)\} \operatorname{diag}\{1,\ l_0(\lambda)\}$$

где $L_0(\lambda)$ — уже пучок чётной степени, а пучок $l_0(\lambda)$ гомотопен либо $K(\lambda)$, либо $K'(\lambda)$. Повторяя рассуждение доказательство первой части теоремы, мы приходим к заключению теоремы.

Случай $\min s_j = 2q_0 + 1$, в силу леммы 2.1 можно привести к случаю $q_0 = 0$. Тогда существует вещественная матрица $C(\det C > 0)$ такая, что последняя строка матриуы $L(\lambda) \cdot C$ имеет вид $(0\ 1\ \lambda)$. Далее сдеформируя C в единичную и применяя лемму 2.4 для полученного пучка получим, что гомотопен либо (17), либо (18).

Негомотопности этих различных представителей докажем в конце этого параграфа в более общем случае. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. *Множество $\mathcal{N}^+(\lambda, s, p)\ (p > 2)$ имеет две компоненты связности. Если $s_j = 2q_j (j = 1, 2, \ldots, p)$, то представителями будут следующие пучки:*

(21) $diag\left\{\Delta^{q_1}(\lambda),\ \Delta^{q_2}(\lambda), \ldots,\ \Delta^{q_p}(\lambda)\right\}$

и

(22) $diag\left\{\Delta^{q_1}(\lambda),\ \Delta^{q_2}(\lambda), \ldots\ \Delta^{q_{p-1}-1}(\lambda),\ \Delta^{q_p-1}(\lambda)\right\} diag\left\{E_{p-2},\ K^2(\lambda)\right\}$

Если же $s_j = 2q_j\ (j = 1, 2, \ldots, r)$ — четные числа, а $s_j = 2q_j + 1\ (j = r+1, r+2, \ldots, r+2m)$ — нечетные числа, то представителями будут следующие:

(23) $diag\left\{\Delta^{q_1}(\lambda), \ldots,\ \Delta^{q_p}(\lambda)\right\} diag\left\{E_r,\ K(\lambda), \ldots,\ K(\lambda),\ K(\lambda)\right\}$

и

(24) $diag \left\{ \Delta^{q_1}(\lambda),\ldots, \Delta^{q_p}(\lambda) \right\}$ $diag \left\{ E_r, K(\lambda),\ldots, K(\lambda), K'(\lambda) \right\}$

Доказательство.

При $p = 3$ утверждение теоремы верно (см. лемму 25). Предположим, что утверждение теоремы верно для множества $\mathcal{N}^+(\lambda, s, p)$ $(p > 3)$. Докажем, что утверждение имеет место для множества пучков $\mathcal{N}^+(\lambda, s, p+1)$.

Случай I: $p + 1 = 2k$

Пусть $\min s_j = s_1$. Тогда из леммы 2.3, для пучка $L(\lambda) \in \mathcal{N}^+(\lambda, s, p+1)$ имеем разложение, $L(\lambda) = L_1(\lambda)L_2(\lambda)$, где $L_2(\lambda)$ — однородный пучок степени s_1, а пучок $L_1(\lambda)$ имеет вид diag $\{1, \tilde{L}_1(\lambda)\}$; $\tilde{L}_1(\lambda)$ — матричный пучок размера $p \times p$. Пучок $L_2(\lambda)$, если s_1 — четное, продеформируется либо к

(25) $$E_{p+1} \Delta^{q_1}(\lambda)$$

либо К

(26) $$E_{p+1} \Delta^{q-1}_{1}(\lambda) \text{ diag } \{E_{p-1}\, \Delta(\lambda),\, K^2(\lambda)\}$$

Если же s_1 — нечетное уисло ($s_1 = 2q_1 + 1$), то $L_2(\lambda)$ можно провести к одному из двух пучков:

(27) $$\Delta^{q_1}(\lambda) \text{ diag } \{K(\lambda),\ldots, K(\lambda),\ K(\lambda)\}$$

и

(28) $$\Delta^{q_1}(\lambda) \text{ diag } \{K(\lambda),\ldots, K(\lambda),\ K'(\lambda)\}$$

Пусть сначала $s_j = 2q_j$ $(j=1, 2,\ldots, p+1)$, тогда по предположению индукции $\tilde{L}_1(\lambda)$ можно провести к простейщим видам Их сейчас и выпишем:

Обозначим $2m_j = s_j + s_1$ $(j = 1, 2,\ldots, p+1)$. Если количество чисел m_j, от отличных от числа, больше двух, то $\tilde{L}_1(\lambda)$ можно провести к

(29) $$\text{diag}\{\Delta^{m_2},\ldots, \Delta^{m_{p+1}}(\lambda)\}$$

или к

(30) $$\text{diag} \left\{\Delta^{m_2}(\lambda),\ldots,\ \Delta^{m_{p-1}}(\lambda),\ \Delta^{m_{p-1}}(\lambda),\ \Delta^{m_{p+1}-1}(\lambda)\right\} \text{diag} \left\{E,\ K^2(\lambda)\right\}$$

Отсюда видно, что из (25), (29) и из (26), (30) следует, что $L(\lambda)$, гомотопен [21). А из (25), (30) и из (26), (29) — $L(\lambda)$ гомотопен (22).

Если количество m_j, отличных от нуля, равно двум, то $\tilde{L}_1(\lambda)$ можно провести к одному из следующих (для определенности полагая $m_{p+1} \geqslant m_p$ отличны от нуля)

$$\operatorname{diag}\left\{E_{p-1}, \quad \Delta^{m_{p+1}-m_p}(\lambda)\right\} \operatorname{diag}\left\{E_{p-2}, \quad \Delta^{m_p-\eta}(\lambda), \quad K^{2\eta}(\lambda)\right\}$$

и

$$\operatorname{diag}\left\{E_{p-1}, \quad \Delta^{m_{p+1}-m_p}(\lambda)\right\} \operatorname{diag}\left\{E_{p-2}, \quad \Delta^{m_p-\eta}(\lambda), \quad (K'(\lambda))^{2\eta}\right\}$$

η может принимать значение от 0 до m_p. Отсюда, учитывая гомотопность пучков $\operatorname{diag}\{\Delta(\lambda), K^2(\lambda)\}$ и $\operatorname{diag}\{\Delta(\lambda), (K'(\lambda))^2\}$, видим, что $L(\lambda)$ гомотопен либо (21), либо (22).

Слуай, когда только одно число $m_{j_0} \neq 0$, а остальные равны нулю — тривиален.

Пусть теперь $s_j = 2q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$; $s_j = 2q_j + 1$ $(j = r + 1, r + 2, \ldots, r + 2m = p)$.

Если $\min\limits_j s_j = s_1$, то по лемме 2. 3, пучок $L(\lambda)$ можно представить в виде:

$$L(\lambda) = L_1(\lambda) \,.\, L_2(\lambda)$$

где $L_1(\lambda) \approx \operatorname{diag}\{1, \widetilde{L}_1(\lambda)\}$, причем степень j – ой строки пучка $\widetilde{L}_1(\lambda)$ равна $\widetilde{s}_j =$
$= s_{j+1} - s_1$.

Если число m_j, отличных от нуля больше двух, то по предположению индукции можно привести к пучку

$$\text{(31)} \quad \operatorname{diag}\left\{\Delta^{q_2-q_1}(\lambda), \ldots, \quad \Delta^{q_{p+1}-q_1}(\lambda)\right\} \operatorname{diag}\left\{E_{p-2m}, \; K(\lambda), \ldots, \; K(\lambda)\right\}$$

или к пучку

$$\text{(32)} \quad \operatorname{diag}\left\{\Delta^{q_2-q_1}(\lambda), \ldots, \quad \Delta^{q_{p+1}-q_1}(\lambda)\right\} \operatorname{diag}\left\{E_{p-2m}, \; K(\lambda), \ldots, \; K(\lambda), \; K(\lambda)\right\}$$

Пучок $L_2(\lambda)$ гомотопен либо (25), либо (26). Следовательно, из (25, (26), (31) и (32) вытекает, что пучок $L(\lambda)$ в этом же случае гомотопен либо (21), либо (22). Случай, когда количество $m_j \neq 0$ не больше двух проверяется как и выше.

Итак теорема в случае 1 доказана.

Случай II. $p + 1 = 2k + 1$

Из доказательства случая I и в силу леммы 2.5 следует, что теорема верна при $p = 3, 4$.

1[0]) Если $\min\limits_j s_j = 2q$ — четное число, то доказательство теоремы совершенно аналогично как и в случае 1, тап как после выделения вещественного однородного пучка, неоднородный пучок будет иметь размер не больший p.

2°) $\min\limits_{j} s_j = 1$. (так как другой нечетный случай сводится к этому же случаю в силу леммы 2.1) Для определенности, положим $s_{p+1} = 1$. Очевидно, что данный пучок может быть прогомотопированным к пучку $\widetilde{L}(\lambda) \in \mathcal{N}^+_{0\,p+1}(\lambda,\ s,\ p+1)$. Поэтому доказательство теоремы завершит слудующая

ЛЕММА 2.6. *Множество $\mathcal{N}^+_0(\lambda,\ s, 2k+1)$ имеет две компоненты связности. Если $s_j = 2q_j\ (j = 1,\ 2,\dots,\ r)$ и $s_j = 2q_j + 1\ (j = r+1,\ r+2,\dots,\ r+2m = 2k+1)$, то представителями этих компонент являются следующие пучки:*

$$(33)\ diag\left\{\Delta^{q_1}(\lambda),\dots,\ \Delta^{q_{2k}}(\lambda),\ 1\right\}\ diag\left\{E_r,\ K(\lambda)\ ,\dots,\ K(\lambda)\right\}$$

и

$$(34)\ diag\left\{\Delta^{q_1}(\lambda),\dots,\ \Delta^{q_{2k}}(\lambda),\ 1\right\}diag\left\{E'_r,\ K(\lambda)\ ,\dots,\ K(\lambda),\ \widetilde{K}(\lambda)\right\}$$

где

$$E'_r = diag\ \{1,\dots,\ 1,\ -1\}$$

$$\widetilde{K}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Доказательство леммы 2.6.

Пусть пучок $L_0(\lambda) \in \mathcal{N}^+_{0\,2k+1}(\lambda,\ s,\ 2k+1)$. Введем в рассмотрение матрицу вида (11), которая в силу (12) гомотопна пучку:

$$\mathrm{diag}\ \{L_1(\lambda),\ 1\}\ \mathrm{diag}\ \{\ K(\lambda),\ (\lambda E_{2k-2} - Z),\ \ K(\lambda)\}$$

В этом разложении пучка вида (11) j-ая строка пучка $L_1(\lambda)$ равна $(s_{j-1} - 1)$ $(j > 1)$ и $s_1 = 0$, а первая строка $L_1(\lambda)$ принимает специальный вид $(\lambda\ 1\ 0\dots\ 0)$ т. е. $L_1(\lambda) \in \mathcal{N}^+_{01}(\lambda,\ s',\ 2k+1)$, где $s'_1 = 1,\ s'_j = s_{j-1} - 1 (j = 2,\ 3,\dots,\ 2k+1)$. Кроме того $(\lambda E_{2k-2} - Z)$ можно привести либо к $\mathrm{diag}\ \{K(\lambda),\ K(\lambda),\dots,\ K(\lambda)\}$ либо к $\mathrm{diag}\ \{K'(\lambda),\ K(\lambda),\dots,\ K(\lambda)\}$.

Из теоремы 2.1 следует, что если утверждение леммы 2.6 верно при всех $k \geqslant 1$, то множество $\mathcal{N}^+(\lambda,\ s,\ p)\ (3 \leqslant p \leqslant 2k+2)$ также распадается на две компоненты связности.

В самом деле из четного размера пучка $L(\lambda)$ следует, что

$$35)\qquad L(\lambda) \approx \mathrm{diag}\ \{\widetilde{L}(\lambda),\ 1\}\ \mathrm{diag}\ \{K(\lambda),\ K(\lambda),\dots,\ K(\lambda)\}$$

и

$$(36)\qquad L(\lambda) \approx \mathrm{diag}\ \{\widetilde{L}(\lambda),\ 1\}\ \mathrm{diag}\ \{K'(\lambda),\ K(\lambda),\dots\ K(\lambda)\}$$

А размер пучка $\widetilde{L}(\lambda)$ уже небольший $2k+1$, и степени строк $\widetilde{L}(\lambda)$ равны s_1-1, $s_2-1, \ldots, s_{2k+1}-1$ – соответственно.

Для ясности выпишем представителей этих компонент в некотором определенном случае:

Пусть $s_j = 2q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$; $s_j = 2q_j + 1$ $(j = r+1, r+2, \ldots,$ $r + 2m = 2k+2$. Тогда степени строк пучка будут $(2q_1 - 1), \ldots, (2q_r - 1), 2q_{r+1}, \ldots, 2q_{r+2m-1}$ – соответственно.

Если число непостоянных строк пучка $\widetilde{L}(\lambda)$ больше двух, то $\widetilde{L}(\lambda)$ можно продеформировать либо к пучку

(37) $\quad \operatorname{diag}\left\{\Delta^{q_1-1}(\lambda), \ldots, \Delta^{q_r-1}(\lambda), \Delta^{q_r+1}(\lambda), \ldots, \Delta^{q_{2k+1}}(\lambda)\right\}$

$\operatorname{diag}\{K'(\lambda), K'(\lambda), \ldots, K'(\lambda), E_{p-r}\}$

или к пучку

(38) $\quad \operatorname{diag}\left\{\Delta^{q_1-1}(\lambda), \ldots, \Delta^{q_r-1}(\lambda), \Delta^{q_r+1}(\lambda), \ldots, \Delta^{q_{2k+1}}(\lambda)\right\}$

$\operatorname{diag}\{K(\lambda), K'(\lambda), \ldots, K'(\lambda), E_{p-r}\}$.

Отсюда в силу (35), (36), (37) и (38) мы заключаем, что

$\mathcal{N}^+_{o2k+2}(\lambda, s, 2k+2)$ имеет две компоненты связности и их представители принимают вид (33) или (34).

Теперь пусть $L(\lambda) \in \mathcal{N}^+_o(\lambda, s, 2k+3)$ с такими числами

$s_j (j = 1, 2, \ldots, 2k+3)$ что $s_{2k+3} = s_{2k+2} = \ldots = s_2 = 1$,

а $s_1 = 2q_1$ $(q_1 \geqslant 1)$. Отсюда и ясно, что в разложении вида

(12) $\quad \operatorname{diag}\{L_1(\lambda), 1\}$ пучок $L_1(\lambda)$ можно привести к пучку второго порядка, а именно

$$L_1(\lambda) \approx \operatorname{diag}\{l(\lambda), E_{2k+1}\}$$

Из соотношения (12) видим, что $\mathcal{L}(\lambda)$ можно прогомотопировать к одному из следующих

(39) $\quad \operatorname{diag}\{L_1(\lambda), 1\} \operatorname{diag}\{K(\lambda), K(\lambda), \ldots, K(\lambda)\}$

и

(40) $\quad \operatorname{diag}\{\mathcal{L}_1(\lambda), 1\} \operatorname{diag}\{K(\lambda), K'(\lambda), K(\lambda), \ldots, K(\lambda)\}$

Так как $l(\lambda)$ имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$, то его можно привести к

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -\Delta^{q_1-1}(\lambda) & \Delta^{q_1-1}(\lambda).\lambda \end{vmatrix}$$

Следовательно (в силу (39), (40)):

$$\mathcal{L}(\lambda) \approx \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -\Delta^{q_1-1}(\lambda) & \Delta^{-q_1-1}(\lambda)\cdot\lambda \end{pmatrix} E_{2k+2}\right\} \operatorname{diag}\{K(\lambda), K(\lambda), \dots, K(\lambda)\} =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{\Delta(\lambda), \Delta^{q_1-}(\lambda), E_{2k+2}\right\}\operatorname{diag}\left\{E_2, K(\lambda), \dots, K(\lambda)\right\}$$

и

$$\mathcal{L}(\lambda) \approx \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -\Delta^{q_1-1}(\lambda) & \Delta^{q_1-1}(\lambda)\cdot\lambda \end{pmatrix}, E_{2k+2}\right\} \operatorname{diag}\{K(\lambda), K'(\lambda), K(\lambda), \dots,$$

$$\mathcal{K})\lambda)\} = \operatorname{diag}\left\{\Delta(\lambda), \Delta^{q_1}(\lambda), E_{2k+2}\right\}\operatorname{diag}\left\{E_2, K'(\lambda), K(\lambda), \dots, K(\lambda)\right\}$$

Отсюда:

$$L_0(\lambda) \approx \operatorname{diag}\{\Delta^{q_1}(\lambda), E_{2k+2}\}\operatorname{diag}\{1, K(\lambda), \dots, K(\lambda)\}$$

или

$$L_0(\lambda) \approx \operatorname{diag}\{\Delta^{q_1}(\lambda), E_{2k+2}\}\operatorname{diag}\{1, K'(\lambda), K(\lambda), \dots, K(\lambda)\}$$

Случай когда $s_2 = 1$ рассматривается тривиально, поскольку тогда пучок $L_1(\lambda)$ можно привести к пучку порядка $2k+2$.

Предположим теперь, что множество $\mathcal{N}_0^+(\lambda, s, 2k+3)$ имеет две компоненты связности при $\min s_j = s_0$. Докажем,

$$1 \leqslant j \leqslant 2k+2$$

что $\mathcal{N}_0^+(\lambda, s, 2k+3)$ имеет также две компоненты связности при

$$\min_{1 \leqslant j2k+2} s_j = s_0 + 1.$$

Будем различать случай, когда s_0 — четное и нечетное, Пусть $s_0 + 1 = 2q_0 = s_1$. Тогда вспомогательный пучок $\ell(\lambda)$ гомотопен

$$\ell(\lambda) \approx \operatorname{diag}\{L_1(\lambda), 1\}\operatorname{diag}\{K(\lambda), \dots, K(\lambda)\},$$

пучок $L_1(\lambda)$ — порядка $(2k+3)$ и его первая строка имеет вид: $(\lambda\ 1\ 0 \dots 0)$. Степени строк $L_1(\lambda)$ равны $1, s_1 - 1, \dots, s_{2k+2} - 1$ — соответственно. Посколчку для этого пучка $\min s_j - 1 = s_0$, то по предположению индукции мы можем деформировать $L_1(\lambda)$ (при сохранении первой строки) к виду:

$$\operatorname{diag}\left\{1, \Delta^{q_1-1}(\lambda), \dots, \Delta^{q_{2k+3}-2m-1}(\lambda), \Delta^{q_{2k+4}-2m}(\lambda), \dots, \Delta^{q_{2k+2}}(\lambda)\right\} \times$$

$$\operatorname{diag}\{K'(\lambda),\dots, K'(\lambda), E_{2m-1}\}$$

или к пучку:

$$\operatorname{diag}\left\{1, \Delta^{q_1-1}(\lambda),\dots, \Delta^{q_{2k+3-2m}-1}(\lambda), \Delta^{q_{2k+4-2m}}(\lambda),\dots, \Delta^{q_{2k+2}}(\lambda)\right\} \times$$

$$\operatorname{diag}\{E_2, K'(\lambda), K'(\lambda)\dots, K'(\lambda), E'_{2m-1}\}$$

Отсюда имеем:

$$\mathcal{L}(\lambda) \approx \operatorname{diag}\{1, \Delta^{q_1-1}(\lambda),\dots,\Delta^{q_{2k+3-2m}-1}(\lambda), \Delta^{q_{2k+4-2m}}(\lambda), \Delta^{q_{2k+2}}(\lambda)\} \times$$

$$\operatorname{diag}\{K'(\lambda), K'(\lambda),\dots, K(\lambda), E_{2m}\}\operatorname{diag}\{K(\lambda),\dots, K(\lambda)\} =$$

$$= \operatorname{diag}\{\Delta(\lambda), \Delta^{q_1}(\lambda),\dots,\Delta^{q_{2k+3-2m}}(\lambda),\Delta^{q_{2k+4-2m}}(\lambda),\dots,$$

$$\Delta^{q_{2k+2}}(\lambda), 1\}\operatorname{diag}\{E_{2k+3-2m}, K(\lambda),\dots, K(\lambda)\}$$

и

$$\mathcal{L}(\lambda) \approx \operatorname{diag}\{\Delta(\lambda), \Delta^{q_1}(\lambda), \dots, \Delta^{q_{2k+2}}(\lambda), 1\}\operatorname{diag}\{E'_{2k+4-2m}, K(\lambda), \dots$$

$$\dots, \mathcal{K}(\lambda), \overline{K}(\lambda)\}.$$

Из последних пучков следует, что $L_0(\lambda)$ либо гомотопен (35); либо гомотопен (36). Слчуай $\min s_j = s_0 + 1 = 2q_0 + 1$ — нечетное число рассматривается аналогично.

Нам остается доказать, что пучки (21), (25) и пучки (23), (24) попарно не гомотопны. В самом деле, введем вспомогательные матричные пучки $\mathcal{U}_1(\varphi)$ и $\mathcal{U}_2(\varphi)$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (замкнутые кривые в группе невырожденных матриц) по формулам

$$\mathcal{U}_1(\varphi) = S(\sin\varphi)\operatorname{diag}\{(\operatorname{ctg}^2\varphi + 1)^{q_1}, \dots, (\operatorname{ctg}^2\varphi + 1)^{q_p}\} = E_p$$

$$\mathcal{U}_2(\varphi) = S(\sin\varphi)\operatorname{diag}\{(\operatorname{ctg}^2\varphi + 1)^{q_1}, \dots, (\operatorname{ctg}^2\varphi + 1)^{q_{p-2}},$$

$$(\operatorname{ctg}^2\varphi + 1)^{q_{p-1}-1}, (\operatorname{ctg}^2\varphi + 1)^{q_p-1}\}\operatorname{diag}\left\{E_{p-2}, \begin{pmatrix} \operatorname{ctg}^2\varphi - 1 & -2\operatorname{ctg}\varphi \\ 2\operatorname{ctg}\varphi & \operatorname{ctg}^2\varphi - 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \operatorname{diag}\{E_{p-2}, Q(\varphi)\}.$$

Здесь

$$Q(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

а

$$S(\sin\varphi) = \operatorname{diag}\{\sin\varphi^{s_1}, \sin\varphi^{s_2}, \dots, \sin\varphi^{s_p}\}.$$

Так как $\mathcal{U}_1(0) = \mathcal{U}_2(\pi) = E_p$. Ясно если (21) гомотопен (22), то циклы $\mathcal{U}_1(\varphi)$ и $\mathcal{U}_2(\varphi)$ гомотопны, т. е. $Q(\varphi)$ не гомотопен E_2 (вращение первой строки $Q(\varphi)$ равно единице). Следовательно данные пучки не гомотопны.

Аналогичные рассуждения для пучков (23) и (24) приводят нас к циклам:

$$\mathcal{U}_3(\varphi) = \operatorname{diag}\{E_{p-2m}, Q_1(\varphi)\}$$

$$\mathcal{U}_4(\varphi) = \operatorname{diag}\{E_{p-2m}, Q_2(\varphi)\}$$

Здесь

$$Q_1(\varphi) = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right\}$$

$$Q_2(\varphi) = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right\}$$

Очевидно, что $\qquad \mathcal{U}_3(0) = \mathcal{U}_4(0) = E_p \qquad$ и

$\mathcal{U}_3(\pi) = \mathcal{U}_4(\pi) = \operatorname{diag}\{E_{p-2}, -E_2\}$. Следовательно две кривые $\mathcal{U}_3(\varphi)$, $\mathcal{U}_4(\varphi)$, имеющие общие концы, негомотопны в группе невырожденных матриц, нескольку цикл

$$\mathcal{U}(\varphi) = \begin{cases} \mathcal{U}_3(\varphi) & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ \mathcal{U}_4(\varphi) & \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

гомотопен циклу

$$\tilde{\mathcal{U}}(\varphi) = \operatorname{diag}\left\{E_{p-2}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right\},$$

который не стягивается в точку [2].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Боярский, *О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости*, Бюлл. Польской АН, сер. матем., астр. и физ. наук 7, № 9 (1959), 565—570.

2. Г. Вейль, *Классические группы, их инварианты и представления*, М., Госиздат. И.Л. 1947, 1—408.

3. В. С. Виноградов, *О несингулярных псевдосимметрических матричных полиномах*, С.М.Ж. 8, № 2, (1967), 463—466.

4. Л. Р. Волевич, *Об одной задаче линейного програмирования, возникающей в дифференциальных уравнениях*, УМН, 18, в. 3 (1963), 155—162.

5. Л.Р. Волевич, *Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем*, Мат. сбор., 68 (110), № 3, (1965), 373—416.

6. Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Изд. М. «Наука», 1967, 1—575.

7. И.М. Гельфанд, *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений*, УМН, 14, в. 3 (1959), 3—19.

8. И.М. Гельфанд, *Об эллиптических уравнениях*, УМН, 15, в.3 (1960), 121 — 132.

9. И.М. Гельфанд, И.Г. Петровский и Г.Е. Шилов, *Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными*, Труды III всесоюзного матем. съезда, 3, изд. АН СССР, 65—72.

10. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильберновом пространстве*, М. 1965, 1—448.

11. Ле Хыу Зиен, *Топологическая классификация эллиптических по Дуглису—Ниренбергу с 3 уравнениями на плоскости*, Тезисы докладов VII-Всесоюзной топологической конференции, Минск (1977).

12. Ле Хыу Зиен, *Топологическая классификация задач Дирихле для эллиптических по Петровскому систем с комплексными коэффициентами на плоскости*, ДАН БССР, 22, №2 (1978), 214—216.

13. Ле Хыу Зиен, *О классификации матричных пучков*, Тезисы IV Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах, Минск (1978).

14. Ле Хыу Зиен, *Гомотопическая классификация общих краевых задач для систем, эллиптических по Петровскому на плоскости*, ДАН БССР, 22. № 10 (1978), 877 —880.

15. Ле Хыу Зиен. и. В. И. Шевченко, *Гомотопическая классификация систем эллиптических по Петровскому на плоскости*, ДАН СССР, 238, № 1 (1978), 26 – 29.

16. Ле Хыу Зиен и. В. И. Шевченко, *Гомотопическая классификация систем эллиптических по Дуглису—Ниренбергу на плоскости*, ДАН СССР, 224, № 4 (1979).

17. В. Б. Лидский и П. А. Фролов, *Компоненты связности нормально разрешимых эллиптических систем на плоскости*, ДАН СССР, 192, № 4 (1970), 728 — 731.

18. П. А. Фролов, *Топологическая классификация эллиптических операторов на плоскости*, Кандидат. дисс. М. 1969.

19. П. А. Фролов, *О компонентах связности вещественных эллиптических систем на плоскости* ДАН СССР, 181, № 6 (1968), 1350 – 1353.

20. П.А. Фролов. *Топологическая структура нормально разрешиных эллипитческих операторов с постоянными коэффициентами на плоскости*, ДАН СССР, 191, № 6 (1970), 1238 – 1240.

21. П. А. Фролов, *Топологическая структура нормально разрешимых первых краевых задач на плоскости*, Функ. анализ и его прилож. Т, 13, в 3 (1979), 60 — 71.

22. П. А. Фролов, *О топологической структуре эллиптических краевых задач в пространстве*, Функ. анализ и его прилож. Т. 18, в. 2 (1984). 81 – 84.

23. В. И. Шевченко, *Гомотопическая классификация краевых задач Гильберта для голоморфного вектора*, ДАН СССР, 201, № 5 (1971), 1067 — 1069.

24. В.И. Шевченко, *О гомотопической классификации систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу*, ДАН, СССР, 225, № 6 (1975), 1275 — 1277.

25. В. И. Шевченко, *Некоторые оценки для числа компонент связности множества эллиптических систем*, ДАН СССР, 228, № 2, (1976), 322 — 324.

Поступила в редакцию
2 февраля 1985 Г.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, P.O. BOX 631, BO HO, 10.000 HANOI, VIETNAM