ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Vol.9 №2 (1984)

ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИГРАХ С ОБЩИМИ ТИПАМИ ИНФОРМАЦИИ

ФАН ЗУЙ ХАЙ

Дискретные игры имеют весьма важное значение, как теоретическое так и практическое. Подобно многим проблемам математического анализа, дифференциальные игры допускают дискретные модели. Непрерывные процессы заменяются последовательностями отдельных шагов. Такая замена даёт возможность применять методы приближенного вычисления. Дискретные игры могут мотивировать и пояснять многие идей непрерывных дифференциальных игр. Следует заметить, что дискретные игры интересны не только тем, что непрерывную дифференциальную игру можно заменить некоторой приближенной квантизованной моделью. Дискретные игры могут непосредственно служить хорошей моделью во многих задачах экономики, военного дела и т.д.

Дискретные игры преследования рассматривались в работах [2-11]. Здесь же приведены различные достаточные условия возможности окончания преследования за конечное число шагов.

В настоящей работе приводится новый метод преследования в линейных дискретных играх с общими типами информации, найдутся эффективные достаточные условия поимки из данного состояния фазового пространства. Статья примыкает к исследованиям [4-11].

§ 1. ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИГРАХ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

1. Пусть движение вектора z в n — мерном евклидовом пространстве R^n описывается системой разностных уравнений

(1) $Z(k+1) = Az(k) - B(k)u(k) + C(k)v(k);\ Z(0) = Z_0,$

где $k = 0,1,\dots$ — номер шага, A, $B(k)$, $C(k)$ — соответственно матрицы с размерами $n \times n$; $n \times p$; $n \times q$; $u(k) \in R^p$, $v(k) \in R^q$ соответственно управления преследователя и убегающего объекта на k — ом шаге. Управления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям:

$$u(k) \in P_k\ ;\ v(k) \in Q_k, \tag{2}$$

где P_k, Q_k, $k = 0,1,\dots$ — данные множества соответственно в R^p и R^q. Известно, что (2) называются геометрическими ограничениями (см.[2], [4], [7])

В R^n задано некоторое терминальное множество $M = M_1 + M_2$, где M_1 — подпространство пространства R^n, а $M_2 \subset L$, причем L—ортогональное дополнение к M_1 в R^n. Через π обозначим оператор ортогонального проектирования из R^n на L. Пусть $\dim L = r$. Тогда в некотором базисе L оператору π соответствует некоторая матрица размера $n \times r$, которая обозначается через Π.

Пусть $N(s)$, $s = 0, 1, 2,\dots$ — некоторые множества такие, что

$$N(s) \subset \{0, 1,\dots, s\},\ s = 0, 1,\dots .$$

Будем говорить, что игра (1) — (2) из начального состояния $Z_0 \notin M$ заканчивается за k_1 шагов если при любом управлении $v(i) \in Q_i$, $i = 0,1,\dots,k_1 - 1$, можно построить управление $u(i) \in P_i$, $i = 0,1,\dots,k_1 - 1$ такие, что

$$Z(k_1) = A^{k_1} z_0 - \sum_{i=0}^{k_1-1} A^{k_1-1-i} B(i)u(i) + \sum_{i=0}^{k_1-1} A^{k_1-1-i} C(i)v(i) \in M.$$

При этом для нахождения значения $u(k)$, $k = 0,1,\dots, k_1 - 1$, разрешается использовать значения Z_0 и $v(s)$ при всех s таких, что $s \in N(k)$. Если $N(k) = \phi$, то это означает, что на k — ом шаге преследователь ничего не знает об управлении убегающего объекта. Следует заметить, что предположение, используемое нами об информации, является достаточно общим. Такой вид информации включает в себе полную и неполную информацию как частный случай, а также информацию с запаздыванием.

Введем в рассмотрение множества

$\Delta_1(K) = \{0 \leqslant k \leqslant K - 1 : N(k) \neq \phi\}$; $\Delta_2(K) = \{0,1,\dots, K_1 - 1\} \setminus \Delta_1(K)$;

$\Delta_3(K) = \bigcup_{k \in \Delta_1(K)} N(k)$; $\Delta_4(K) = \{0,1,\dots, K_1 - 1\} \setminus \Delta_3(K)$;

$$H(K) = \sum_{k\in\Delta_4(K)} \Pi A^{K-1-k}\, C(k)\, Q_k\ ; \qquad G(K) = \sum_{k\in\Delta_2(K)} \Pi A^{K-1-k}\, B(k)\, P_k\ .$$

Пусть $\Delta_1(K) \neq \phi$, тогда расположим элементы множеств $\Delta_1(K)$, $\Delta_3(K)$ по возрастанию следующим образом:

$$\Delta_1(K) = \left\{S_1, S_2, \ldots, S_{|\Delta_1(K)|}\right\};\ \Delta_3(K) = \left\{\tau_1 \tau_1, \ldots, \tau_{|\Delta_3(K)|}\right\},$$

где $\quad S_1 < S_2 < \ldots < S_{|\Delta_1(K)|};\quad \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{|\Delta_3(K)|}$,

причем $|\Delta_i(K)|$ – число элементов множеств $\Delta_i(K)$, $i = 1,3$. Введем операцию геометрического вычитания множеств (см. [I])

$$B \overset{*}{-} C = \{ z : z + C \subset B \}.$$

ТЕОРЕМА I. *Пусть K_1 — целое положительное число такое, что*

а) $\Delta_1(K_1) \neq \phi;\quad M_2 \overset{*}{-} H(K_1) \neq \phi$,

б) Существует матрица размера $|\Delta_3(K_1)| \times |\Delta_1(K_1)|$

$$\varphi(K_1) \left|\begin{matrix} \gamma_{K_1}(s_2, \tau_1)\ \gamma_{K_1}(s_2, \tau_2)\ \ldots\ldots\ \gamma_{K_1}(s_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_1) \\ \gamma_{K_1}(s_1, \tau_2)\ \gamma_{K_1}(s_2, \tau_2)\ \ldots\ldots\ \gamma_{K_1}(s_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{K_1}(s_1, \tau_{|\Delta_3(K_1)|})\ \gamma_{K_1}(s_2, \tau_{|\Delta_3(K_1)|}\ \ldots\ldots\ \gamma_{K_1}(s_{|\Delta_1(K_1)|})\tau_{|\Delta_3(K_1)|} \end{matrix}\right|$$

обладающая свойствами:

1. $\gamma_{K_1}(s_i, \tau_j) = 0$ *если* $\tau_j \notin N(s_i)$, $i = 1, \ldots, |\Delta_1(K_1)|;\ j = 1, \ldots, |\Delta_3(K_1)|$,

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(s_i, \tau_j) = 1$ *при всех* $j = 1, \ldots, |\Delta_3(K_1)|$

3. $$W_1(s_i) = \Pi A^{K_1 - 1 - s_i} B(s_i)\, P_{s_i} \overset{*}{-} \left(\sum_{\tau_j \in N(s_i)} \gamma_{K_1}(s_i, \tau_j) \Pi A^{K_1 - 1 - \tau_j}\ C(\tau_j)\ Q_{\tau_j} \right) \neq \phi$$

при всех $i = 1, \ldots, |\Delta_1(K_1)|$,

b) $$\Pi A^{K_1} z_0 \in (M_2 \overset{*}{-} H(K_1)) + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} W_1(S_i) + G(K_1). \tag{3}$$

Тогда преследование в линейной дискретной игре (1)—(2) из начального состояния z_0 заканчивается за K_1 шагов.

Доказательство. Из (3) следует что существуют, векторы

$g \in G(K_1)$, $m \in M_2 \overset{*}{-} H(K_1)$, $\omega_i \in W_1(S_i)$, $i = 1,\ldots,|\Delta_1(K_1)|$,

такие, что

$$(4) \quad \Pi A^{K_1} z_o = m + g + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \omega_i$$

Пусть $\bar{v}(i) \in Q_i$, $i = 0,1,\ldots,K_1 - 1$ — любое допустимое управление убегающего объекта. Из $g \in G(K_1)$, $m \in M_2 \overset{*}{-} H(k_1)$, и (4) следует, что существуют векторы $u^*(k) \in p_k$, $k \in \Delta_2(K_1)$, $m_2 \in M_2$ такие что

$$\Pi A^{K_1} z_o = m_2 - \sum_{k\in\Delta_4(K_1)} \Pi A^{K_1 - 1 - k} C(k)\bar{v}(k) + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \omega_i +$$

$$(5) \qquad + \sum_{k\in\Delta_2(K_1)} \Pi A^{K_1 - 1 - k} B(k)\, u^*(k).$$

В силу того, что $\omega_i \in W_1(S_i)$, $i = 1,\ldots,|\Delta_1(K_1)|$, можно найти векторы $u(S_i) \in P_{s_1}$, $i = 1,\ldots,|\Delta_1(K_1)|$ такие, что

$$\omega_i = \Pi A^{K_1 - 1 - s_i} B(s_i)\tilde{u}(s_i) - \sum_{\tau_j \in N(s_i)} \gamma_{K_1}(s_i \tau_j)\, \Pi A^{K_1 - 1 - \tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j).$$

Отсюда имеем

$$\Pi A^{K_1} z_o = m_2 - \sum_{k\in\Delta_4(K_1)} \Pi A^{K_1 - 1 - k} C(k)\bar{v}(k) + \sum_{k\in\Delta_2(K_1)} \Pi A^{K_1 - 1 - k} B(k)\, u^*(k) +$$

$$(6) \qquad + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \Pi A^{K_1 - 1 - s_i} B(s_1)\tilde{u}(s_i) -$$

$$\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left(\sum_{\tau_j \in N(S_i)} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)\quad \Pi A^{K_1 - 1 - \tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) \right).$$

Управление $\bar{u}(i) \in P_i$, $i = 0,1,\ldots,K_1 - 1$ преследователя определяется следующим образом:

$$\bar{u}(i) = \begin{cases} u^*(i), & i \in \Delta_2(K_1) \\ \tilde{u}(S_k), & i = S_k, \ k = 1,\ldots,|\Delta_1(K_1)|. \end{cases}$$

По формуле решения уравнения (1), имеем

$$\Pi_z(K_1) = \Pi A^{K_1} z_0 - \sum_{i=0}^{K_1-1} \Pi A^{K_1-1-i} B(i)\bar{u}(i) + \sum_{i=0}^{K_1-1} \Pi A^{K_1-1-i} C(i)\bar{v}(i) =$$

$$= \Pi A^{K_1} z_0 - \sum_{k\in\Delta_2(K_1)} \Pi A^{K_1-1-k} B(k)u^*(k) - \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \Pi A^{K_1-1-S_i} B(s_i)\bar{u}(s_i) +$$

$$+ \sum_{k\in\Delta_4(K_1)} \Pi A^{K_1-1-k} C(k)\bar{v}(k) + \sum_{j=1}^{|\Delta_3(k_1)|} \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) .$$

Из (6) следует, что

(7) $$\Pi z(K_1) = m_2 + \sum_{j-1}^{|\Delta_3(K_1)|} \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) -$$

$$- \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left(\sum_{\tau_j\in N(S_i)} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)\, \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) \right)$$

Из свойств матрицы $\varphi(K_1)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left(\sum_{\tau_j\in N(S_i)} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)\, \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left| \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)\Pi A^{K_1-1-\tau_j)} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \left(\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) \right) \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) =$$

(8) $$= \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j).$$

Теперь из (7) и (8) имеем $\Pi z(K_1) = m_2$. А это значит, что $z(K_1) \in M$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* K_1 *— такое целое положительное число, что*

а) $\Delta_1(K_1) \neq \phi$

б) $M_{2\pm} H(K_1)$ *— непустое множество (где* M_2 *— выпуклое множество).*

в) Существует матрица $\Phi(K_1)$ *размера* $(1 + |\Delta_3(K_1)|) \times |\Delta_1(K_1)|$

$$\Phi(K_1) = \begin{vmatrix} \gamma_{K_1}(s_1, \tau_1) & \gamma_{K_1}(s_2, \tau_1) & \dots & \gamma_{K_1}(s_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_1) \\ \gamma_{K_1}(s_1, \tau_2) & \gamma_{K_1}(s_2, \tau_2) & \dots & \gamma_{K_1}(s_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{K_1}(s_1, \tau_{|\Delta_3(K_1)|}) & \gamma_{K_1}(s_2, \tau_{|\Delta_3(K_1)|}) & \dots & \gamma_{K_1}(s_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_{|\Delta_3(K_1)|}) \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{|\Delta_1(K_1)|} \end{vmatrix},$$

обладающая свойствами :

1. $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1 ,\dots, |\Delta_1(K_1)|$,

2. $\sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \alpha_i = 1$,

3. $\gamma_{K_1}(s_i, \tau_j) = 0$ *если* $\tau_j \notin N(s_1)$, $i = 1 ,\dots, |\Delta_1(K_1)|$; $j = 1 ,\dots, |\Delta_3(K_1)|$,

4. $\sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(s_i, \tau_j) = 1$ *при всех* $j = 1,\dots, |\Delta_3(K_1)|$,

5. $W_2(s_i) = \left\{ \alpha_i (M_2 \overset{*}{-} H(K_1)) + \Pi A^{K_1 - 1 - s_i} B(s_i) P_{s_i} \right\} \overset{*}{-}$

$$\overset{*}{-} \left(\sum_{\tau_j \in N(s_i)}{}' \gamma_{K_1}(s_i, \tau_j) \Pi A^{K_1 - 1 - \tau_j} C(\tau_j) Q_{\tau_j} \right) \neq \phi ,$$

при всех $i = 1,\dots, |\Delta_1(K_1)|$

г) $\Pi A^{K_1} z_0 \in G(K_1) + \sum\limits_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} W_2(s_i)$.

Тогда преследование в линейной дискретной игре (1) — (2) из начального состояния $z_0 \notin M$ заканчивается за K_1 шагов.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Заметим, что в теоремах 1, 2 требуется $\Delta_1(K_1) \neq \phi$. В случае $\Delta_1(K_1) = \varnothing$ имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* K_1 *— такое целое положительное число, что,*

а) $M_2 \overset{*}{-} H(K_1) \neq \varnothing$,

б) $\Pi A^{K_1} z_0 \in G(K_1) + (M_2 \overset{*}{-} H(K_1))$.

Тогда догоняющий может завершить преследования в игре (I) —(2) *из начального состояния* $z_0 \notin M$ *за* K_1 *шагов, незная совсем управления убегающего объекта.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

2. Как видно из предыдущих пунктов, наше предположение об информации является достаточно общим. В этом пункте рассматриваются частные случаи, когда информация является полной или неполной. Изгалаются частные формы теорем 1—2, которые полезны для исследования конкретных дискретных игр с геометрическими ограничениями.

Сначала рассматривается случай, когда информация является полной, т. е. преследователь на каждом k — ом шаге знает начальное положение z_0, и управление $v(k)$ убегающего объекта. Это заначит, что $N(k) = \{k\}$ при всех $k = 0, 1, \dots,$ поэтому $\Delta_1(K) = \Delta_3(K) = \{0, 1, \dots, K-1\}$, $\Delta_2(K) = \Delta_4(K) = \varnothing$. Отсюда верны следующие

СЛЕДСТВИЕ 1. (см [4], теорема 1). *Пусть K_1 — такое целое положительное число, что*

а) $\Pi A^{K_1-1-i} B(i) P_i \overset{*}{-} \Pi A^{K_1-1-i} C(i) Q_i \neq \varnothing$, $i = 0, 1, \dots, K_1 - 1$,

б) $\Pi A^{K_1} z_0 \in \sum_{i=0}^{K_1-1} \left(\Pi A^{K_1-1-i} B(i) P_i \overset{*}{-} \Pi A^{K_1-1-i} C(i) Q_i \right) + M_2.$

Тогда из начального состояния z_0 можно звершить преследования за K_1 шагов.

СЛЕДСТВИЕ 2. (см [4], теорема 3). *Пусть K_1 — такое целое положительное число, что существуют числа $\alpha_0, \dots, \alpha_{K_1-1}$ обладающие свойствами:*

а) $\alpha_i \geqslant 0$, $\quad i = 0, \dots, K_1 - 1$

б) $\sum_{i=0}^{K_1-1} \alpha_i = 1,$

в) $\left[\alpha_i M_2 + \Pi A^{K_1-1-i} B(i) P_i \right] \overset{*}{-} \Pi A^{K_1-1-i} C(i) Q_i \neq \varnothing$,

при всех $i = 0, \dots, K_1 - 1$, где M_2 — выпуклое множество.

г) $\Pi A^{K_1} z_0 \in \sum_{i=0}^{K_1-1} \left\{ \left(\alpha_i M_2 + \Pi A^{K_1-1-i} B(i) P_i \right) \overset{*}{-} \Pi A^{K_1-1-i} C(i) Q_i \right\}$

Тогда игра (1) — (2) из начального состояния $z_0 \notin M$ заканчивается за K_1 шагов.

Теперь пусть $h > 0$ — данное целое число. Пусть функция $\tau(s)$ определяется при $s = h, h+1, \dots,$ и обладает следующим свойствами;

а) $\tau(s)$ принимает только целое значение

б) $\tau(h) \geqslant 0$,

в) $\tau(s) \leqslant s$ при всех $s = h, h+1, \dots,$

г) $\tau(s_1) > \tau(s_2)$ если $s_1 > s_2$.

Предполагается, что преследователь знает z_0 и для каждого $s > h$ он знает управления $v(l)$ убегающего при всех l таких, что $\tau(s-1)+1 \leqslant l \leqslant \tau(s)$. Момен h п функция $\tau(s)$ известны догоняющему. Таким образом до шага $h-1$ догоняющий ничего не знает об управлении убегающего, а начиная с шага h он знает это управление с запаздыванием $s-\tau(s)$, $S = h, h+1,\ldots$. А это значит, что в этом случае при $K > h$ имеем

$$\Delta_1(K) = \{h, h+1, \ldots, K-1\}\ ;\ \Delta_2(K) = \{0, \ldots, h-1\}\ ;$$

$$\Delta_3(K) = \{\tau(h), \tau(h)+1, \ldots, \tau(K-1)\}\ ;$$

$$\Delta_4(K) = \{0, \ldots, \tau(h)-1, \ldots, \tau(K-1)+1, \ldots, K-1\}.$$

Заметим, что если $\tau(h) = 0$, то $\{0, \ldots, \tau(h-1)\}$ понимается как множество с единствым числом $\{0\}$, и если $\tau(K-1) = K-1$, то $\{\tau(K-1)+1, \ldots, K-1\}$ понимается как $\{K-1\}$.

Для удобоства будем считать, что $\sum\limits_{i=j}^{k} \ldots = 0$, если $j > k$.

Введем в рассмотрение следующие множества при $K > h$:

$$H(K, h) = \sum_{i=0}^{\tau(h)-1} \Pi A^{K-1-i} C(i)Q_i + \sum_{i=\tau(K-1)+1}^{K-1} \Pi A^{K-1-i} C(i)Q_i\ ,$$

$$G(K, h) = \sum_{i=0}^{h-1} \Pi A^{K-1-i} B(i)P_i,$$

$$\omega(K, s) = \begin{cases} \Pi A^{K-1-h} B(h)P_h \stackrel{*}{-} \Pi A^{K-1-\tau(h)} C(\tau)(h)Q_{\tau(h)}, & \text{если } s = h, \\ \Pi A^{K-1-s} B(s)P_s \stackrel{*}{-} \sum\limits_{j=\tau(s-1)+1}^{\tau(s)} \Pi A^{K-1-j} C(j)Q_j, & \text{если } h < s \leqslant K-1 \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. (см [11], теорема 3.1). *Пусть* $K_1 > h$ *такое целое что* $M_2 \stackrel{*}{-} H(K_1, h) \neq \varnothing$, $\omega(K_1, s) \neq \varnothing$ *при всех* $s = h, \ldots, K_1 - 1$, *и*

$$\Pi A^{K_1} z_0 \in G(K_1, h) + (M_2 \stackrel{*}{-} H(K_1, h)) + \sum_{s=h}^{K_1-1} \omega(K_1, s).$$

Тогда преследование в линейной дискретной игре (1) – (2) *из начального состояния* $z_0 \notin M$ *заканчивается за* K_1 *шагов.*

3. В этом пункте рассматриваются некоторые конкретные задачи преследования линейных дискретных игр с геометрическими ограничениями.

Пусть движения векторов $z_i \in R^n$, $i = 1, 2, 3, 4$ описываются системой разностных уравнений

$$
(9)\qquad
\begin{cases}
z_1(k+1) = z_1(k) + \mu z_2(k) \\
z_2(k+1) = (E - \mu\overline{B})\, z_2(k) + \mu\rho u(k) \\
z_3(k+1) = z_3(k) + \mu z_4(k) \\
z_4(k+1) = (E - \mu\overline{C})\, z_4(k) + \mu б v(k),
\end{cases}
$$

где $k = 0,\ 1, \ldots$ — номер шага, $\mu > 0$ — малый параметр, $\rho > 0$, $б > 0$ — некоторые числа. Управления $u(k)$, $v(k)$ соответственно удовлетворяют ограничениям:

$$
(10)\qquad \| u(k) \| \leqslant 1 \ ; \quad \| v(k) \| \leqslant 1 \ .
$$

Будем считать, что E – единичная матрица порядка n и матрицы $\overline{B}, \overline{C}$ имеют простую структуру (см. [12]), т. е. они могут быть приведены к диагональному виду одной и той же невырожденной матрицей T. Из теории матриц [12] известно, что две матрицы имеют простую структуру тогда и только тогда, когда они перестановочны. Заметим, что (9) — (10) понимаются как дискретный аналог задачи

$$
(11)\qquad
\begin{cases}
\ddot{x} + \overline{B}\,\dot{x} = \rho\, u \\
\ddot{y} + \overline{C}\,\dot{y} = б\ v \\
\| u(.) \| \leqslant 1\ ,\ \| v(.) \| \leqslant 1\ ,
\end{cases}
$$

В частном случае, когда $\overline{B} = \overline{C} = E$, (11) называется « контрольным примером » Л.С.Понтрягина (см. [1]).

Сделаем следующие преобразования

$$
z_i(k) = T\overline{z}_i(k)\ ;\ u(k) = T\ \overline{u}(k)\ ;\ v(k) = T\,\overline{v}(k)\ .
$$

Тогда (9) — (10) можно написать в виде

$$
\begin{cases}
\overline{z}_1(k+1) = \overline{z}_1(k) + \mu\,\overline{z}_2(k) \\
\overline{z}_2(k+1) = \left| E - \mu \begin{vmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{vmatrix} \right| \overline{z}_2(k) + \mu\,\rho\,\overline{u}(k) \\
\overline{z}_3(k+1) = \overline{z}_3(k) + \mu\,\overline{z}_4(k) \\
\overline{z}_4(k+1) = \left| E - \mu \begin{vmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{vmatrix} \right| \overline{z}_4(k) + \mu\, б\, \overline{v}(k) \\
\| \overline{u}(k) \| \leqslant 1 \ ;\ \| \overline{v}(k) \| \leqslant 1 \ .
\end{cases}
$$

Чтобы не вводить новых обозначений будем считать, что в (9) уже произведены преобразования, т.е.

$$\bar{B} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \alpha_n \end{vmatrix}; \quad \bar{C} = \begin{vmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \beta_n \end{vmatrix}$$

и более того предположим, что $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1,\ldots, n$.

Положим $z = (z_1 , z_2 , z_3 , z_4)\, T \in R^{4n}$, тогда (9) — (10) имеет вид

(II)
$$z(k+1) = A\,z(k) - u(k) + v(k)$$
$$u(k) \in P; \qquad v(k) \in Q,$$

где

$$A = \begin{vmatrix} E & \mu E & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \begin{matrix} 1-\mu\alpha_1 & & & \\ & 1-\mu\alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1-\mu\alpha_n \end{matrix} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & E & \mu E \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \begin{matrix} 1-\mu\beta_1 & & & \\ & 1-\mu\beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1-\mu\beta_n \end{matrix} \end{vmatrix}.$$

$$P \left\{(0, -\mu\rho u , 0, 0)^T : u \in T^{-1} S(1)\right\}; \quad Q = \left\{ (0, 0, 0, \mu\, б\, v)^T : v \in T^{-1} S(1) \right\},$$

причем E, $\tilde{0}$ — соответственно единичная и нулевая матрица порядка n, T — знак транспонирования и $S(1)$ — единичный шар в R^n

где

$$a_{jk} = \mu \left(1 + (1 - \mu\alpha_j) + \ldots + (1 - \mu\alpha_j)^{k-1} \right), \; j = 1,\ldots n;$$

$$b_{jk} = \mu \left(1 + (1 - \mu\beta_j) + \ldots + (1 - \mu\beta_j)^{k-1} \right), \; j = 1,\ldots, n.$$

Отсюда следует, что

$$\Pi A^0 P = \{0\}\ ;\ \Pi A^k P = \left\{ \mu\rho \begin{vmatrix} a_{1k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nk} \end{vmatrix} u : u \in T^{-1} S(1) \right\},\ k = 1,2,\ldots$$

$$\Pi A^0 Q = \{0\}\ ;\ \Pi A^k Q = \left\{ \mu б \begin{vmatrix} b_{1k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nk} \end{vmatrix} v : v \in T^{-1} S(1) \right\};\ k = 1,2,\ldots$$

Очевидно, что $T^{-1}S(1)$ — эллипсоид в R^n. Через γ_2, γ_1 обозначим максимум и минимум длин полуосей эллипсоида $T^{-1}S(1)$. Через $S(\gamma_i)$ обозначим шар с центром в нуле в R^n и радиусом равным γ_i, $i = 1,2$. Легко видеть, что.

$$\mu\rho \begin{vmatrix} a_{1k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nk} \end{vmatrix} S(\gamma_1);\ \mu б \begin{vmatrix} b_{1k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nk} \end{vmatrix} S(\gamma_2)$$

является эллипсоидами соответственно с размерами

$$\mu\rho\ \gamma_1\ a_{ik} \text{ и } \mu б \gamma_2\ b_{ik},\ i = 1,2,\ldots,n$$

Будем говорить, что в игре (11) (или, то же самое, в игре (9) — (10)) возможна поимка за k_1 шагов если впервые выполнено равенство $z_1(k_1) = z_3(k_1)$. Таким образом в этом случае терминальное множество M имеет вид

$$M = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4)^T : z_1 = z_3 \right\}.$$

Ясно, что M является подпространством пространства R^{4n}. Пусть L — ортогональное дополнение к M в R^{4n}, тогда

$$L = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4)^T : z_1 = -z_3\ ;\ z_2 = z_4 = 0 \right\}$$

В соответствующем базисе в L проекция Πz имеет простой вид: $\Pi_z = z_1 - z_3$, где $\Pi = (E, \tilde{O}, -E, \tilde{O})$ есть $(n \times 4n)$ — матрица, соответствующая оператору проектирования в выбранных базисах. Легко вычислить, что

$$A^k = \left|\begin{matrix} E & \begin{matrix} a_{1k} & & 0 \\ & a_{2k} & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nk} \end{matrix} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \begin{matrix} (1-\mu\alpha_1)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1-\mu\alpha_n)^k \end{matrix} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & E & \begin{matrix} b_{1k} & & 0 \\ & b_{2k} & \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nk} \end{matrix} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \begin{matrix} (1-\mu\beta_1)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1-\mu\beta_n)^k \end{matrix} \end{matrix}\right|$$

Положим $\alpha = \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $\beta = \min(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Нетрудно доказать, что при всех $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\rho\gamma_1 a_{ik} \geqslant \rho\gamma_1 \frac{1-(1-\mu\alpha)^k}{\alpha}; \quad \sigma\gamma_2 b_{ik} \leqslant \sigma\gamma_2 \frac{1-(1-\mu\beta)^k}{\beta}.$$

Через $K_1(k)$, $K_2(k)$ соответственно обозначим шары в R^n с центрами в нуле и радиусами равными

$$\mu\rho\gamma_1 \frac{1-(1-\mu\alpha)^k}{\alpha}, \qquad \mu\sigma\gamma_2 \frac{1-(1-\mu\beta)^k}{k}.$$

Очевидно, что

$$K_1(k) \subset \Pi A^k P; \quad K_2(k) \supset \Pi A^k Q, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Положим $\varepsilon = \max\left(1, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, тогда при всех $k = 1, 2, \ldots$, и $\sigma\gamma_1\varepsilon < \rho\gamma_2$ имеет место следующее

$$\rho\gamma_1 \frac{1-(1-\mu\alpha)^k}{\alpha} > \sigma\gamma_2 \frac{1-(1-\mu\beta)^k}{\beta}.$$

А это значит что при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\Pi A^k P \overset{*}{-} \Pi A^k Q \neq \varnothing$$

Пусть $z(0)=(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0)^T$ — любое начальное состояние игры.

Тогда имеем

$$\Pi A^{k+1} z(0) = \begin{vmatrix} a_{1,k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,k+1} \end{vmatrix} z_2^0 - \begin{vmatrix} b_{1,k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{n,k+1} \end{vmatrix} z_4^0 + z_1^0 - z_3^0 .$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \| \Pi A^{k+1} z(0) \| = \left\| z_1^0 - z_3^0 + \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_n} \end{vmatrix} z_2^0 - \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\beta_n} \end{vmatrix} z_4^0 \right\|$$

С другой стороны имеем.

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \left| \rho\gamma_1 \frac{1-(1-\mu\alpha)^k}{\alpha} - б\gamma_2 \frac{(1-(1-\mu\beta)^k}{\beta} \right| = +\infty$$

Таким образом существует натуральное число k_0 такое, что

$$\Pi A^{k_0+1} z(0) \in \sum_{i=0}^{k_0} \left| \Pi A^i P \underline{*} \Pi A^i Q \right| .$$

Из следствия I получается следующая.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $б\gamma_2\varepsilon < \rho\gamma_1$, *где* $\varepsilon = \max\left(1, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, *тогда игра (9)—(10) может быть закончена из любой начальной точки* $z_0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0)^T$.

Пусть, теперь управляемая система имеет вид

(12) $$\begin{cases} z_1(k+1) = \alpha z_1(k) + \mu\rho u(k) \\ z_2(k+1) = \alpha z_2(k) + \mu z_3(k) \\ z_3(k+1) = \alpha z_3(k) + \mu\sigma v(k), \end{cases}$$

где $k=0,1,\ldots$ — номер шага, $\mu>0$ — малый параметр, $\rho>0$, $б>0$, $0<\alpha<1$. Yправления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям

(13) $$\| u(k) \| \leqslant 1 ; \quad \| v(k) \| \leqslant 1$$

Положим $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in R^{3n}$. Тогда (12) можно написать в виде

(14) $$z(k+1)=A\,z(k)-B\,u(k)+C\,v(k)\ ,$$
где

$$A=\begin{vmatrix}\alpha E & \tilde{0} & \tilde{0}\\ \tilde{0} & \alpha E & \mu E\\ \tilde{0} & \tilde{0} & \alpha E\end{vmatrix}\ ;\ B=\begin{vmatrix}-\mu\rho E\\ \tilde{0}\\ \tilde{0}\end{vmatrix}\ ;\ C=\begin{vmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \mu 6 E\end{vmatrix}\ ,$$

причем E, $\tilde{0}$ — соответственно единичная и нулевая матрица порядка n, T — знак транспонирования. Будем говорить, что в игре (14) , (13) (или, то же самое, в игре (12) — (13)) возможна поимка за k_1 шагов если впервые выполнено равенство $z_1(k_1)=z_2(k_1)$. Подпространство M, где заканчивается игра, имеет вид

$$M=\left\{ (z_1\ ,\ z_2\ ,\ z_3)^T\ :\ z_1=z_2 \right\},$$

ортогональное дополнение L к M в R^{3n} имеет следующий вид :

$$L=\left\{ (z_1\ ,\ z_2\ ,\ z_3)^T\ :\ z_1=-z_2\ ;\ z_3=0 \right\}.$$

В соответствующем базисе в L проекция Πz имеет простой вид : $\Pi z=z_1-z_2$, где $\Pi=(E,-E,\tilde{0})$ есть $(n\times 3n)$ — матрица, соответствующая оператору проектирования в выбранных базисах .

Нетрудно доказать что

$$\Pi A^k B P_k=\alpha^k \mu\rho S\ ;\quad \Pi A^k C Q_k=k\,\mu^2\,\alpha^{k-1}\ 6\,S\ ,$$

где S — единичный шар в R^n .

Из соотношения

$$\lim_{k\to+\alpha}\frac{\alpha^k\mu\rho}{k\mu^2 6\alpha^{k-1}}=0,$$

следует, что при k достаточно больших, $\mu\rho\alpha^k<k\mu^2 6\alpha^{k-1}$, т. е. $\Pi A^k BP_k \underline{*}\, \Pi A^k CQ_k=\phi$. Таким образом метод Сатимова Н. Ю. в [4] неприменим к игре (12) — (13).

Положим $k_1=\left[\frac{\rho\alpha}{\mu 6}\right]$, где через $[x]$ обозначим целую часть числа x . Тогда при всех $k=0,1,\ldots,k_1$

$$\frac{\mu_{\rho\alpha}k}{k\mu^2\,6\alpha^{k-1}}\geqslant 1,$$

т. е. $\Pi A^k BP_k \underline{*} \Pi A^k CQ_k \neq \phi$ при всех $k = 0,1,\ldots, k_1$. Так как $0 < \alpha < 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

Нетрудно доказать, что

ЛЕММА 1. *Пусть* $\overline{\alpha}_i \geqslant \overline{\beta}_i > 0$, $i = 0,1,\ldots,m$, $\overline{\beta}_j > \overline{\alpha}_j > 0$, $j = m+1,\ldots,n-1$. *Для того чтобы существуют* λ_{ij}, $i \leqslant j$; $i,j = 0,\ldots, n-1$ *удовлетворяющие*

1. $\lambda_{ij} \geqslant 0$,

2. $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{ij} = 1$, $i = 0,1,\ldots, n-1$,

3. $\overline{\alpha}_i - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{ij}\overline{\beta}_j \geqslant 0$, $i = 0,\ldots, n-1$,

необходимо й достаточно чтобы

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{\alpha}_i \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\beta}_i .$$

Пусть выполнено условие

$$\rho > \frac{\mu б}{1-\alpha}.$$

Тогда при достаточно больщих k_0 имеем при всех $k \geqslant k_0$:

$$\mu_\rho \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i > \mu^2 б \sum_{i=0}^{k-1} i\alpha^{i-1}.$$

Из леммы I при $\alpha_i = \mu\rho\overline{\alpha}^i$, $\overline{\beta}_i = \mu^2 б\, i\, \alpha^{i-1}$, $m = k_1$, $n = k$ $(k \geqslant k_o)$, следует, что существуют $\tilde{\alpha}_i^j$, $j \leqslant i$, $i, j = 0, \ldots, n-1$

такие, что

1. $\tilde{\alpha}_i^j \geqslant 0$,

2. $\sum_{i=j}^{n-1} \tilde{\alpha}_i^j = 1$, $j = 0,\ldots, n = 1$,

3. $\mu_{\rho\alpha} i - \sum_{j=0}^{i} \tilde{\alpha}_i^j(\mu^2 б\, i\, \alpha^{i-1}) \geqslant 0$, $i = 0, \ldots, n-1$.

что

Пусть $z_0 = \left(z_1^o, z_2^o, z_3^o\right)^T$ — любое начальное состояние игры (12)—(13). Очевидно,

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| \Pi A^k z_o \right\| = \lim_{k\to+\infty} \left\| \alpha^k z_1^o - \alpha^k z_2^o - k\,\mu^2\,\alpha^{k-1} z_3^o \right\| = 0.$$

А это значит, что предположения а/ —г/ теоремы I выполнены. Таким образом доказана следующая:

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $\rho(1-\alpha) > \mu\sigma$. *Тогда игра* (12)—(13) *заканчивается из любой точки* $\left(z_1^o, z_2^o, z_3^o\right)^T$.

Пусть теперь в игре (12)—(13) будем считать, что игра из начального состояния $z_o = \left(z_1^o, z_2^o, z_3^o\right)^T$, где $\left\| z_1^o - z_2^o \right\| > \varepsilon$, заканчивается за K_1 шагов, если впервые выполнено неравенство $\| z_i(k_1) - z_2(k_1) \| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторая фиксированная константа (ε—поимка). Из теоремы I получаем следующий незультат.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть*

$$\varepsilon + \frac{\mu\rho}{1-\alpha} - \frac{\mu^2\sigma}{(1-\alpha)^2} > 0.$$

Тогда из любой точки $z_0 = \left(z_1^o, z_2^o, z_3^o\right)^T$ *возможна* ε — *поимка.*

Заметим, что если используем метод Сатимова Н. Ю. из [4], то получаем только результат;

Пусть

$$\varepsilon + \frac{\mu\rho}{1-\alpha} - \frac{\mu^2\sigma}{(1-\alpha)^2} > \mu \sum_{i=0}^{k_1} (\alpha\rho - \mu\sigma i)\,\alpha^i \quad ; k_1 = \left[\frac{\rho\alpha}{\mu\sigma}\right].$$

То из любой точки $\left(z_1^0, z_2^0, z_3^0\right)^T$ возможна ε — поимка.

А это значит, что если

$$0 < \varepsilon + \frac{\mu\rho}{1-\alpha} - \frac{\mu^2\sigma}{(1-\alpha)^2} \leqslant \mu \sum_{i=0}^{k_1} (\alpha\rho - \mu\sigma i)\,\alpha^i,$$

то метод из (4) не применим к игре (12) — (13).

§2. ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИГРАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

I. В этом параграфе рассматривается линейная дискретная игра (I), причем управления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| u(k) \|^2 \leqslant \rho^2 ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \| v(k) \|^2 \leqslant \sigma^2. \tag{15}$$

Известно, что (15) называются интегральными ограничениями (см. [4], [5], [7]). Через M, M_1, M_2, L, π, Π, $N(S)$, $\Delta_i(K)$ обозначим как в параграфе § I.

Будем говорить, что игра (I), (15) из начального состояния $z_0 \notin M$ заканчивается за k_1 шагов, если при любом управлении, $v(i)$, $i = 0,\dots, k_1 - 1$:

$$\sum_{i=0}^{k_1-1} \| v(i) \|^2 \leqslant б^2,$$

можно построить управление $u(i)$, $i = 0,\dots, k_1 - 1$

$$\sum_{i=0}^{k_1-1} \| u(i) \|^2 \leqslant \rho^2,$$

такое, что

$$z(k_1) = A^{k_1} z_0 - \sum_{i=0}^{k_1-1} A^{k_1-1-i} B(i)\,u(i) + \sum_{i=0}^{k_1-1} A^{k_1-1-i} C(i)\,v(i) \in M.$$

При этом для нахождения значения $u(k)$, $k = 0,\dots, k_1 - 1$ разрешается использовать значения z_0 и $v(S)$ при всех S таких что $S \in N(k)$.

Как в § I если $\Delta_1(K) \neq \phi$ мы будем упорядочивать элементы множеств $\Delta_1(K)$ и $\Delta_3(K)$ по возрастанию:

$$\Delta_1(K) = \left\{ S_1, S_2, \dots, S_{|\Delta_1(K)|} \right\}; \ \Delta_3(K) = \left\{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{|\Delta_3(K)|} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 7: *Пусть $K_1 > 0$ такое целое число, что*

а) $M_2 \underline{*} H(K_1) \neq \phi$ *, где*

$$H(K_1) = \left\{ \sum_{i \in \Delta_4(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} C(i)\, v(i) : \sum_{i \in \Delta_4(K_1)} \| v(i) \|^2 \leqslant б^2 \right\},$$

б) Существует управление $u^*(i)$, $i \in \Delta_2(K_1)$ такое, что

$$\sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \| u^*(i) \|^2 \leqslant \rho^2,$$

в) Существует матрица размера

$$\Phi(K_1) = \left| \begin{matrix} \gamma_{K_1}(S_1, \tau_1)\ \gamma_{K_1}(S_2, \tau_1) \dots\dots\dots \gamma_{K_1}(S_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_1) \\ \gamma_{K_1}(S_1, \tau_2)\ \gamma_{K_1}(S_2, \tau_2) \dots\dots\dots \gamma_{K_1}(S_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{K_1}(S_1, \tau_{|\Delta_3(K_1)|})\ \gamma_{K_1}(S_2, \tau_{|\Delta_3(K_1)|}) \dots\dots \gamma_{K_1}(S_{|\Delta_1(K_1)|}, \tau_{|\Delta_3(K_1)|}) \end{matrix} \right|$$

обладающая свойствами :

1. $\gamma_{K_1}(S_i,\tau_j)=0$ *если* $\tau_j \notin N(S_i)$, $i=1,\dots,|\Delta_1(K_1)|$; $j=1,\dots,|\Delta_3(K_1)|$,

2. $$\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i,\tau_j)=1 \text{ при всех } j=1,\dots,|\Delta_3(K_1)|,$$

3. *Существуют линейные отображения* $F_{\Phi(K_1)}(S_i,\tau_j)$, $i=1,\dots,|\Delta_1(K_1)|$; $j=1,\dots,$ $|\Delta_3(K_1)|$ *из* R^q *в* R^p *такие, что*

3а. $F_{\Phi(K_1)}(S_i,\tau_j)=\theta$ *если* $\tau_j \notin N(S_i)$; $i=1,\dots,|\Delta_1(K_1)|$; $j=1,\dots,$ $|\Delta_3(K_1)|$, *где* θ *— нулевое отображение,*

3б. $\Pi A^{K_1-1-S_i} B(S_i)F_{\Phi(K_1)}(S_i,\tau_j)=\gamma_{K_1}(S_i,\tau_j)\,\Pi A^{K_1-1-\tau_j}C(\tau_j)$

при всех $i=1,\dots,|\Delta_1(K_1)|$; $j=1,\dots|\Delta_3(K_1)|$,

$$\chi^2(K_1)=\sup_{\sum_{i=0}^{K_1-1}\|v(i)\|^2\leqslant 6^2}\ \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|}\left\|\sum_{\tau_j\in N(s_i)} F_{\Phi(K_1)}(s_i,\tau_j)v(\tau_j)\right\|^2\leqslant\tilde\rho^2,$$

где

$$\tilde\rho^2=\rho^2-\sum_{i\in\Delta_2(K_1)}\|u^*(i)\|^2,$$

д. (16) $$\Pi A^{K_1}z_0-\sum_{i\in\Delta_2(K_1)}\Pi A^{K_1-1-i}B(i)u^*(i)\in(GK_1)+(M_2 * H(K_1)),$$

где $$G(K_1)=\left\{\sum_{i\in\Delta_1(K_1)}\Pi A^{K_1-1-i}B(i)\omega(i):\ \sum_{i\in\Delta_1(K_1)}\|\omega(i)\|^2\leqslant(\tilde\rho-\chi(K_1))^2\right\}.$$

Тогда из начального состояния $z_0\notin M$ *можно завершить преследование за* K_1 *шагов.*

Доказательство. Из соотношения (16) следует, что существуют векторы $m\in M_2 * H(K_1)$, $\bar\omega(S_i)$, $i=1,\dots,|\Delta_1(K_1)|$ такие, что

1. $$\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|}\|\bar\omega(S_i)\|^2\leqslant(\tilde\rho-\chi(K_1))^2,$$

2) (17) $\Pi A^{K_1} z_o - \sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} B(i) u^*(i) = m + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \Pi A^{K_1-1-Si} B(s_i) \overline{\omega}(s_i)$.

Пусть $\overline{v}(i)$, $i = 0,\dots, K_1-1$ — любое допустимое управление убегающего объекта. Тогда $\overline{u}(i)$, $i = 0,\dots, K_1-1$ — определяется следующим образом:

$$\overline{u}(i) = \begin{cases} u^*(i) & \text{, если } i \in \Delta_2(K_1) \\ \sum_{\tau_j \in N(s_k)} F_{\Phi(K_1)}(s_k, \tau_j)\, \overline{v}(\tau_j) + \overline{\omega}(s_k & \text{, если } i = s_k,\ k=1,\dots, |\Delta_1(K_1)|. \end{cases}$$

Сначала докажем, что $\overline{u}(i)$, $i=0,\dots, K_1 - 1$ допустимое управление преследователя. В самом деле из неравенства Минковского имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \overline{\omega}(s_i) + \sum_{\tau_j \in N(s_i)} F_{\Phi(K_1)}(s_i, \tau_j)\, \overline{v}(\tau_j) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \| \overline{\omega}(S_i) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \sum_{\tau_j \in N(S_i)} F_{\overline{\Phi}(K_1)}(S_i, \tau_j)\, \overline{v}(\tau_j) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\rho} - \chi(K_1) + \chi(K_1) = \tilde{\rho}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \| \overline{u}(i) \|^2 = \sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \| u^*(i) \|^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left\| \overline{\omega}(S_i) + \sum_{\tau_j \in N(S_i)} F_{\overline{\Phi}(K_1)}(S_i, \tau_j)\, \overline{v}(\tau_j) \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i \in \Delta_2(K_1)} \| u^*(i) \|^2 + \tilde{\rho}^2 = \rho^2.$$

А это значит, что $\overline{u}(i)$, $i = 0,1, \dots, K_1 - 1$ — допустимое.

По формуле решения система (1) имеем

$$\Pi z(K_1) = \Pi A^{K_1} z_0 - \sum_{i=0}^{K_1-1} \Pi A^{K_1-1-i} B(i)\,\bar u(i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{K_1-1} \Pi A^{K_1-1-i} C(i)\,\bar v(i) = \Pi A^{K_1} z_0 - \sum_{i\in\Delta_2(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} B(i)u^*(i) +$$

$$+ \sum_{i\in\Delta_4(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} C(i)\,\bar v(i) - \sum_{i\in\Delta_1(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} B(i)\,\bar u(i) +$$

$$+ \sum_{i\in\Delta_3(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} C(i)\,\bar v(i).$$

Из (17) получаем

$$\Pi z(K_1) = m + \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \Pi A^{K_1-1-s_i} B(s_i)\,\bar\omega(s_i) +$$

$$+ \sum_{i\in\Delta_4(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} C(i)\bar v(i) - \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \Pi A^{K_1-1-s_i} B(s_i)\bar\omega(s_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left| \sum_{\tau_j\in N(s_i)} \Pi A^{K_1-1-s_i} B(s_i) F_{\Phi(K_1)}(s_i, \tau_j)\,\bar v(\tau_j) \right| +$$

$$+ \sum_{i\in\Delta_3(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} C(i)\bar v(i) =$$

$$= m + \sum_{i\in\Delta_4(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} C(i)\,\bar v(i) + \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar v(\tau_j) -$$

$$(18) \qquad - \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left| \sum_{\tau_j\in N(s_i)} \Pi A^{K_1-1-s_i} B(s_i) F_{\Phi(K_1)}(s_i, \tau_j)\,\bar v(\tau_j) \right| .$$

С другой стороны из $m \in M_2 \mathbin{\underline{*}} H(K_1)$ следует, что существует вектор $m_2 \in M_2$ такой, что

$$m = m_2 - \sum_{i\in\Delta_4(K_1)} \Pi A^{K_1-1-i} C(i)\,\bar v(i) .$$

Таким образом из (28) имеем

$$(19) \qquad \Pi z(K_1) = m_2 + \sum_{j=1}^{-\Delta_3(K)_1)|} \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) -$$

$$- \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left| \sum_{\tau_j \in N(S_i)} \Pi A^{K_1-1-S_i} B(S_i) F_{\bar{\Phi}(K_1)}(S_i, \tau_j)\bar{v}(\tau_j) \right|.$$

Из свойств матрицы $\Phi(K_1)$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left| \sum_{\tau_j \in N(S_i)} \Pi A^{K_1-1-S_i} B(S_i) F_{\bar{\Phi}(K_1)}(S_i, \tau_j)\bar{v}(\tau_j) \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \left| \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j)\, \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \left| \sum_{i=1}^{|\Delta_1(K_1)|} \gamma_{K_1}(S_i, \tau_j) \right| \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j) =$$

$$(20) \qquad = \sum_{j=1}^{|\Delta_3(K_1)|} \Pi A^{K_1-1-\tau_j} C(\tau_j)\bar{v}(\tau_j).$$

Теперь из (19), (20) имеем $\Pi z(K_1) = m_2$, т. е. $z(K_1) \in M$. Теорема доказана.

2. В этом пункте изглаются частные формы теоремы 7, которые полезны для исследования конкретных дискретных игр с интегральными ограничениями.

Сначала рассмотрим случай когда информация является полной.

СЛЕДСТВИЕ 4. (см [4] теорема 4). *Пусть* $K_1 > 0$ *такое челое число, что*

а) Существуют такие линейные операторы $F(k)$, $k = 0,1,\ldots K_1-1$ *из* R^q *в* R^p *что при всех* $k = 0,1,\ldots, K_1$

$$\Pi A^{K_1-1-k} B(k)F(k) = \Pi A^{K_1-1-k} C(k),$$

б)

$$\chi^2(K_1) = \mathrm{Sup} \sum_{i=0}^{K_1-1} \| F(k)\, v(k) \|^2 \leqslant \rho^2,$$

$$\sum_{i=0}^{K_1-1} \| v(i) \|^2 \leqslant 6^2$$

в) $\Pi A^{K_1} z_o \in M_2 + G(K_1)$, *где*

$$G(K_1) = \left\{ \sum_{i=o}^{K_1-1} \Pi A^{K_1-1-i} B(i)\omega(i) : \sum_{i=o}^{K_1-1} \| \omega(i) \|^2 \leqslant (\rho - \chi(K_1))^2 \right\}.$$

Тогда из начального состояния $Z_o \notin M$ можно завершить преследование за K_1 шагов

Замечание 1. В этом случае $\hat{N}(k) = \{k\}$ при всех $k = 0,1,\ldots$ Рассматриваем теперь случай, когда преследователь использоваем информацию с запаздыванием.

СЛЕДСТВИЕ 5. (см [5], теорем I и [II], теорема 2. I). *Пусть $K_1 > 0$ такое целое число, что*

а) Существует функция $I(k)$ аргументов $k = 0,1,\ldots, K_1$, которая принимает только целые значения и удовлетворяет следующим условиям:

1. $I(0) = 0$, $I(k) \geqslant k$ *при всех* $k = 1,2,\ldots, K_1$,

2. $I(k) > I(l)$ *если* $k > l$,

3. *Существуют линейные операторы* $F(s)$, $s = 0,\ldots, I(K_1) - 1$ *из* R^q *в* R^p, *что при всех* $k = 0,\ldots, K_1 - 1$ *имеет место следующее*

$\Pi A^{K_1-1-k} B(k_o + k)F(s) = \Pi A^{I(K_1)-1-s} C(s)$; $I(k) \leqslant s \leqslant I(k+1) - 1$, *где* $k_o = I(K_1) - K_1$,

б)
$$\chi^2(K_1) = \sup_{\sum_{i=o}^{I(K_1)-1} \| v(i) \|^2 \leqslant б^2} \sum_{k=o}^{K_1-1} \left\| \sum_{s=I(k)}^{I(k_1+1)-1} F(s)v(s) \right\|^2 \leqslant \tilde{\rho}^2,$$

где
$$\tilde{\rho}^2 = \rho^2 - \sum_{i=o}^{k_o-1} \| u^*(i) \|^2,$$

причем $u^*(i)$, $i = 0,1,\ldots, k_o - 1$ *– любое управление преследователя такое, что*

$$\sum_{i=0}^{k_o-1} \| u^*(i) \|^2 \leqslant \rho^2,$$

в)
$$\Pi A^{I(K_1)} z_o - \sum_{i=0}^{k_o-1} \Pi A^{I(K_1)-1-i} B(i)\, u^*(i) \in M_2 + \dot{G}(K_1),$$

где
$$G(K_1) = \left\{ \sum_{i=0}^{K_1-1} \Pi A^{K_1-1-i} B(i)\,\omega(i) : \sum_{i=0}^{K_1-1} \| \omega(i) \|^2 \leqslant (\tilde{\rho} - \chi(K_1))^2 \right\}.$$

Тогда игра (I), (15) *из начального состояния $z_o \notin M$ заканчивается за $I(K_1) = k_o + K_1$ шагов.*

Замечание 2. В этом случае, при $k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$ преследователь не пользуется информацией об управлении убегающего объекта. На шаге $k_0 + k$, $k = 0, \ldots, k_1 - 1$ для построения управления $u(k_0 + k)$ преследователь должен знать управления $v(I(K_1) - I(K_1 - k))$, $v(I(K_1) - I(K_1 - k) + 1), \ldots, v(I(K_1) - I(K_1 - k - 1) - 1)$.

А это значит, что имеем

$N(k) = \phi$ при всех $k = 0, \ldots, k_0 - 1$,

$N(k_0 + k) = \{s: I(K_1) - I(K_1 - k) \leqslant s \leqslant I(K_1) - I(K_1 - k - 1\}$, $k = 0, \ldots, K_1 - 1$.

Теперь рассматривает случай когда используется максимум информации о прошлом поведении убегающего объекта.

СЛЕДСТВИЕ 6. (см [9], теорема I). *Пусть $K_1 > 0$ такое целое, что*

а) Существует матрица размера $K_1 \times K_1$

$$\Omega(K_1) = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_{0,K_1-1} & \alpha_{1,K_1-1} & \alpha_{2,K_1-1} & \ldots & \alpha_{K_1-1,\,K_1-1} \end{vmatrix}$$

одладающая свойствами:

1. $\sum\limits_{i=0}^{K_1-1} \alpha_{ij} = 1$ *при всех* $j = 0, 1, \ldots, K_1 - 1$,

2. *Существуют линейные операторы* $F_{\Omega(K_1)}(i,j)$, $i \geqslant j$, $i = 0, \ldots, K_1 - 1$, $j = 0, \ldots, K_1 - 1$ из R^q в R^p *такие, что при всех* i, $j = 0, 1, \ldots K_1 - 1$:

$$\Pi A^{K_1 - 1 - i} B(i)\, F_{\Omega(K_1)}(i, j) = \alpha_{ij}\, \Pi A^{K_1 - 1 - j} C(j),$$

б) $$X^2(K_1) = \operatorname{Sup} \sum_{i=0}^{K_1 - 1} \left\| \sum_{j=0}^{i} F_{\Omega(K_1)}(i, j)\, v(j) \right\|^2 \leqslant \rho^2,$$

$$\sum_{i=0}^{K_1-1} \| v(i) \|^2 \leqslant б^2$$

в) $$\Pi A^{K_1} z_0 \in M_2 + G(K_1)$$ *, где*

$$G(K_1) = \left\{ \sum_{0=i}^{K_1-1} \Pi A^{K_1-1-i} \; B(i)\,\omega(i) : \sum_{i=0}^{K_1-1} \|\,\omega(i)\,\|^2 \leqslant \left(\rho - \chi(K_1)\right)^2 \right\}.$$

Тогда игра (1), (15) *из начального состояния* $z_0 \notin M$ *заканчивается за* K_1 *шагов.*

Замечание 3. В этом случае, множества $N(k)$, $k = 0,1,\dots$ имеют вид

$N(k) = \{\, 0,1,\dots,\ k\}$ при всех $k = 0,1,\dots$

2. В этом пункте рассматриваются некоторые конкретные задачи преследования линейных дискретных игр с интегральными ограничениями, которые иллюстрируют полученные теоретические результаты.

Пусть движения векторов $z_i(k) \in R^n$, $i = 1, 2, 3$ описываются системой разностных уравнений

$$(21)\qquad \begin{cases} z_1(k+1) = z_1(k) + \mu\,(z_2(k) - z_3(k)) \\[2mm] z_2(k+1) = \left\| E - \mu \begin{Vmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{Vmatrix} \right\| z_2(k) + \mu\, u(k) \\[2mm] z_3(k+1) = \left\| E - \mu \begin{Vmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{Vmatrix} \right\| z_3(k) + \mu\, v(k), \end{cases}$$

где $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1,\dots,n$; $\mu > 0$ — малый параметр, E — единичная матрица порядка n. Управления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям:

$$(22)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \|\,u(k)\,\|^2 \leqslant \rho^2\ ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|\,v(k)\,\|^2 \leqslant б^2,$$

где $\rho > 0$, $б \geqslant 0$.

Ясно, что если $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$; $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta$ то (21), (22) являются дискретным аналогом известного контрольного примера Л. С. Понтрягина (см[1]) с интегральными ограничениями.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha\dot{x} = u \\ \ddot{y} + \beta\dot{y} = v \\ \int_0^{+\infty} \|\,u(t)\,\|^2\, dt \leqslant \rho^2\ ;\ \int_0^{+\infty} \|\,v(t)\,\|^2\, dt \leqslant б^2 . \end{cases}$$

Положим $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in R^{3n}$, тогда (21) имеет вид

$$z(k+1) = Az(k) - Bu(k) + Cv(k), \tag{22}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{0} \\ -\mu E \\ \tilde{0} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \mu E \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{vmatrix} E & \mu E & -\mu E \\ \tilde{0} & \begin{matrix} 1-\mu\alpha_1 & & & \\ & 1-\mu\alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1-\mu\alpha_n \end{matrix} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \begin{matrix} 1-\mu\beta_1 & & & \\ & 1-\mu\beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1-\mu\beta_n \end{matrix} \end{vmatrix}$$

при этом E, $\tilde{0}$ — соответственно единичная и нулевая матрица порядка n, а T — знак транспонирования.

Будем говорить, что в игре (23), (22) (или, то же в самое, в игре (21) — (22)) возможна поимка за k_1 шагов если впервые выполнено равенство $z_1(k_1) = 0$. Таким образом в этом случае терминальное множество M имеет вид

$$M = \left\{ (z_1, z_2, z_3)^T : z_1 = 0 \right\}$$

Ясно, что M является подпространством пространства R^{3n}. Пусть L — ортогональное дополнение к M в R^{3n}, тогда

$$L = \left\{ (z_1, z_2, z_3)^T : z_2 = 0;\ z_3 = 0 \right\}.$$

В сответствующем базисе в L проектирование Πz имеет простой вид: $\Pi z = z_1$, где

$\Pi = (E, \tilde{0}, \tilde{0})$ — $(n \times 3n)$ — матрица, соответствующая оператору проектирования в выбранных базисах. Нетрудно доказать, что

$$\Pi A^k C = \begin{vmatrix} b_{1k} & & & \\ & b_{2k} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & b_{nk} \end{vmatrix}; \quad \Pi A^k B F(k) = - \begin{vmatrix} a_{1k} & & & \\ & a_{2k} & & \\ & & \ddots & 0 \\ & 0 & & a_{nk} \end{vmatrix} F(k).$$

где
$$a_{ik} = \mu\left[1 + (1-\mu\alpha_i) + \dots + (1-\mu\alpha_i)^{k-1}\right]$$
$$b_{ik} = \mu\left[1 + (1-\mu\beta_i) + \dots + (1-\mu\beta_i)^{k-1}\right]$$
$i = 1, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots$

Положим
$$\gamma = \max\left(1, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$$
$$F(0) = \tilde{0}; \qquad F(k) = -\begin{vmatrix} \frac{b_{1k}}{a_{1k}} & & 0 \\ & \frac{b_{2k}}{a_{2k}} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \frac{b_{nk}}{a_{nk}} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Имеем
$$\text{Sup} \qquad \sum_{i=0}^{k} \| F(i)\ v(i) \|^2 \leqslant \gamma^2 б^2 .$$
$$\sum_{i=0}^{k} \| v(i) \|^2 \leqslant б^2$$
Введем в рассмотрение множество
$$G(k) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \Pi A^i B\omega(i) : \sum_{i=0}^{k} \| \omega(i) \|^2 \leqslant (\rho - \gamma б)^2 \right\}.$$
Пусть $\rho > \gamma б$, тогда можно доказать, что $G(k)$ является эллипсоидом с размерами
$$(\rho - \gamma б)\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ji}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ j = 1, \dots, n.$$

Пусть $z(o) = \left(z_1^o, z_2^o, z_3^o\right)^T$ — начальное состояние игры.

Имеем
$$\Pi A^{k+1} z(o) = z_1^o + \begin{vmatrix} a_{1,k+1} & & \\ & a_{2,k+1} & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & a_{n,k+1} \end{vmatrix} z_2^o + \begin{vmatrix} b_{1,k+1} & & \\ & b_{2,k+1} & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & b_{n,k+1} \end{vmatrix} z_3^o .$$

Ясно что

$$\lim_{k\to+\infty} (\rho-\gamma\delta)\left(\sum_{i=1}^{k} a^2_{ji}\right)^{\frac{1}{2}} = +\infty \text{ при всех } j=1,\dots,n,$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left\| \Pi A^{k+1} z(o)\right\| = \left\| \begin{vmatrix} z_1^o + \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_n}\end{vmatrix} & z_2^o + \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\beta_n}\end{vmatrix} & z_3^o \end{vmatrix} \right\|$$

Таким образом, при $\rho > \gamma\delta$ предположения а/ — в/ следствия 4 выполнены, поэтому доказана следующая:

ТЕОРЕМА 8. *Пусть выполнено* $\gamma\delta < \rho$, *где*

$$\gamma = max\left(1, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right).$$

Тогда преследование в игре (21) — (22) заканчивается за конечное число шагов из любой точки $z(0) = (z_1^0, z_2^0, z_3^0)^T$.

Замечание 4. В этом случае иножества $N(k)$ имеют следующий вид

$$N(k) = \{k\} \qquad \text{при всех } k = 0,1,\dots$$

Рассматривается теперь преследование в линейных дискретных играх с линейными объектами высокого порядка.

Пусть движения векторов $z_i(k) \in R^n$, $i = 1, 2, \dots, p+q$ описываются уравнениями:

$$(24)\begin{cases} z_1(k+1) = z_1(k) + \mu z_2(k) \\ z_2(k+1) = z_2(k) + \mu z_3(k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{p-1}(k+1) = z_{p-1}(k) + \mu z_p(k) \\ z_p(k+1) = (1-\mu\alpha_1) z_p(k) - \mu\alpha_2 z_{p-1}(k) - \dots - \mu\alpha_p z_1(k) + \mu u(k) \\ z_{p+1}(k+1) = z_{p+1}(k) + \mu z_{p+2}(k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{p+q-1}(k+1) = z_{p+q-1}(k) + \mu z_{p+q}(k) \\ z_{p+q}(k+1) = (1-\mu\beta_1) z_{p+q}(k) - \mu\beta_2 z_{p+q-1}(k) - \dots - \mu\beta_q z_{p+1}(k) + \mu v(k), \end{cases}$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, $q \geqslant p$, α_i , $i = 1,\dots, p$ и β_j , $j = 1,\dots, q$ — некоторые действительные числа. Можно считать, что (24) является дискретным аналогом системы

$$x^{(p)} + \alpha_1 x^{(p-1)} + \ldots + \alpha_{p-1} \dot{x} + \alpha_p x = u$$

$$y^{(q)} + \beta_1 y^{(q-1)} + \ldots + \beta_{q-1} \dot{y} + \beta_q y = v \quad .$$

Управления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| u(k) \|^2 \leqslant \rho^2 \ ; \ \sum_{k=0}^{\infty} \| v(k) \|^2 \leqslant \delta^2 \ . \tag{25}$$

Будем говорить, что игра (24)—(25) заканчивается за k_1 шагов, если впервые выполнено $z_1(k_1) = z_{p+1}(k_1)$. При этом для нахождения значения $u(k)$ параметра u разрешается использовать z_0 и $v(k)$, т.е. в этом случае $N(k) = \{ k \}$ при всех k.

Положим $\quad z = (z_1, \ldots, z_p, z_{p+1}, \ldots, z_{p+q})^T \in R^{n(p+q)} \quad .$

Тогда (24) имеет вид

$$z(k+1) = Az(k) - Bu(k) + Cv(k), \tag{26}$$

где

$$B = \left| \begin{matrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \vdots \\ \tilde{0} \\ -\mu E \\ \tilde{0} \\ \vdots \\ \tilde{0} \end{matrix} \right| \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \to (p+1) - \text{ое место} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad C = \left| \begin{matrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \vdots \\ \tilde{0} \\ \mu E \end{matrix} \right| \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \to (p+q) - \text{ое место} \end{matrix}$$

$$\left| \begin{array}{llllll|llllll} E & \mu E & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & E & \mu E & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & E & \mu E & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ -\mu\alpha_p E & -\mu\alpha_{p-1} E & -\mu\alpha_{p-2} E & \ldots & -\mu\alpha_2 E & (1-\mu\alpha_1) E & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} & E & \mu E & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} & 0 & E & \mu E & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} & 0 & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & E & \mu E \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} & -\mu\beta_q E & -\mu\beta_{q-1} E & -\mu\beta_{q-2} E & \ldots & \mu\beta_2 E & (1-\mu\beta_1) E \end{array} \right|$$

причем E, $\tilde{0}$ — соответственно единичная и нулевая матрица порядка n и T — знак транспонирования. Ясно, что в этом случае имеем

$$M = \left\{ (z_1, \ldots, z_{p+q})^T; \quad z_1 = z_{p+1} \right\}$$

Ортогональное дополнение L к M в $R^{n(p+q)}$ имеет следующий вид:

$$L = \left\{ (z_1, \ldots, z_{p+q})^T : z_1 = -z_{p+1};\ z_2 = z_3 = \ldots = z_p = z_{p+2} = \ldots = z_{p+q} = 0 \right\}.$$

В соответствующем базисе в L проектирования Πz имеет простой вид $\Pi z = z_1 - z_{p+1}$, где

$$\Pi = (E, \tilde{0}, \ldots\ldots, \tilde{0}, \underbrace{-E}_{(p+1)\text{ — ое место}}, 0, \ldots\ldots, \tilde{0}).$$

есть $n \times (p+q)n$ — матрица, соответствующая оператору проектирования в выбранных базисах.

Легко проверить, что

$$A^k = \left| \begin{matrix} x_{1k}E & x_{2k}E & \ldots & x_{pk}E & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & y_{1k}E & y_{2k}E & \ldots & y_{qk}E \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right|$$

где $k = 1, 2, \ldots\ldots,$ причем

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1k} & \ldots \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ x_{p1}, & x_{p2}, & \ldots, & x_{pk} & \ldots \\ y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1k} & \ldots \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ y_{q1}, & y_{q2}, & \ldots, & y_{qk} & \ldots \end{matrix}$$

связаны соотношениями:

$$x_{11} = 1 \ : \ x_{21} = \mu \ ; \ x_{31} = \ldots = x_{p1} = 0$$

$$x_{1n} = x_{1,\,n-1} - \mu\alpha_p x_{p,\,n-1}$$
$$x_{2n} = \mu x_{1,\,n-1} + x_{2,\,n-1} - \mu\alpha_{p-1} x_{p,\,n-1}$$
$$(27)\qquad x_{3n} = \mu x_{2,\,n-1} + x_{3,\,n-1} - \mu\alpha_{p-2} x_{p,\,n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{p-1,\,n} = \mu x_{p-2,\,n-1} + x_{p-1,\,n-1} - \mu\alpha_2 x_{p,\,n-1}$$
$$x_{pn} = \mu x_{p-1,\,n-1} + (1-\mu\alpha_1) x_{p,\,n-1}$$
$$y_{11} = 1\,;\ y_{21} = \mu\,;\ y_{31} = \ldots = y_{q1} = 0$$
$$y_{1n} = y_{1,\,n-1} - \mu\beta_q y_{q,\,n-1}$$
$$(28)\qquad y_{2n} = \mu y_{1,\,n-1} + y_{2,\,n-1} - \mu\beta_{q-1} y_{q,\,n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{q-1,\,n} = \mu y_{q-2,\,n-1} + y_{q-1,\,n-1} - \mu\beta_2 y_{q,\,n-1}$$
$$y_{qn} = \mu y_{q-1,\,n-1} + (1-\mu\beta_1)\, y_{q,\,n-1}.$$

Из соотношения (27) имеем

$$x_{1n} + \lambda x_{2n} + \lambda^2 x_{3n} + \ldots + \lambda^{p-2} x_{p-1,\,n} + \lambda^{p-1} x_{pn} =$$
$$= (1+\mu\lambda)x_{1,\,n-1} + \lambda(1+\mu\lambda)x_{2,\,n-1} + \ldots + \lambda^{p-2}(1+\mu\lambda)\, x_{p-1,\,n-1} +$$
$$+ \left(-\mu\alpha_p - \mu\lambda\alpha_{p-1} - \ldots - \mu\lambda^{p-2}\alpha_2 + \lambda^{p-1}(1-\mu\alpha_1)\right) x_{p,\,n-1} =$$
$$= (1+\mu\lambda)\left(x_{1,\,n-1} + \lambda x_{2,\,n-1} + \lambda^2 x_{3,\,n-1} + \ldots + \lambda^{p-2} x_{p-1,\,n-1}\right) +$$
$$+ \left(-\mu\alpha_p - \mu\lambda\alpha_{p-1} - \ldots - \mu\lambda^{p-2}\alpha_2 + \lambda^{p-1}(1-\mu\alpha_1)\right) x_{p,\,n-1}.$$

Возьмём λ так, чтобы имело место равенство

$$(29)\qquad \lambda^p + \alpha_1\lambda^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}\lambda + \alpha_p = 0$$

При этих значениях λ имеем

$$x_{1n} + \lambda x_{2n} + \ldots + \lambda^{p-1} x_{pn} = (1+\mu\lambda)\left(x_{1,\,n-1} + \lambda x_{2,\,n-1} + \ldots + \lambda^{p-1} x_{p,\,n-1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$x_{1n} + \lambda x_{2n} + \ldots + \lambda^{p-1} x_{pn} = (1+\mu\lambda)^{n-1}\left(x_1 + \lambda x_{21} + \ldots + \lambda^{p-1} x_{p1}\right) =$$
$$= (1+\mu\lambda)^n$$

Пусть уравнение (29) имеют различные действительные корни $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p$.

Тогда имеем

$$(30)\quad \begin{cases} x_{1n}+\lambda_1 x_{2n}+\lambda_1^2 x_{3n}+\ldots+\lambda_1^{p-1} x_{pn}=(1+\mu\lambda_1)^n \\ x_{1n}+\lambda_2 x_{2n}+\lambda_2^2 x_{3n}+\ldots+\lambda_2^{p-1} x_{pn}=(1+\mu\lambda_2)^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+\lambda_p x_{2n}+\lambda_p^2 x_{3n}+\ldots+\lambda_p^{p-1} x_{pn}=(1+\mu\lambda_p)^n. \end{cases}$$

Из (30) следует, что

$$x_{pn}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{p-2} & (1+\mu\lambda_1)^n \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{p-2} & (1+\mu\lambda_2)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_p & & \lambda_p^{p-2} & (1+\mu\lambda_p)^n \end{vmatrix}}{\prod\limits_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{p}(\lambda_j-\lambda_i)}.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$(31)\quad \gamma^q+\beta_1\gamma^{q-1}+\beta_2\gamma^{q-2}+\ldots+\beta_{q-1}\gamma+\beta_q=0$$

Пусть уравнение (31) имеют различные действительные корни $\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_q$.

Аналогично имеем

$$y_{qn}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_1^{q-2} & (1+\mu\gamma_1)^n \\ 1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_2^{q-2} & (1+\mu\gamma_2)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \gamma_q & \ldots & \gamma_q^{q-2} & (1+\mu\gamma_q)^n \end{vmatrix}}{\prod\limits_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{q}(\gamma_j-\gamma_i)}.$$

Имеем

$$\Pi A^0 C=\Pi A^0 BF(0)=\widetilde{0},$$

$$\Pi A^k C=-\mu y_{qk}E;\qquad \Pi A^k BF(k)=-\mu x_{pk}F(k)E;\qquad k=1,2,\ldots$$

Положим

$$F(k)=\begin{cases} \widetilde{0} & \text{, если } k=0 \\ \dfrac{y_{qk}}{x_{pk}}E & \text{, если } k=1,2,\ldots \end{cases}$$

Пусть $\gamma_q \leqslant \lambda_p \leqslant 0$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_{qn}}{x_{pn}} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \gamma_q < \lambda_p \\ \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{p-1} (\lambda_p - \lambda_i)}{\prod\limits_{i=1}^{q-1} (\gamma_q - \gamma_j)}, & \text{если} \quad \gamma_q = \lambda_p . \end{cases}$$

Это означает, что δ является коненым числом, где

$$\delta^2 = \max_{k=1,2\ldots} \left\{ \frac{\prod\limits_{\substack{i,j=1\\ j>1}}^{p} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod\limits_{\substack{i,j=1\\ j>1}}^{q} (\gamma_j - \gamma_i)} \times \frac{\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_1^{q-2} (1+\mu\gamma_1)^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \gamma_q & \ldots & \gamma_q^{q-2} (1+\mu\gamma_q)^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{p-2} (1+\mu\lambda_1)^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_p^{p-2} (1+\mu\lambda_p)^k \end{vmatrix}} \right\}^2$$

Отсюда видно, что предположения а /—в/ следствия 4 выполнены если $\rho > \delta б$. Таким образом доказана следующая:

ТЕОРЕМА 9. *Пусть (29) и (31) имеют различные действительные корни* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p$; $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_q$. *Пусть выполнены* $\gamma_q \leqslant \lambda_p \leqslant 0$. $\rho > \delta б$. *Тогда игра (24) — (25) заканчивается за конечное число шагов из любой точки* $\left(z_1^0, \ldots, z_{p+q}^0\right)^T$

Пусть движения векторов $z_i(k) \in R^n$, $i = 1, 2$ описываются уравнениями

$$(32) \qquad \begin{cases} z_1(k+1) = \alpha z_1(k) + \dfrac{1-(-1)^k}{2} u(k) \\ z_2(k+1) = \beta z_2(k) + v(k), \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Управления $u(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям:

$$(33) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \| u(k) \|^2 \leqslant \rho^2 ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \| v(k) \|^2 \leqslant \delta^2 .$$

Игра (32) — (33) начинается из начального состояния $z_i(0) = z_i^0$, $i = 1,2$ где $z_i^0 \neq z_2^0$. Будем говорить, что преследование в игре (32) — (33) заканчивается за k_1 шагов, если впервые выполнено равенство $z_1(k_1) = z_2(k_1)$. При этом для нахождения значения $u(k)$, $k = 2p + 1$, $p = 0,1,\dots$ разрешается использовать значения z_0 и $v(k)$, $v(k-1)$. Это означает

$$N(2p+1) = \{2p,\ 2p+1\},\ p = 0,1,\dots$$

Положим $z = (z_1\ \ z_2)^T \in R^{2n}$. Тогда (32) записывается в виде одного уравнения.

(34) $$z(k+1) = Az(k) - B(k)\,u(k) + C(k)\,v(k),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha E & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \beta E \end{pmatrix};\ B(k) = -\begin{bmatrix} \frac{1-(-1)^k}{2}\,E \\ \tilde{O} \end{bmatrix};\ C(k) = \begin{bmatrix} \tilde{O} \\ E \end{bmatrix}$$

причем E, $\tilde{O}$ — соответственно единичная и нулевая матрица порядка n, а T — знак транспонирования. В этом случае имеем

$$M = \left\{ (z_1, z_2)^T : z_1 = z_2 \right\};\ L = \left\{ (z_1, z_2)^T : z_1 = -z_2 \right\}.$$

Положим $\Pi = (E,\ -E)$. Тогда в соответственной системе координат, вектор πz записывается как $\Pi z = z_1 - z_2$, где π — оператор ортогонального проектирования из R^{2n} на L. Нетрудно докозать, что

$$\Pi A^{K-1-k} C(k) = \beta^{K-1-k} E,$$

$$\Pi A^{K-1-k} B(k) = \begin{cases} \tilde{O}, & \text{если } k \text{ — четное число} \\ \alpha^{K-1-k} E, & \text{если } k \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Пусть Δ — множество всех положительных четных чисел. Пусть $K \in \Delta$ тогда матрица $\Phi(K)$ порядка K имеет вид

$$\Phi(K) = \begin{vmatrix} 0\,1\,0\,0 \dots\dots 0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \dots\dots 0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \dots\dots 0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \dots\dots 0\,0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\,0\,0\,0 \dots\dots 0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \dots\dots 0\,1 \end{vmatrix}$$

Пусть i — четное число, тогда положим

$$F_{\Phi(K)}(i, j) = \tilde{O}_K \text{ при всех } j = 0,1,\dots,K-1$$

Пусть i — нечетное число, тогда положим

$$F_{\overline{\Phi}(K)}(i,j)=\begin{cases}\tilde{O}_K & \text{если } j>i \quad \text{или } j<i-1\\ \dfrac{\beta^{K-i}}{\alpha^{K-1-i}}E_K, & \text{если } j=i-1\\ \dfrac{\beta^{K-1-i}}{\alpha^{K-1-i}}E_K, & \text{если } j=i\end{cases}$$

где E_K, $\tilde{O}_K$ соответственно единичная и нулевая матрица порядка K. Имеем.

$$\sum_{i=o}^{K-1}\left\|\sum_{j=o}^{i}F_{\Phi(K)}(i,j)v(j)\right\|^2=\left\|\frac{\beta^{K-1}}{\alpha^{K-2}}v(0)+\frac{\beta^{K-2}}{\alpha^{K-2}}v(1)\right\|^2+$$

$$+\left\|\frac{\beta^{K-3}}{\alpha^{K-4}}v(2)+\frac{\beta^{K-4}}{\alpha^{K-4}}v(3)\right\|^2+\ldots+\left\|\beta v(K-2)+v(K=1)\right\|^2\leqslant$$

$$\leqslant(\beta^2+1)\left(\frac{\beta^{K-2}}{\alpha^{K-2}}\right)(\|v(0)\|^2+\|v(1)\|^2)+(\beta^2+1)\left(\frac{\beta^{K-4}}{\alpha^{K-4}}\right)^2(\|v(2)\|^2+\|v(3)\|^2)+$$

$$+\ldots+(\beta^2+1)(\|v(K-2)\|^2+\|v(K-1)\|^2).$$

Пусть $\beta\leqslant\alpha$. Тогда имеем

$$\sum_{i=0}^{K-1}\left\|\sum_{j=0}^{i}F_{\Phi(K)}(i,j)v(j)\right\|^2\leqslant(\beta^2+1)\sum_{i=0}^{K-1}\|v(i)\|^2.$$

Таким образом предположения г/ теоремы 7 выполнено если $(\beta^2+1)\delta^2\leqslant\rho^2$.
Из теоремы 7 получается следующая:

ТЕОРЕМА 10. *Пусть* $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\beta\leqslant\alpha$, $(\beta^2+1)\delta^2<\rho^2$
Тогда преследование в игре (32) — (33) заканчивается за конечное число шагов из любой точки $(z_1^0, z_2^0)^T$.

Received January 12, 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, *О линейных дифференциальных играх*, I. ДАН СССР, т. 174, № 6, 1967.
2. А. А. Чикрий, *О линейных дискретных играх качества*, Кибернетика, №5, 1971.
3. А. А. Чикрий, *Об одном классе линейных дискретных игр качества*. Кибернетика. №6, 1971.
4. Н. Ю. Сатимов, *О двух методах преследования в линейных дискретных играх*. ДАН УзССР, № 11, 1979.

5. А.Я. Азимов и Фан Зуй Хай, *О линейных дискретных играх с ресурными ограничениями на управления,* ДАН АзССР, № 3, 1981.

6. Фан Зуй Хай, *О дискретных линейных играх с фиксированный временем,* ДАН АзССР, №11, 1981.

7. Фан Зуй Хаи и Фам Хонг Куанг, *Об одном способе преследования в линейных дискретных играх,* ДАН АзССР, № 11, 1982.

8. Фан Зуй Хай, *Задача преследования в линейных дифференчиальных и дискретных играх в различными ограничениями на управления,* Приближ. методы и ЭВМ. Баку, 1982.

9. Фан Зуй Хай и Фам Хонг Куант, *Об одном способе преводходства в линейных дискретных играх с интегральными ограничениями,* ВИНИТИ №2913—81 деп. 1981.

10. Фан Зуй Хай, *Об одном способе преследования в линейных дискретных играх с разнотипными ограничениями на управления,* Préprint series № 3, 1982.

11. Фан Зуй Хай, *О линейных дискретных играх с полной и неполной информацией,* ВИНИТИ,. № 5519-80 деп. 1980.

12. Ф. Г. Гантмахер *Теория матриц, М., «Наука», 1967.*

INSTITUTE OF MATHEMATICS, P. O. BOX 631, BO HO, 10000 HANOI, VIETNAM