

C*-COMPLEXES DE FREDHOLM. II.

DO NGOC DIEP

O. INTRODUCTION

Nous voudrions expliquer les raisons pour lesquelles nous proposons ici une « C^* -champisation » des résultats de A. Connes et P. Baum [1], d'une part, et une « feuilletagisation » d'un résultat de J. Rosenberg [6], d'autre part.

La deuxième raison est très simple; il suffit de reprendre l'argumentation de A. Connes et P. Baum expliquant le passage du théorème de Novikov à la conjecture de Novikov. Nous sommes dans la même situation dans le contexte de champs continus de C^* -algèbres, triviaux le long des feuilles.

Miscenko et Solov'ev [5] ont bien expliqué l'utilité et les aspects spécifiques des formules de type de Hirzebruch. Dans la première partie [7], nous avons cautionné l'usage du processus de « C^* -champisation » des opérateurs pseudodifférentiels sur les feuilletages. Donc l'étude du problème de l'invariance homotopique des hautes signatures se présente de manière très naturelle dans la théorie de champs continus de C^* -algèbres sur des feuilletages. Il s'agit du rôle essentiel des représentations de dimension infinie de C^* -algèbres, clairement expliqué par Miscenko-Solov'ev-Fomenko [5]; voir aussi Rosenberg [6].

L'auteur est très heureux d'avoir eu l'occasion de séjourner à l'IHES et tient à remercier sincèrement les Professeurs A. Connes et J. Rosenberg qui ont bien voulu lui faire part de leurs travaux [1], [2], [6], et le Professeur P. Cartier qui a toujours été prêt à l'aider lors de son séjour à Bures-sur-Yvette.

I. CARACTÈRE DE CHERN DANS LA K -THÉORIE DES C^* -ALGÈBRES

Tout d'abord, nous devons généraliser les notions de caractères de Chern, de genre de Todd, etc... dans notre théorie des champs continus de C^* -algèbres sur les feuilletages. Nous suivons la méthode de l'exposé de M. Karoubi [4], et Miscenko-Solov'ev [5].

Soient (V, F) une variété compacte feuilletée par une distribution intégrable $F \subseteq TV$, $A = (\{A_x\}_{x \in V}, \Gamma_A)$ un champ continu de C^* -algèbres, trivial sur les feuilles, \hat{F} un champ continu de A -modules hilbertiens, dont les «fibres» E_x , $x \in V$, sont des A_x -modules projectifs de types fini et dont les restrictions à chaque feuille L du feuilletage (V, F) admettent une structure de fibré vectoriel de classe C^∞ . Nous fixons un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de la variété feuilletée V tel que les restrictions $\{U_i \cap L\}_{i \in I}$ forment une trivialisations ouverte de $E|_L$, qui est supposé plat, voir Karoubi [4, §3]. Soient g_{ij} les fonctions de transition correspondantes. Alors pour chaque feuille L , $g_{ij}|_L$ est une fonction $U_i \cap U_j \cap L \rightarrow GL_n(A_L)$, où $A_L \cong A_x$, $\forall x \in L$, lorsque le A_L -fibré $E|_L$ est à fibres $E_x \cong A_L^n$, pour $x \in L$. Ici on peut suivre la méthode de Karoubi [4, §§1—4]. Mais nos C^* -algèbres A_x , en général, ne sont pas commutatives, donc on peut par exemple utiliser la théorie de l'homologie cyclique de A. Connes au lieu du §2 de Karoubi [4]. Nous préférons quant à nous suivre la construction de Miscenko-Solov'ev [5, §1] pour obtenir un accouplement $K^*(V) \times K_A^*(V') \rightarrow K_A^*(V \Delta V')$ et notre caractère de Chern désiré :

$$\text{ch}_A : K_A^*(V) \rightarrow H^*(V; Q) \otimes K_*(A).$$

$$\begin{array}{ccc} K^*(V) \otimes K_A^*(V') & \xrightarrow{\quad} & K_A^*(V \Delta V') \\ \downarrow \otimes Q \otimes Id & \nearrow \text{ch}_A & \\ H^*(V, Q) \otimes K_A^*(V') & & \end{array}$$

qui peut être précisé grâce à la formule de Künneth :

$$\text{Ch}_A : K_A^0(V) \rightarrow H^{even}(V; Q) \otimes K_0(A) \oplus H^{odd}(V, Q) \otimes K_1(A).$$

Nous désignons par $H_A^*(V; Q) = H^{even}(V; Q) \otimes K_0(A) \oplus H^{odd}(V; Q) \otimes K_1(A) = H^*(V; Q) \otimes K_*(A)$ le produit tensoriel de la cohomologie ordinaire et de la K -théorie algébrique comme groupe de coefficients. Alors pour cette théorie on a aussi l'isomorphisme de Thom

$$H_A^*(V, Q) \xrightarrow{\sim} H_{A, \text{cpt}}^*(F; Q).$$

Les classes de Todd, de Hirzebruch,.. qui sont nécessaires pour nous dans les paragraphes suivants, sont les classes ordinaires.

Remarque : Ici nous avons les aspects spécifiques du caractère de Chern ch_A qui est évalué aussi dans les groupes $H^{odd}(V, Q) \otimes K_1(A)$, grâce à la formule de Künneth.

2. CLASSES DE PONTRJAGIN ET LA CONJECTURE DE NOVIKOV

Nous considérons la cohomologie rationnelle $H_A^*(V; Q) := H^*(V; K_A^*(\text{pt}) \otimes Q) = H^*(V; Q) \otimes K_A^*(\text{pt})$ comme dans le paragraphe précédent (voir aussi Miščenko-Solov'ev [5, § 1], J. Rosenberg [6, § 1]).

Soient $f : (V', F') \longrightarrow (V, F)$ une équivalence homotopique de feuilletages, $p_i(V) \in H^{4i}(V, Q)$ les classes rationnelles de Pontrjagin (voir P. Baum, A. Connes [1, § 1]).

THÉORÈME DE NOVIKOV POUR DES FEUILLETAGES: Soient V, V' des variétés compactes, feuilletées par les distributions intégrables $F \subset TV$ et $F' \subset TV'$ respectivement, $f : (V', F') \longrightarrow (V, F)$ une équivalence homotopique de feuilletages. Supposons que (V, F) ait des feuilles à courbure scalaire négative. Alors f conserve les classes rationnelles de Pontrjagin.

Preuve: Voir P. Baum et A. Connes [1, §§ 3, 4]. \square

Maintenant, nous considérons comme dans le paragraphe précédent, le champ continu de C^* -algèbres $A = (\{A_x\}, \Gamma_A)$ trivial le long des feuilles, les groupes $K_A^*(V, F)$, la cohomologie $H_A^*(V; Q) = H^*(V, Q) \otimes K_A^*(\text{pt})$ et le caractère de Chern

$$\text{ch}_A : K_A^*(V, F) \longrightarrow H_A^*(V, Q)$$

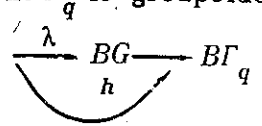
CONJECTURE DE NOVIKOV POUR DES FEUILLETAGES:

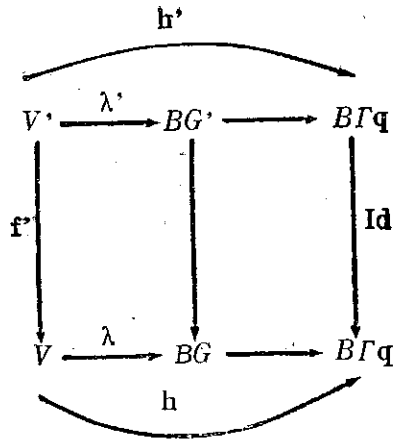
Soient $(V, F), (V', F')$ deux variétés compactes orientées feuilletées par les spin^c-distributions F et F' , resp., $f : (V, F) \longrightarrow (V', F')$ un morphisme de feuilletages qui est une équivalence homotopique et qui conserve les orientations de feuilletages, $G = G(V, F) \simeq G(V', F')$ le groupoïde d'holonomie, BG l'espace classifiant de G , et $\lambda : V \longrightarrow BG, \lambda' : V' \longrightarrow BG$ les applications classifiantes correspondantes. Alors dans le groupe $H^*(BG; Q \otimes K_A^*(\text{pt}))$ on a

$$\lambda_* (L(TV) \cap [V]) = \lambda'_* f_* (L(TV') \cap [V']).$$

Preuve: En pratique, les classes $L(TV)$ et $L(TV')$ prennent leurs valeurs dans les groupes $H^*(V; Q)$. Donc ici, il s'agit du théorème classique (voir P. Baum-A. Connes [1]). \square

Soient Γ_q le groupoïde de Haefliger des germes d'homéomorphismes de \mathbb{R}^q , $V \xrightarrow{\lambda} BG \xrightarrow{\lambda'} B\Gamma_q$ l'application classifiante de Haefliger, qui est naturelle au sens du diagramme commutatif





où $q = n - l$, $n = \dim V = \dim V'$, $l = \dim F = \dim F'$.

C^* — CONJECTURE DE NOVIKOV (modifiée par P. Baum — A. Connes [1] pour des C^* — champs continus constants sur des feuilletages).

Supposons que $f: (V, F) \rightarrow (V', F')$ satisfasse toutes les hypothèses dans la conjecture de Novikov pour des feuilletages. Alors pour chaque élément

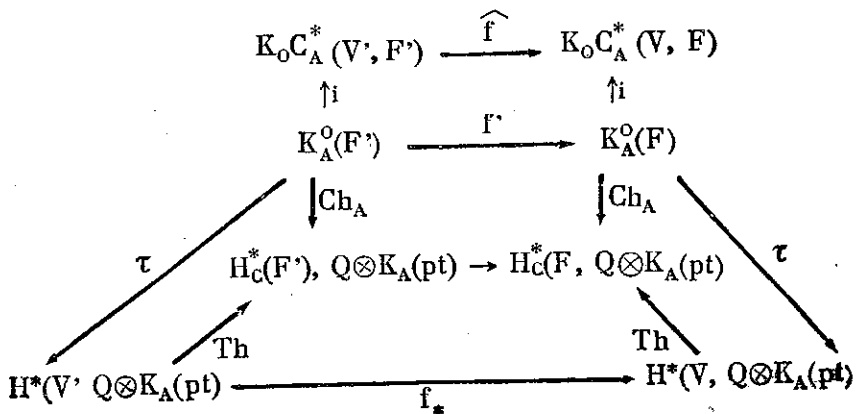
$\alpha \in H_A^*(B\Gamma_q, Q) := H^*(B\Gamma_q; Q) \otimes K_A^*(pt)$, on a l'égalité

$$\langle h^*\alpha \cup L(TV), [V] \rangle = \langle h'^*\alpha \cup L(TV'), [V'] \rangle.$$

THÉORÈME: La C^* — conjecture de Novikov est vraie lorsque (V, F) a des feuilles à courbure scalaire négatives.

Nous voulons indiquer les points essentiels dans la démonstration des résultats précédents. Ils représentent une « C^* — champisation » des résultats classiques.

On doit considérer le diagramme commutatif



Dans ce diagramme $i: K_A^0(F) \rightarrow K_0 C_A^*(V, F)$ associée à chaque symbole σ l'indice de l'opérateur déduit du A -symbole par l'intégrale oscillante :

$$i(\sigma) = \text{index } D_\sigma, \sigma \in K_A^0(F).$$

L'application $\tau: K_A^0(F) \rightarrow H^*(V; Q \otimes K_A(pt))$ est donnée par la formule suivante

$$\tau(\sigma) = (1)^{l(l+1)/2} Th^{-1}(Ch_A(\sigma) \cup \text{Todd}(L \otimes F)).$$

Le point essentiel dans la démonstration est l'injectivité de $i: K_A^0(F) \rightarrow K_0 C_A^*(V, F)$ qui devient l'injectivité de $K_0 C_A(V) \rightarrow K_0 C_A^*(V, F)$, d'après l'isomorphisme de Thom et la définition du foncteur $K_A^*(\cdot)$. Par hypothèse, F est une spin^c -distribution. Alors on peut considérer l'opérateur de Dirac le long des feuilles

$$D^\pm: \Gamma^\infty(S^\pm \otimes A) \rightarrow \Gamma^\infty(S^\pm \otimes A),$$

$(D^+)^* = D^-$. On a donc un élément

$$[D] = [D^+] \in KK_0(C_A(V), C_A^*(V, F)).$$

On doit donc construire un élément $[\Delta]$ de $KK_0(C_A^*(V, F), C_A(V))$ tel que

$$[D] \otimes_{C_A^*(V, F)} [\Delta] = 1_{C_A(V)}.$$

On prend $\Delta = \{(T_x, H_x^+, H_x^-)\}_{x \in V}$ où

$$H_x^+ := L^2(r^{-1}(x), S_x^+ \otimes A_x)$$

$$H_x^- := L^2(r^{-1}(x), S_x^- \otimes A_x)$$

l'opérateur T_x opère par la même formule que dans le cas scalaire de P. Baum—A. Connes [1, §4]. \square

3. PROBLÈME DE LA COURBURE SCALAIRE POSITIVE

Nous considérons maintenant des champs continus de A -modules sur V , plats au sens qu'ils sont les images inverses d'un tel champ sur BG , où $\lambda: V \rightarrow BG$ est l'application classifiante.

THÉOREME : Soient (V, F) une variété compacte feuilletée par une Spin^c -distribution F , $A = (\{A_x\}_{x \in V}, \Gamma_A)$ un champ continu de C^* -algèbres avec unité, E un champ continu de A -modules hilbertiens plat. Supposons que les feuilles soient compactes et qu'elles aient des métriques Riemanniennes à courbure scalaire non-négative, strictement positive en un point au moins, faisant ensemble une fonction continue sur la variété V . Alors

$$\langle L(M) \cup \text{Ch}_A E, [M] \rangle = 0 \text{ dans } K_A(pt) \otimes Q.$$

Preuve: Il faut seulement introduire dans la démonstration du Théorème 1.1 de J. Rosenberg [6] les modifications suivantes.

On peut aussi supposer que la courbure k_x est strictement positive sur la feuille L_x , pour tout x de V . On considère l'opérateur de Dirac comme dans

le paragraphe précédent : $D^\pm = \{D_x^\pm\}_{x \in V}$

$$D_x^\pm : \Gamma^\infty(S^\pm \otimes E_x) \longrightarrow \Gamma^\infty(S^\pm \otimes E_x),$$

$(D^+)^* = D^-$ et on a

$$\text{Th}^{-1}(\text{Todd}(V) \cup \text{Ch}_A(D^+)) = L(V) \cup \text{Ch}_A E,$$

Le reste de la démonstration est exactement analogue à celle du Théorème 1.1 de J. Rosenberg [6, § 1]. \square

Remarques : Pour terminer nous voulons indiquer quelques possibilités de développements.

1) On peut considérer aussi la modification des autres résultats dans J. Rosenberg [6] dans le contexte des Champs continus de C^* -algèbres.

2) On peut considérer les complexes de De Rham-Sullivan de V à coefficients dans le complexe $\Omega_*^\lambda(A)$ de A. Connes. Alors la construction des §§ 1-4 de Karoubi [4] nous donne le caractère de Chern Ch_A à coefficients dans l'homologie cyclique de Connes. D'autre part, on peut obtenir aussi les classes de Pontrjagin dans $H^p(V; H_q^\lambda(A)) \otimes Q = H^p(V; Q) \otimes H_q^\lambda(A)$, le produit tensoriel de la cohomologie rationnelle et de l'homologie cyclique de Connes. D'après l'existence du cup-produit dans l'homologie cyclique de Connes on peut définir aussi les hautes signatures

$$\langle L_A(V) \cup \text{Ch}_A(E), [V] \rangle$$

La conjecture de Novikov et le problème de la courbure scalaire positive se posent encore dans cette nouvelle situation.

Received January 14, 1984

REFERENCES

- [1] P. Baum and A. Connes, *Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes*, preprint, Sept, 1983.
- [2] P. Baum and A. Connes, Geometric K-theory for Lie groups and foliations, Proceedings of 1983 U.S. — Japan Seminar «Geometric methods in Operator algebras».
- [3] T. Fack, *K-théorie bivariante de Kasparov*, Séminaire N. Bourbaki, Exposé 605, Février 1983.
- [4] M. Karoubi, *Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique* Canadian Math. Soc. Conf. Proceed., vol. 2. part 1, 1982, 19—27.
- [5] A. S. Misceko and Ju. P. Solov'ev, *On infinite-dimensional representations of fundamental groups and formulas of Hirzebruch type*, Soviet Math. Dokl., vol. 18 (1977), № 3, 767-771.
- [6] J. Rosenberg, *C*-algebras, positive scalar curvature, and the Novikov conjecture* Appendix to «Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds», by M. Gromov and H.B. Lawson, Jr..
- [7] Đ.N. Diep, *C*-complexes de Fredholm I.*, Preprint, Aout 1983 IHES/M/83/53 Acta Math Vietnam., t. 9, № 1, 1984.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, P. O. BOX 630, BÒ HO, 10000 HANOI, VIETNAM.