ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Vol. 10 N₀I (1985)

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИГРАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

ТА ЗУЙ ФЫОНГ, ФАН ЗУЙ ХАЙ

Дискретные игры имеют весьма важные значения, как теоретическое, так и практическое. Подобно многим проблемам математического анализа, дифференциальные игры допускают дискретные аппроксимации. Непрерывные процессы заменяются последовательностями отдельных шагов. Такая замена даёт возможность применять методы приближённого вычисления. Дискретные игры могут мотивировать и пояснять многие идеи непрерывных дифференциальных игр. Дискретные игры интересны не только тем, что непрерывную дифференциальную игру можно заменить некоторой приближённой квантизованной моделью. Дискретные игры могут непосредственно служить хорошей моделью во многих задачах экономики, военного дела и т.д.

Дискретные игры преследования были изучены во многих работах [1-8] В указанных работах приведены различные достаточные условия возможности окончания преследования за конечное число шагов.

Настоящая работа посвященна задачам преследования в линейных дискретных играх с запаздыванием при общих предположениях об инфомации. Получаются эффективные достаточные условия поимки из данного состояния фазового пространства.

Следует заметить, что несмотря на важность изучения системы с запаздыванием, игра с запаздыванием по методу Л.С. Понтрягину пока очень мало изучена. Имеется, лишь работа М.С. Никольского по линейным дифференциалным играм преследования с запаздыванием [9]. А дискретные игры с запаздыванием, по видимому изучаются впервые в данной работе. Статья примыкает к исследованием [4—8].

1. Выводим сначала формулу Коши для дискретной системы с запаздыванием. Для простоты в записи формул, изучается лишь система с одним запаздыванием. Совершенно аналогично можно сформулировать результаты для произвольного числа запаздываний.

Пусть движение вектора $z \in R^n$ описывается системой разностных уравнений с запаздыванием

$$z(k+1) = A_0(k)\, z(k) + A_{-1}(k)\, z(k-1) + f(k), \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$z(0) = z_0\ ;\ z(-1) = z_{-1}, \tag{1.2}$$

где $k = 0, 1 \ldots$ — номер шага ; $A_0(k)$, $A_{-1}(k)$ — матрицы размерности $n \times n$; и $f(k)$ — вектор — функция дискретного аргумента k, принимающая значения в R^n

Пусть $F(k, i) - n \times n$ — Матричная функция дискретных аргументов k и i. Умножим обе части (1,1) на $F(k, i)$ слева и просуммируем по i от 0 до $k-1$. Тогда имеем

$$\sum_{i=0}^{k-1} F(k, i)\, z(i+1) = \sum_{i=0}^{k-1} F(k, i)\, A_0(i)\, z(i) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1} F(k, i)\, A_{-1}(i)\, z(i-1) + \sum_{i=0}^{k-1} F(k, i) f(i). \tag{1.3}$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=0}^{k-1} F(k, i)\, z(i+1) = \sum_{i=0}^{k-1} F(k, i-1)\, z(i) + F(k, k-1)\, z(k) - F(k, -1) z(0). \tag{1.4}$$

Подставив (1.3) в (1.4), получаем

$$F(k, k-1)\, z(k) = F(k, -1)\, z(0) + \sum_{i=0}^{k-1} F(k, i)\, A_0(i)\, z(i) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1} F(k, i)\, A_{-1}(i)\, z(i-1) + \sum_{i=0}^{k-1} E(k, i)\, f(i) - \sum_{i=0}^{k-1} F(k, i-1)\, z(i) = F(k, -1) z(0) +$$
$$+ F(k, 0)\, A_{-1}(0)\, z(-1) + \sum_{i=0}^{k-1} F(k, i)\, f(i) + \sum_{i=0}^{k-1} \Big[F(k, i)\, A_0(i) + F(k, i+$$
$$+ 1)\, A_{-1}(i+1) - F(k, i-1) \Big]\, z(i) - F(k, k)\, A_{-1}(k)\, z(k-1). \tag{1.5}$$

Положим

$$F(k, i-1) = F(k, i)\, A_0(i) + F(k, i+1)\, A_{-1}(i+1),$$
$$i = k-1,\ k-2, \ldots 0;\ F(k, k-1) = E \tag{1.6}$$

$$F(k, s) = \tilde{O} \quad \text{при всех } S \geqslant k,$$

где, E, $\tilde{O}$ — соответственно единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$.

Тогда из (1.5) с учётом начального условия (1.2) получим дискретный вариант формулы Коши для системы с запаздыванием:

$$z(k) = F(k, -1) z_0 + F(k, 0) A_{-1}(0) z_{-1} + \sum_{i=1}^{k-1} F(k, i) f(i), \tag{1.7}$$

где $F(k, i)$ определяются соотношениями (1.6). Заметим, что (1.7) обобщает формулу для обыкновенных дискретных систем [10]

2. Пусть движение вектора $z \in R^n$ описывается системой разностных уравнений с запаздыванием:

$z(k+1) = A_0(k) z(k) + A_1(k) z(k-1) - B(k) u(k) + C(k) v(k)$, (2.1) где $k = 0,1,2,\ldots$ — номер шага; $z(0) = z_0$; $z(-1) = z_{-1}$ — начальное состояние системы; $A_0(k)$, $A_{-1}(k)$, — квадратичные матрицы порядка n; $B(k)$, $C(k)$ — соответственно матрицы размерности $p \times n$ и $q \times n$; $u(k) \in R^p$; $v(k) \in R^q$ — соответственно управления преследующего и убегающего объекта на k—ом шаге. Управления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям:

$$u(k) \in P_k;\ v(k) \in Q_k, \tag{2.2}$$

где P_k, Q_k некоторые подмножества пространств R^p и R^q соответсвенно.

Пусть в R^n задано некоторое терминальное множество $M = M_1 + M_2$, где M_1 — подпространство прострaства R^n, а $M_2 \subset L$, где L — ортогональное дополнение к M_1 в R^n. Через π обозначим оператор ортогонального проектирования из R^n на L. Пусть $\dim L = \tau$. В L возьмём некоторый базис, тогда оператору π соответствует некоторая матрица размерности $n \times \tau$, которая обозначается через Π.

Применяя формулу (1.7) для системы (2.1), получим

$$z(k) = F(k, -1) z_0 + F(k,0) A_1(0)\ z_{-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{k-1} F(k,i) B(i) u(i) + \sum_{i=0}^{k-1} F(k,i) C(i) v(i), \tag{2.3}$$

где $F(k,i)$ определяются соотношениями (1.6),

Пусть $N(s)$, $s = 0, 1, 2\ldots$ — заданные множества такие, что $N(s) \subset \{0, 1 \ldots s\}$, $s = 0, 1\ 2, \ldots$

Будем говорить, что преследованле в линейной дискретной игре (2.1) — (2.2) заканчивается за K_1 шагов, если при любых управлениях $v(i) \in Q_i$, $i = 0, 1, \ldots K_1 - 1$, можно построить управления $u(i) \in Pi$, $i = 0, 1, \ldots K_1 - 1$ такие, что $z(K_1) \in M$. При этом для построения управления $u(k)$ на каждом k — ом шаге разрешается использовать начальное значение (z_{-1}, z_0), систему (2.1) — (2.2) и управления $v(s)$ при всех S таких, что $S \in N(k)$. Следует заметить, что предположение об информации, используемое нами, является достаточно общим. Такой вид информации включает в себе как частный случай полную и неполную информацию, а также информацию с запаздыванием.

Введём в рассмотрение множества

$$\Delta_1(K) = \{0 \leqslant k \leqslant K-1 \,;\, N(k) \neq \varnothing\} \,;\; \Delta_2(K) = \{0, 1,\ldots, K-1\} \setminus \Delta_1(K)\,;$$

$$\Delta_3(K) = \bigcup_{k \in \Delta_1(K)} N(k) \,;\; \Delta_4(K) = \{0, 1,\ldots, K-1\} \setminus \Delta_3(K)\,;$$

$$H(K) = \sum_{k \in \Delta_4(K)} \Pi F(K, k)\, C(k) Q_k \,;\; G(K) = \sum_{k \in \Delta_2(K)} \Pi F(K, k)\, B(k)\, P_k .$$

Пусть $\Delta_1(K) \neq \varnothing$, тогда расположим элементы множеств $\Delta_1(K)$, $\Delta_3(K)$ по возрастанию следующим образом:

$$\Delta_1(K) = \{S_1, S_2,\ldots, S_{|\Delta_1(K)|}\} \,;\; \Delta_3(K) = \{\tau_1, \tau_2,\ldots, \tau_{|\Delta_3(K)|}\},$$

где $S_1 < S_2 < \ldots < S_{|\Delta_1(K)|}$; $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{|\Delta_3(K)|}$, причём $|\Delta_i(K)|$ — число элементов множеств $\Delta_i(K)$, $i = 1, 3$.

Введём операцию геометрического вычитания множеств (см. [11])

$$B \,\overset{*}{-}\, C = \{z : z + C \subset B\}.$$

ТЕОРЕМА I. *Пусть K_1 — целое положительное число такое, что*

а) $M_2 \,\overset{*}{-}\, H(K_1) \neq \varnothing$

б) Существует матрица

$$\varphi(K_1) = \Big(\gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) \Big) \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, |\Delta_1(K_1)| \\ j = 1, \ldots, |\Delta_3(K_1)| \end{matrix}$$

размерности $|\Delta_3(K_1)| \times |\Delta_1(K_1)|$, *обладающая свойствами:*

1. $\gamma_{K_1}(Si, \tau j) = 0$ *если* $\tau_j \notin N(S_i)$, $i = 1,\ldots, |\Delta_1(K_1)|$; $j = 1,\ldots, |\Delta_3(K_1)|$,

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) = 1$ *при всех* $j = 1,\ldots, |\Delta_3(K_1)|$

3. $W_1(S_i) = \Pi F(K_1, S_i)\, B(S_i)\, P_{S_i} \overset{*}{-}$

$$\left(\sum_{\tau_j \in N(S_i)} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) \Pi F(K_1, \tau_j)\, C(\tau_j)\, Q\tau_j \right)$$

$$\neq \varnothing \qquad \text{при всех } i = 1, \dots, |\Delta_1(K_1)|$$

в)

$$\Pi F(K_1, -1) z_0 + \Pi F(K_1, 0)\, A_1(0)\, z_{-1} \in G(K_1) + (M_2 \overset{*}{-} H(K_1)) + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} W_1(S_i), \tag{2.4}$$

где $F(k, i)$ *определяются соотнощениями* (1.6).

Тогда преследование в дискретной игре (2.1) – (2.2) *из начального состояния* (Z_{-1}, Z_0) *заканчивается за* K_1 *шагов.*

Доказательство: Из (2 . 4) следует, что существуют векторы $g \in G(K_1)$, $m \in M_2 \overset{*}{-} H(K_1)$; $\omega_i \in W_1(S_i)$, $i = 1, \dots |\Delta_1(K_1)|$ такие, что

$$\Pi F(K_1, -1)\, z_0 + \Pi F(K_1, 0)\, A_{-1}(0) z_{-1} = g + m + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \omega_1(i). \tag{2.5}$$

Пусть $\bar{v}(i) \in Q_i$, $i = 0, 1 \dots, K_1 - 1$ – любое допустимое управление убегающего объекта. Из $g \in G(K_1)$, $m \in M_2 \overset{*}{-} H(K_1)$ и (2.5) следует, что существуют векторы $u^*(k) \in P_k$, $k \in \Delta_2(K_1)$, $m_2 \in M_2$ такие, что

$$\Pi F(K_1, -1)\, z_0 + \Pi F(K_1, 0)\, A_{-1}(0)\, z_{-1} = \sum_{k \in \Delta_2(K_1)} \Pi F(K_1, k)\, B(k)\, u^*(k) + $$

$$+ m_2 - \sum_{k \in \Delta_4(K_1)} \Pi F(K_1, k)\, C(k)\, \bar{v}(k) + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)} \omega_i. \tag{2.6}$$

С другой стороны из $\omega_i \in W_1(S_i)$, $i = 1, \dots, |\Delta_1(K_1)|$ следует, что существуют $\tilde{u}(S_i) \in P_{S_i}$, $i = 1, \dots, |\Delta_1(K_1|$ такие что

$$\omega_i = \Pi F(K_1, S_i)\, B(S_i)\, \tilde{u}(S_i) - \sum_{r_j \in N(S_i)} \gamma_{K_1}(S_i, r_j)\, \Pi F(K_1, r_j)\, C(r_j)\, \bar{v}(r_j).$$

Отсюда имеем

$$\Pi F(K_1,-1)z_0+\Pi F(K_1,0)A_{-1}(0)z_{-1}=\sum_{k\in\Delta_2(K_1)}\Pi F(K_1,k)B(k)u^*(k)+$$

$$+m_2+\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|}\Pi F(K_1,S_i)B(S_i)\tilde{u}(S_i)-\sum_{k\in\Delta_4(K_1)}\Pi F(K_1,k)C(k)\bar{v}(k)-$$

$$-\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|}\left(\sum_{r_j\in N(Si)}\gamma_{K_1}(S_1,r_j)\Pi F(K_1,r_j)C(r_j)\bar{v}(r_j)\right). \qquad (2.7)$$

Yиравление $u(i)\in P_i$, $i=0,1,\ldots,K_1-1$ преследователя определяется следующим образом :

$$\bar{u}(i)=\begin{cases}u^*(i),\ i\in\Delta_2(K_1)\\ \tilde{u}(S_k),\ i=S_k,\ k=1,\ldots,|\Delta_1(K_1)|.\end{cases}$$

Имеем

$$\Pi z(K_1)=\Pi F(K_1,-1)Z_0+\Pi F(K_1,0)A_1(0)Z_{-1}-$$

$$-\sum_{i=0}^{K_1-1}\Pi F(K_1,i)B(i)\bar{u}(i)+\sum_{i=0}^{K_1-1}\Pi F(K_1,i)C(i)\bar{v}(i)=$$

$$=\Pi F(K_1,-1)z_0+\Pi F(K_1,0)A_1(0)z_{-1}+\sum_{i=0}^{K_1-1}\Pi F(K_1,i)C(i)\bar{v}(i)-$$

$$-\sum_{i\in\Delta_1(K_1)}\Pi F(K_1,i)B(i)u^*(i)-\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|}\Pi F(K,S_i)B(S_i)\tilde{u}(S_i).$$

Из (2.7) имеем

$$\Pi z(K_1)=\sum_{k\in\Delta_2(K_1)}\Pi F(K_1,k)B(k)u^*(k)+m_2+$$

$$+\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|}\Pi F(K_1,S_i)B(S_i)\tilde{u}(S_i)-\sum_{k\in\Delta_4(K_1)}\Pi F(K_1,k)C(k)\bar{v}(k)-$$

$$-\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|}\left(\sum_{\tau_j\in N(Si)}\gamma_{K_1}(S_i,\tau_j)\Pi F(K_1,\tau_j)C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j)\right)+$$

$$+\sum_{k\in\Delta_4(K_1)}\Pi F(K_1,k)C(k)\bar{v}(k)+\sum_{k\in\Delta_3(K_1)}\Pi F(K_1,k)C(k)\bar{v}(k)-$$

$$-\sum_{i\in\Delta_2(K_1)} \Pi F(K_1, i)\, B(i)\, u^*(i) - \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \Pi F K\,(_1, S_i)\; B(S_i)\,\tilde{u}(S_i) =$$

$$= m_2 + \sum_{i\in\Delta_3(K_1)} \Pi F\,(K_1, i)\, C\,(i)\,\overline{v}(i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left(\sum_{\tau_j\in N(Si)} \gamma_{K_1}(S_1, \tau_j)\, \Pi F\,(K_1, \tau_j)\; C\,(\tau_j)\,\overline{v}\,(\tau_j). \right) \tag{2.8}$$

Из свойств матрицы $\varphi\,(K_1)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left(\sum_{\tau_j\in N(S_i)} \gamma_{K_1}\,(S_i, \tau_j)\, \Pi F(K_1, \tau_j)\, C(\tau_j)\,\overline{v}(\tau_j) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left(\sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \gamma_{K_1}\,(S_i, \tau_j)\, \Pi F\,(K_1, \tau_j)\, C\,(\tau_j)\,\overline{v}\,(\tau_j) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \left(\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}\,(S_i, \tau_j) \right) \Pi F\,(K_1, \tau_j)\, C\,\tau)_j)\;\overline{v}(\tau_j) =$$

$$= \sum_{i\in\Delta_3(K_1)} \Pi F\,(K_1, i)\; C\,(i)\;\overline{v}\;(i). \tag{2.9}$$

Теперь из (2.8) и (2.9) имеем $\Pi z\,(K_1) = m_2$. А это значит, что $z(K_1)\in M$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть K_1 – целое положительное число такое, что*

а) $M_2 \stackrel{*}{-} H\,(K_1)$ — непустое множество, где M_2 — выпуклое,

б) Существует матрица

$$\Phi\,(K_1) = \begin{pmatrix} \varphi\;(K_1) \\ \alpha_{S_1}\;\; \alpha_{S_2}\; \ldots\ldots\; \alpha_{S\,|\Delta_1(K_1)|} \end{pmatrix}$$

размерности $(1 + |\Delta_3(K_1)|) \times |\Delta_1\,(K_1)|$, обладающая свойствами :

1) $\alpha_{S_i} \geqslant 0,\ i = 1,\ldots, |\Delta_1(K_1)|,$

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \alpha_{S_i} = 1,$

3) $\gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) = 0$ если $\tau_j \notin N(S_i)$,

4) $\sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) = 1; \; j = 1,\dots, |\Delta_3(K_1)|$

5) $W_2(S_i) \neq \phi$ *при всех* $i = 1,\dots, |\Delta_1(K_1)|$, *где*

$$W_2(S_i) = \Big(\Pi F(K, S_i)\, B(S_i) P_{S_i} + \alpha_{S_i}(M_2 \overset{*}{-} H(K_1))\Big) \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} \Big(\sum_{\tau_j \in N(S_i)} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)\, \Pi F(K_1, \tau_j)\, C(\tau_j) Q_{\tau j} \Big)$$

b) $\Pi F(K_1, -1)\, z_0 + \Pi F(K_1, 0)\, A_1(0)\, z_{-1} \in G(K_1) + \sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} W_2(S_i).$

Тогда преследование в дискретной игре (2.1) — (2,2) *из начального состояния* (z_{-1}, z_0) *заканчивается за* K_1 *шагов.*

Доказательство аналогично доказательству Теоремы I.

3. В этом пункте предположим, что управления $u(k)$, $v(k)$, $k = 0, 1,\dots$ удовлетворяют ограничениям:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| u(k) \|^2 \leqslant \rho^2; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \| v(k) \|^2 \leqslant \delta^2. \tag{3.1}$$

Положим

$$H_1(K) = \Big\{ \sum_{k \in \Delta_4(K)} \Pi F(K,k) C(k) v(k) : \sum_{k \in \Delta_4(K)} \| v(k) \|^2 \leqslant \delta^2 \Big\}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* K_1 — *целое положительное число такое, что*

а) $M_2 \overset{*}{-} H(K_1) \neq \phi$

б) *Существует матрица*

$$\varphi(K_1) = \big(\gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)\big)_{\substack{i=1,\dots,|\Delta_1(K_1)| \\ j=1,\dots,|\Delta_3(K_1)|}},$$

размера $|\Delta_3(K_1)| \times |\Delta_1(K_1)|$, *обладающая свойствами:*

1. $\gamma K_1(S_i, \tau_j) = 0$ *если* $\tau_j \notin N(S_i)$, $i = 1,\dots, |\Delta_1(K_1)|$, $j = 1,\dots, |\Delta_3(K_1)|$.

2. $\sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) = 1$ *при всех* $j = 1,\dots, |\Delta_3(K_1)|$

3. *Существуют линейные отображения* $\Phi_{\varphi(K_1)}(S_i, \tau_j)$ *из* R^q

$v_i \in R^p$, $i = 1,\dots, |\Delta_1(K_1)|$; $j = 1,\dots, |\Delta_3(K_1)|$ *такие, что*

3а. $\Phi_{\varphi(K_1)}(S_i, \tau_j) = \theta$ *если* $\tau_j \notin N(S_i)$, $i=1,\dots,|\Delta_1(K_1)|$; $j=1,\dots,|\Delta_3(K_1)|$

3б. $\Pi F(K,S_i)\, B(S_i)\, \Phi_{\varphi(K_1)}(S_i, \tau_j) = \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)\, \Pi F(K_1, \tau_j)\, C(\tau_j)$,

при всех $i = 1,\dots, |\Delta_1(K_1)|$; $j = 1,\dots, |\Delta_3(K_1)|$, *где* θ — *нулевое отображение*

3в. $$\chi^2(K_1) = \sup_{\sum\limits_{i=0}^{K_1-1} \|v(i)\|^2 \leqslant \delta^2} \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \sum_{\tau_j \in N(S_i)} \Phi_{\varphi(K_1)}(S_1,\tau_j) v(\tau_j) \right\|^2 \leqslant \tilde{\rho}^2,$$

где

$$\tilde{\rho}^2 = \rho^2 - \sum_{i\in\Delta_2(K_1)} \|u^*(i)\|^2,$$

причём $u^*(i)$, $i \in \Delta_2(K_1)$,— такие управления, что

$$\sum_{i\in\Delta_2(K_1)} \|u^*(i)\|^2 \leqslant \rho^2.$$

3г. $$\Pi F(K_1,-1)z_0 + \Pi F(K_1, 0)\, A_1(0)\, z_{-1} - \sum_{i\in\Delta_2(K_1)} \Pi(KF_1, i)\, B(i)\, u^*(i) \in$$
$$\in G_1(K_1) + (M_2 \overset{*}{-} H_1(K_1)), \tag{3.2}$$

где

$$G_1(K_1) = \Big\{ \sum_{i\in\Delta_1(K_1)} \Pi F(K_1(i)\, B(i)\, \omega(i) ;\ \sum_{i\in\Delta_1(K_1)} \|\omega(i)\|^2 \leqslant (\tilde{\rho} - \chi(K_1))^2 \Big\}.$$

Тогда преслодование в дискретной игре с интегральными ограничениями (2.I) (3.I) из начального состояния (z_{-1}, z_0) заканчивается за K_1 шагов.

Доказательство. Из соотношения (3.2) следует, что существуют векторы $m \in M_2 \overset{*}{-} H_1(K_1)$, $\overline{\omega}(S_i)$, $i = 1,\dots, |\Delta_1(K_1)|$ такие, что

1) $\sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \|\overline{\omega}(S_i)\|^2 \leqslant (\tilde{\rho} - \chi(K_1))^2$,

2) $\Pi F(K_1, -1)\, z_0 + \Pi F(K_1, 0)\, A_1(0)\, z_{-1} - \sum\limits_{i\in\Delta_2(K_1)} \Pi F(K_1, i)\, B(i)\, u^*(i) =$

$= m + \sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \Pi F(K_1, S_i)\, B(S_i)\, \overline{\omega}(S_i)$.

Пусть $\overline{v}(i)$, $i = 0, 1,.., K_1 - 1$ любые допустимые управления убегающего объекта. Тогда управления $\overline{u}(i)$, $i = 0,1,\dots, K_1 - 1$ преследователя определяется следующим образом:

$$\overline{u}(i) = \begin{cases} u^*(i), & i \in \Delta_2(K_1); \\ \sum\limits_{\tau_j \in N(S_k)} \Phi_{\varphi(K_1)}(S_k, \tau_j)\,\overline{v}(\tau_j) + \overline{\omega}(S_k); & i = S_k,\ k = 1,\dots,|\Delta_1(K_1)| \end{cases}$$

Из неравенства Минковского имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \| \overline{\omega}(S_k) + \sum_{\tau_j \in N(S_1)} \Phi_{\varphi(k_1)}(S_k, \tau_j)\overline{v}(\tau_j) \|^2 \right\|^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{k=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \| \overline{\omega}(S_k) \|^2 \right\|^{\frac{1}{2}} + \left\| \sum_{k=1}^{|\Delta_1(k_1)|} \| \sum_{\tau_j \in N(S_k)} \Phi_{\varphi(K_1)}(S_k, \tau_j)\overline{v}(\tau_j) \|^2 \right\|^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\rho} - \chi(K_1) + \chi(K_1) = \tilde{\rho}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=o}^{K_1-1} \| \overline{u}(i) \|^2 \sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \| u^*(i) \|^2 + \sum_{k=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \| \overline{u}(S_k) \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\rho}^2 + \sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \| u^*(i) \|^2 = \rho^2$$

А это значит, что $\overline{u}(i)$, $i = 0, 1, \dots, K_1 - 1$ — допустимые управления.

Из $m \in M_2 \overset{*}{-} H_1(K_1)$ следует, что существует вектор $m_2 \in M_2$ такой, что

$$\Pi F(K_1, -1)Z_o + \Pi F(K_1, 0)A_1(0)Z_{-1} - \sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \Pi F(K_1, i)B(i)u^*(i) =$$

$$= m_2 - \sum_{\in \Delta_4(K_1)} \Pi F(K_1, i)C(i)\overline{v}(i) + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \Pi F(K_1, i)B(S_i)\overline{\omega}(S_i). \qquad (33)$$

Имеем

$$\Pi Z(K_1) = \Pi F(K_1, -1)Z_o + \Pi F(K_1, 0)A_1(0)Z_{-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{K_1-1} \Pi F(K_1, i)B(i)\overline{u}(i) + \sum_{i=0}^{K_1-1} \Pi F(K_1, i)C(i)\overline{v}(i) =$$

$$= \Pi F(K_1, -1) Z_o + \Pi F(K_1, 0) A_{-1}(0) Z_{-1} + \sum_{i\in\Delta_4(K_1)} \Pi F(K_1, i) \overline{C(i)}\, v(i) -$$

$$- \sum_{i\in\Delta_2(K_1)} \Pi F(K_1, i) B(i) u^*(i) + \sum_{i\in\Delta_3(K_1)} \Pi F(K_1, i) C(i) \overline{v}(i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \Pi F(K_1, S_i) B(S_i) \overline{\omega}(S_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left(\sum_{\tau_j \in N(S_i)} \Pi F(K_1, S_i) B(S_i) \Phi_{\varphi(K_1)} (S_i, \tau_j) \overline{v}(\tau_j) \right).$$

Из (3.3) имеем

$$\Pi Z(K_1) = m_2 + \sum_{i\in\Delta_3(K_1)} \Pi E(K_1, i) C(i) \overline{v}(i) -$$

$$- \sum_{i=0}^{|\Delta_1(K_1)|} \left(\sum_{\tau_j\in N(S_i)} \Pi F(K_1, S_i) B(S_i) \Phi_{\varphi(K_1)} (S_i, \tau_j) \overline{v}(\tau_j) \right). \tag{3.4}$$

Из свойств матрицы $\varphi(K_1)$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \sum_{\tau_j \in N(S_i)} \Pi F(K_1, S_i) B(S_i) \Phi_{\varphi(K_1)} (S_i, \tau_j) \overline{v}(\tau_j) \right\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \sum_{i=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) \Pi F(K_1, \tau_j) C(\tau_j) \overline{v}(\tau_j) \right\| =$$

$$= \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \left\| \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) \right\| \Pi F(K_1, \tau_j) C(\tau_j) \overline{v}(\tau_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \Pi F(K_1, \tau_j) C(\tau_j) \overline{v}(\tau_j).$$

Таким образом из (3.4) следует, что $\Pi_Z(K_1) = m_2 \in M_2$. А это значит, что $Z(K_1 \in M$. теорема доказана,

4. В этом пункте мы рассмотрим линейные дискретые игнры преследования с разнотипными ограничениями на управления.

Предположим сначала, что управления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениями типа I, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| u(k) \|^2 \leqslant \rho^2 ; \; v(k) \in Q_k , \tag{4.1}$$

где Q_k — заданные множества в R^q.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполнены предположения а/ — г/ теоремы 3, причём* $H_1(K_1)$ *и* $\chi(K_1)$ *соответственно заменяются через* $\tilde{H}_1(K_1)$ *и* $\tilde{\chi}(K_1)$, *где*

$$\tilde{H}_1(K_1) = \sum_{k \in \Delta_1(K_1)} \Pi\, F(K_1, k)\, C(k)\, Q_k ,$$

$$\tilde{\chi}^2(K_1) = \sup_{\substack{v(i) \in Q_i \\ i=0,1,\dots,K_1-1}} \sum_{k=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \sum_{\tau_j \in N(S_k)} \Phi\varphi(K_1)(S_k, \tau_j)\, v(\tau_j) \right\|^2 .$$

Тогда преследование в дискретной игре (2. 1), (4. 1) *из начального состояния* (z_{-1}, z_0) *заканчивается за* K_1 *шагов.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Пусть теперь управления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям типа 2 на управления, т.е.

$$u(k) \in P_k ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \| v(k) \|^2 \leqslant 6^2 , \tag{4.2}$$

где P_k — заданные множества в R^p.

Положим

$$H(K) = \left\{ \sum_{k \in \Delta_4(K)} \Pi F(K, k)\, C(k)\, v(k) ; \; \sum_{k \in \Delta_4(K)} \| v(k) \|^2 \leqslant 6^2 \right\} ;$$

$$G(K) = \sum_{k \in \Delta_2(K)} \Pi F(K, k)\, B(k)\, P_k$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* K_1 *— положительное целое число такое, что*

а) $M_2 \stackrel{*}{-} H(K_1) \neq \phi$

б) *Существует матрица*

$$\varphi(K_1) = \Big(\gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) \Big)_{\substack{i = 1,\dots, |\Delta_1(K_1)| \\ j = 1,\dots, |\Delta_3(K_1)|}}$$

размера $|\Delta_3(K_1)| \times |\Delta_1(K_1)|$ *со свойствами:*

1. $\gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)=0$ *если* $\tau_j \notin N(S_i)$, $i=1, \ldots, |\Delta_1(K_1)|$; $j=1, \ldots, |\Delta_3(K_1)|$

2. $\sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)=1$ *при всех* $j=1, \ldots, |\Delta_3(K_1)|$

3. $$W(K_1)=\bigcap_{v\in Q(K_1)} \left\{ \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left[\Pi F(K_1, S_i)\, B(S_i)\, P_{S_i} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\tau_j\in N(S_i)} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)\, \Pi F(K_1, \tau_j)\, C(\tau_j)\, v(\tau_j) \right] \right\},$$

где $Q(K_1)=\left\{ v=(v(S_1), \ldots, v(S_{|\Delta_1(K_1)|})): \sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \|v(S_i)\|^2 \leqslant \sigma^2 \right\}.$

в/ $\Pi F(K_1, -1)Z_0 + \Pi F(K_1\, o)\, A_{-1}(o)\, Z_{-1}(o) \in G(K_1) + (M_2 \overset{*}{-} H(K_1)).$

Тогда преследование в игре (2.1), (4.2) из начального состояния Z_{-1}, Z_{-0}) *заканчивается за* K_1 *шагов.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы I.

5. Как видно из предыдуших пунктов, предположение об информации, используемое нами, является достаточно общим. В этом пункте рассматривается частный, случай, когда информация является полной, т. е. преследователь на каждом к-ом щаге знает началчное положение (Z_{-1}, Z_0), систему (2.1) и управление $v(k)$ убегающего объекта. А это значит, что $N(k)=\{k\}$ при всех $k=0,1,\ldots$ поэтому $\Delta_1(K)=\Delta_3(K)=\{0,1, \ldots, K-1\}$; $\Delta_2(K)=\Delta_4(K)=\phi$. Излагаются частные формы теорем I-5, которые полезны для исследования конкретных дискретных игр с запаздыванием.

СЛЕДСТВИЕ I. *Пусть* K_1 *— положительное целое число такое, что*

а) $\Pi F(K_1, i)\, B(i)\, P_i \overset{*}{-} \Pi F(K_1, i)\, C(i)\, Q_i \neq \phi$, $i=0, 1, \ldots, K_1-1$,

б/ $\Pi F(K_1, -1)Z_0 + \Pi F(K_1, o)\, A_{-1}(0)\, Z_{-1} \in M_2 + \sum\limits_{i=0}^{K_1-1} (\Pi F(K_1, i)\, B(i)\, P_i \overset{*}{-} \Pi F(K_1, i)\, C(i)\, Q_i).$

Тогда преследование в дискретной игре (2.1) — (2.2) из начального состояния Z_{-1}, Z_0) *заканчивается за* K_1 *шагов.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть* M_2 — *выпуклое множество и существуют такие числа* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{K_1-1}$, *что*

а) $\alpha_i \geqslant 0,\ i = 0, 1, \ldots, K_1 - 1,$

б) $\sum\limits_{i=0}^{K_1-1} \alpha_i = 1,$

В) $(\alpha_i M_2 + \Pi F(K_1, i) B(i) P_i) \overset{*}{-} \Pi F(K_1, i) C(i) Q_i \neq \phi$

при всех $i = 0, 1, \ldots, K_1 - 1.$

2) $\Pi E(K_1, -1) z_0 + \Pi E(K_1, 0) A_{-1}(0) z_{-1} \in$

$$\in \sum_{i=0}^{K_1-1} \left[(\alpha_i M_2 + \Pi F(K_1, i) B(i) P_i) \overset{*}{-} \Pi F(K_1, i) C(i) Q_i \right].$$

Тогда преследование игре (2.1) — 2.2 *из начального состояния* (Z_{-1}, Z_0) *заканчивается за* K_1 *шагов.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть* K_1 — *целое положительное число такое, что*

а) *Существуют линейные отображения* $\Phi(k)$, $k = 0, 1, \ldots, K_1 - 1$ *из* R^q *в* R^p *такие, что*

$$\Pi F(K_1, i) B(i) \Phi(i) = \Pi F(K_1, i) C(i),\ I = 0, 1, \ldots, K_1 - 1,$$

б) $$\chi^2(K_1) = \sup_{\sum\limits_{k=0}^{K_1-1} \| v(k) \|^2 \leqslant \sigma^2} \sum_{k=0}^{K_1-1} \| \Phi(k) v(k) \|^2 \leqslant \rho^2,$$

в) $\Pi F(K_{-1}, -1) z_0 + \Pi F(K_1, 0) A_{-1}(0) z_{-1} \in M_2 + G(K_1)$, *где*

$$G(K_1) = \left\{ \sum_{i=0}^{K_1-1} \Pi F(K_1, i) B(i) \omega(i) : \sum_{i=0}^{K_1-1} \| \omega(i) \|^2 \leqslant \left(\rho - \chi(K_1)\right]^2 \right\}.$$

Тогда из начального состояния (z_{-1}, z_0) *можно закончить игру* (2.1), (3.1) *за* K_1 — *шагов.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть выполнены предположения а/ — в/ следствия 3, причём* $\chi^2(K_1)$ *заменяются через*

$$\chi^2\,(K_1) = Sup \sum_{k=0}^{K_1-1} \|\Phi(k)v(k)\|^2$$

$$v(k) \in Q_k$$

$$k = 0,1,.., K_1 - 1$$

Тогда преследование (2.1), (4.1) из начального состояния (z_{-1}, z_0) *заканчивается за* K_1 *шагов.*

СЛЕДСТВИЕ 5. *Пусть* K_1 *— целое положительное число такое, что*

$$а)\ W\ (K_1 = \bigcap_{v \in Q(K_1)} \left\{ \sum_{i=0}^{K_1-1} \left(\Pi F(K_1, i)\, B(i)\, P_i - \Pi F(K_1, i)\, C(i)\, v(i) \right) \right\} \neq \phi,$$

$$где\ Q(K_1) = \left\{ v = \left(v(0),.., v(K_1 - 1) : \sum_{i=0}^{K_1-1} \|v(i)\|^2 \leqslant б^2 \right\}. \right.$$

$$б)\ \Pi F\ (K_1, -1)\, z_0 + \Pi F(K_1, 0)\, A_{-1}(0)\, z_{-1} \in M_2 + W\ (K_1)$$

Тогда из начальнного состояния (z_{-1}, z_0) *можно закончить игру (2.1), (4.2) за* K_1 *шагов.*

6. В этом пункте выводим явную форму фундаментальной матрицы $F\,(k,i)$ в случае, когда матрицы $A_0(k)$ и $A_{-1}(k)$ являются постоянными. т.е. $A_0(k) \equiv A_0$; $A_{-1}(k) \equiv A_{-1}$, $k = 0, 1, ...$

И так, рассмотрим следующую стационарую игру:

$$z(k+1) = A_0(k)\,Z(k) + A_{-1} z(k-1) - B(k)\,u(k) + C(k)\,v(k), \qquad (6.1.)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА. *Решение системы (6.1) вычисляется по формуле:*

$$z(k+1) = A_0^{(k)} z_0 + A_{-1}^{(k)} Z_{-1} - \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{(k-1-i)} B(i)\,u(i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{(k-1-i)} C(i)\,v(i), \qquad (6.2)$$

где $A_0^{(k)}$ *и* $A_{-1}^{(k)}$ *вычисляются по формулам* :

$A_0^{(0)} = E$ — *единичная матрица,*

$A_0^{(1)} = A_0$; $\qquad A_{-1}^{(1)} = A_{-1}$

$$A_0^{(k)} = A_0^k + \frac{1+(-1)^k}{2} A_{-1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \left(\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-i}) \in \Omega(k-2i,\, i)} A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_{k-i}} \right) \tag{6.3}$$

$$A_{-1}^{(k)} = A_0^{k-1} A_{-1} + \frac{1+(-1)^k}{2} A_{-1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{2}-1\right]} \left(\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-i}) \in \Omega(k-2i,\, i)} A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_{k-i}} \; A_1 \right), \tag{6.4}$$

где $k = 2, 3, \ldots$; $[x]$ — *целая часть числа* x, *а* $\Omega(p, q)$ — *множество всех перестановок из* p *чисел* 0 *и* q *чисел* -1.

Доказательство. При $k = 0$ формула (6.2) очевидна. Предположим, что она верна для всех $k \leqslant K$. Докажем, что она верна тогда и для $K + 1$.

Действительно, имеем по индукции:

$$z(K+1) = A_0 z(K) + A_{-1}(K)\, z(K-1) - B(K)\, u(K) + C(K)\, v(K) =$$

$$= A_0 \left(A_0^{(K)} z_0 + A_{-1}^{(K)} z_{-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{K-1} A_0^{(K-1-i)} B(i)\, u(i) + \sum_{i=0}^{K-1} A_0^{(K-1-i)} C(i)\, v(i) \right) +$$

$$+ A_{-1} \left[A_0^{(K-1)} z_0 + A_{-1}^{(K-1)} z_{-1} - \right.$$

$$\left. \sum_{i=0}^{K-2} A_0^{(K-2-i)} B(i)\, u(i) + \sum_{i=0}^{K-2} A_0^{(K-2-i)} C(i)\, v(i) \right] -$$

$$- B(K)\, u(K) + C(K)\, v(K) = \left[A_0 A_0^{(K)} + A_{-1} A_0^{(K-1)} \right] z_0 +$$

$$+ \left[A_0 \overset{(K)}{A_{-1}} + A_{-1} \overset{(K)}{A_{-1}} \right] z_{-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{K-2} \left[A_0 \overset{(K-2-i)}{A_0} + A_{-1} \overset{(K-1-i)}{A_0} \right] B(i)\, u(i) -$$

$$- A_0 \overset{(0)}{A_0} \; B(K-1)\, u(K-1) - B(K)\, u(K) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{K-2} \left[A_0 \overset{(K-1-i)}{A_0} + A_{-1} \overset{(K-2-i)}{A_0} \right] C(i)\, v(i) +$$

$$+ A_0 \overset{(0)}{A_0} \; C(K-1)\, v(K-1) + C(K)\, v(K) \tag{6.5}$$

Имеем по формулом (6.3),

$$A_0 A_0^{(K)} + A_{-1} A_0^{(K-1)} = A_0 \left\{ A_0^K + \frac{1+(-1)^K}{2} A_{-1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} \left(\sum_{(\alpha_1, .., \alpha_{K-i}) \in \Omega(K-2i, i)} A\alpha_1 A\alpha_2 \ldots A\alpha_{K-i} \right) \right\} +$$

$$+ A_{-1} \left\{ A_0^{K-1} + \frac{1+(-1)^{K-1}}{2} A_{-1}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\left[\frac{K-2}{2}\right]} \left(\sum_{(\alpha_1, .., \alpha_{K-1-i}) \in \Omega(K-1-2i, i)} A\alpha_1 A\alpha_2 \ldots A\alpha_{K-1-i} \right) \right\} =$$

$$= A_0^{K+1} + \frac{1+(-1)^{K+1}}{2} A_{-1}^{\left[\frac{K+1}{2}\right]} + \frac{1+(-1)^K}{2} A_0 A_{-1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} + A_{-1} A_0^{K-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} \left(\sum_{(\alpha_1, .., \alpha_{K-i}) \in \Omega(K-2i, i)} A_0 A\alpha_1 \ldots A\alpha_{K-i} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]-1} \sum_{(\alpha_1, .., \alpha_{K-1-i}) \in \Omega(K-1-2i, i)} A_{-1} A\alpha_1 \ldots A\alpha_{K-1-i} =$$

$$= A_0^{K+1} + \frac{1+(-1)^{K+1}}{2} A_{-1}^{\left[\frac{K+1}{2}\right]} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{K-i}) \in \Omega(K-2i,\, i)} A_0 A\alpha_1 \ldots A\alpha_{K-i} + A_{-1}A_0^{K-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]-1} \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{K-1-i}) \in \Omega(K-1-2i,\, i)} A_{-1}A\alpha_1 \ldots A\alpha_{K-1-i}. \tag{6.6}$$

С другой стороны, также по формуле (6.3), имеем

$$A_0^{(K+1)} = A_0^{K+1} + \frac{1+(-1)^{K+1}}{2} A_{-1}^{\left[\frac{K+1}{2}\right]} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} \sum_{(\alpha_1,\ldots\alpha_{K+1-i}) \in \Omega(K+1-2_i,\, i)} A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_{K+1-i}} =$$

$$= A_0^{K+1} + \frac{1+(-1)^{K+1}}{2} A_{-1}^{\left[\frac{K+1}{2}\right]} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\left[\frac{K}{2}\right]} \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_{K-i}) \in \Omega(K-2_i,\, i)} A_0 A_{\beta_1} \ldots A_{\beta_{K-i}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_{K-i}) \in \Omega(K+1-2_i,\, i-1)} A_{-1}A_{\beta_1} \ldots A_{\beta_{K-i}} = A_0^{K+1} +$$

$$+ \frac{1+(-1)^{K+1}}{2} A_{-1}^{\left[\frac{K+1}{2}\right]} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_{K-i}) \in \Omega(K-2_i,\, i)} A_0 A_{\beta_1} \ldots A_{\beta_{K-i}} +$$

$$+ A_{-1}A_0^{K-1} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]-1} \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_{K-1-i}) \ni \Omega(K-1-2_j,\, j)} A_{-1}A_{\beta_1} \ldots A_{\beta_{K-1-j}}. \tag{6.7}$$

Сравнивая (6.6) и (6.7) получим

$$A_o A_o^{(k)} + A_{-1} A_o^{(k-1)} = A_o^{(k+1)} \tag{6.8}$$

Аналогично доказывается, что

$$A_o A_{-1}(k) + A_{-1} A_{-1}^{(k-1)} = A_{-1}^{(k+1)} \tag{6.9}$$

и

$$A_o A_o^{(k-1-i)} + A_{-1} A_o^{(k-1-i)} = A_o^{(k-i)} \tag{6.10}$$

Заменяя (6.8), (6.9), (6.10), в (6.5) мы приходим к формуле (6.2) для $k+1$. Лемма доказанна.

Замечание. Если запаздывание отсутствует, т.е. $A_1(k) \equiv \tilde{O}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ то из формулы (6.3) (6.4) видно что

$$F(k, i) = A_o^{(k-1-i)} = A_o^{k-1-i}\ ;\ k \geqslant i,\ i = -1, 0, 1, \ldots.$$

В этом случае мы имеем обычную формулу

$$Z(k) = A_o^k\ Z_o - \sum_{i=o}^{k-1} A_o^{k-1-i} B(i)\, u(i) + \sum_{i=o}^{k-1} A^{k-1-i} C(i)\, v(i),$$

для системы

$$z(k+1) = A_o\ z(k) - B(k)\, u(k) + C(k)\, v(k)\ ;\ z(0) = z_o\ .$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] А.А. Чикрий, *О линейных дискретных играх качества,* «Кибернетика». № 5, 1971, стр, 90 – 99.

[2] А.А. Чикрий, *Об одном классе линейных дискретных игр качества,* «Кибернетика», № 6, 1971, стр, 103 – 106.

[3] Н.Ю. Сатимов, *О двух методах преследования в линейных дискретных играх* «ДАН УЗССР» № II, 1979, стр. 3 – 4.

[4] Фан Зуй Хай, *О некоторых дискретных играх с фиксированным временем,* «ДАН АзССР», № II, 1981, стр. 7 – II.

[5] А.Я. Азимов, Фан Зуй Хай, *О линейных дискретных играх с ресурсными ограничениями на управления,* «ДАН АзССР», № 3, 1981, стр. 10–14.

[6] Фан Зуй, Хай, Фам Хонг Куанг. *Об одном способе преследования в линейных дискретных играх,* «ДАН АЗССР», № II, 1982, стр. 7–10.

[7] Фан Зуй Хай, *Задачи преследования в линейных дискретных играх с общими тинами, информации,* Acta Mathematica Vietnamica, Vol. 9, № 2, 1984, pp. 69–103.

[8] P.H. Khai, *On the effective method in linear discrete games with difference types of constraints on controls*, Acta Mathematica Vietnamica. Vol. 10, № 2, 1985.

[9] М.С. Никольский, *Линейные дифференциальные игры при наличии запаздываний*, «ДАН СССР», т. 197, № 5, 1971, стр. 1018–1021.

[10] Р.Ф. Габасов, Ф.М. Кириллова, *Оптимизация линейных систем, Минск. Изд. БГУ, 1973*

[11] Л.С. Понтрягин, *О линейных дифференциальны играх*. I, «ДАН СССР», т. 174, № 6, стр. 1278–1280.

Поступила в редакцию
26 апреля 1984 Г.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, P.O. BOX 631 BOHO, 10.000 HANOI VIETNAM.