ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 9 No 2 (1984)

C^*–COMPLEXES DE FREDHOLM. II.

DO NGOC DIEP

0. INTRODUCTION

Nous voudrions expliquer les raisons pour lesquelles nous proposons ici une « C^*-champisation » des résultats de A. Connes et P. Baum [1], d'une part, et une « feuilletagisation » d'un résultat de J. Rosenberg [6], d'autre part.

La deuxième raison est très simple ; il suffit de reprendre l'argumentation de A. Connes et P. Baum expliquant le passage du théorème de Novikov à la conjecture de Novikov. Nous sommes dans la même situation dans le contexte de champs continus de C^*-algèbres, triviaux le long des feuilles.

Miscenko et Solov'ev [5] ont bien expliqué l'utilité et les aspects spécifiques des formules de type de Hirzebruch. Dans la première partie [7], nous avons cautionné l'usage du processus de « C^*-champisation » des opérateurs pseudodifférentiels sur les feuilletages. Donc l'étude du problème de l'invariance homotopique des hautes signatures se présente de manière très naturelle dans la théorie de champs continus de C^*-algèbres sur des feuilletages. Il s'agit du rôle essentiel des représentations de dimension infinie de C^*-algèbres, clairement expliqué par Miscenko-Solov'ev-Fomenko [5] ; voir aussi Rosenberg [6].

L'auteur est très heureux d'avoir eu l'occasion de séjourner à l'IHES et tient à remercier sincèrement les Professeurs A. Connes et J. Rosenberg qui ont bien voulu lui faire part de leurs travaux [1], [2], [6], et le Professeur P. Cartier qui a toujours été prêt à l'aider lors de son séjour à Bures-sur-Yvette.

1. CARACTÈRE DE CHERN DANS LA K-THÉORIE DES C^*-ALGÈBRES

Tout d'abord, nous devons généraliser les notions de caractères de Chern, de genre de Todd, etc... dans notre théorie des champs continus de C^*-algèbres sur les feuilletages. Nous suivons la méthode de l'exposé de M. Karoubi [4], et Miscenko-Solov'ev [5].

Soient (V, F) une variété compacte feuilletée par une distribution intégrable $F \subset TV$, $A = (\{A_x\}_{x \in V}, \Gamma_A)$ un champ continu de C^*-algèbres, trivial sur les feuilles, F un champ continu de A-modules hilbertiens, dont les «fibres» E_x, $x \in V$, sont des A_x-modules projectifs de types fini et dont les restrictions à chaque feuille L du feuilletage (V, F) admettent une structure de fibré vectoriel de classe C^∞. Nous fixons un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de la variété feuilletée V tel que les restrictions $\{U_i \cap L\}_{i \in I}$ forment une trivialisation ouverte de $E|_L$, qui est supposé plat, voir Karoubi [4, §3]. Soient g_{ij} les fonctions de transition correspondantes. Alors pour chaque feuille L, $g_{ij}|_L$ est une fonction $U_i \cap U_j \cap L \to GL_n(A_L)$, où $A_L \simeq A_x$, $\forall x \in L$, lorsque le A_L-fibré $E|_L$ est à fibres $E_x \simeq A_L^n$, pour $x \in L$. Ici on peut suivre la méthode de Karoubi [4, §§1—4]. Mais nos C^*-algèbres A_x, en général, ne sont pas commutatives, donc on peut par exemple utiliser la théorie de l'homologie cyclique de A. Connes au lieu du §2 de Karoubi [4]. Nous préférons quant à nous suivre la construction de Miscenko-Solov'ev [5, §1] pour obtenir un accouplement $K^*(V) \times K_A^*(V') \to K_A^*(V \wedge V')$ et notre caractère de Chern désiré:

$$\mathrm{ch}_A : K_A^*(V) \to H^*(V; Q) \otimes K_*(A).$$

$$\begin{tikzcd}
K^*(V) \otimes K_A^*(V') \arrow[r] \arrow[d, "\otimes Q \otimes Id"'] & K_A^*(V \wedge V') \arrow[dl, "\mathrm{ch}_A"] \\
H^*(V, Q) \otimes K_A^*(V') &
\end{tikzcd}$$

qui peut être précisé grâce à la formule de Künneth:

$$\mathrm{Ch}_A : K_A^o(V) \to H^{even}(V; Q) \otimes K_o(A) \oplus H^{odd}(V, Q) \otimes K_1(A).$$

Nous désignons par $\overline{H}_A^*(V; Q) = H^{even}(V; Q) \otimes K_o(A) \oplus H^{odd}(V; Q) \otimes K_1(A) = H^*(V; Q) \otimes K_*(A)$ le produit tensoriel de la cohomologie ordinaire et de la K-théorie algébrique comme groupe de coefficients. Alors pour cette théorie on a aussi l'isomorphisme de Thom

$$H_A^*(V, Q) \xrightarrow{\sim} H_{A, cpt}^*(F; Q).$$

Les classes de Todd, de Hirzebruch,.. qni sont nécessaires pour nous dans les paragraphes suivants, sont les classes ordinaires.

Remarque: Ici nous avons les aspects spécifiques du caractère de Chern ch_A qui est évalué aussi dans les groupes $H^{odd}(V, Q) \otimes K_1(A)$, grâce à la formule de Künneth.

Nous considérons la cohomologie rationnelle $H^*_A(V;\ Q) := H^*(V; K^*_A(\mathrm{pt}) \otimes Q) = H^*(V;\ Q) \otimes K^*_A(\mathrm{pt})$ comme dans le paragraphe précédent (voir aussi Miščenko-Solov'ev [5, § 1], J. Rosenberg [6, § 1]).

Soient $f : (V', F') \longrightarrow (V, F)$ une équivalence homotopique de feuilletages, $p_i(V) \in H^{4i}(V,\ Q)$ les classes rationnelles de Pontrjagin (voir P. Baum, A. Connes [1, § 1]).

THÉORÈME DE NOVIKOV POUR DES FEUILLETAGES: *Soient V, V' des variétés compactes, feuilletées par les distributions intégrables $F \subset TV$ et $F' \subset TV'$ respectivement, $f : (V', F') \longrightarrow (V, F)$ une équivalence homotopique de feuilletages. Supposons que (V, F) ait des feuilles à courbure scalaire négative. Alors f conserve les classes rationnelles de Pontrjagin.*

Preuve: Voir *P.* Baum et *A.* Connes [1, §§ 3, 4]. □

Maintenant, nous considérons comme dans le paragraphe precédent, le champ continu de C^*-algèbres $A = (\{A_x\},\ \Gamma_A)$ trivial le long des feuilles, les groupes $K^*_A(V, F)$, la cohomologie $H^*_A(V;\ Q) = H^*(V,\ Q) \otimes K^*_A(\mathrm{pt})$ et le caractère de Chern

$$\mathrm{ch}_A:\ K^*_A(V, F) \longrightarrow H^*_A(V, Q)$$

CONJECTURE DE NOVIKOV POUR DES FEUILLETAGES:

Soient (V, F), (V', F') deux variétés compactes orientées feuilletées par les spin^c-distributions F et F', resp., $f : (V, F) \longrightarrow (V', F')$ un morphisme de feuilletages qui est une équivalence homotopique et qui conserve les orientations de feuilletages, $G = G(V, F) \simeq G(V', F')$ le groupoïde d'holonomie. BG l'espace classifiant de G, et $\lambda : V \longrightarrow BG$, $\lambda' : V' \longrightarrow BG$ les applications classifiantes correspondantes. Alors dans le groupe $H^*(BG;\ Q \otimes K^*_A(pt))$ on a

$$\lambda_*(L(TV) \cap [V]) = \lambda_* f_*(L(TV') \cap [V']).$$

Preuve: En pratiqhe, les classes $L(TV)$ et $L(TV')$ prennet leurs valeurs dans les groues $H^*(V';\ Q)$. Donc. ici, il s'agit du théorème classque (voir P. Baum-A. Connes [1]. □

Soient Γ_q le groupoïde de Haefliger des germes d'homéomorphismes de $\mathbf{R}^q$,
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\lambda"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & BG \arrow[r] & B\Gamma_q \end{tikzcd}$$
l'application classifiante de Haefliger, qui est naturelle au sens du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[rr, bend left, "h'"] & BG' \arrow[r] \arrow[d] & B\Gamma q \arrow[d, "Id"] \\
V \arrow[r, "\lambda"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & BG \arrow[r] & B\Gamma q
\end{tikzcd}$$

où $q = n - l$, $n = \dim V = \dim V'$, $l = \dim F = \dim F'$.

C^* — CONJECTURE DE NOVIKOV (modifiée par P. Baum — A. Connes [1] pour des C^* — champs continus constants sur des feuilletages).

Supposons que $f : (V, F) \to (V', F')$ satisfasse toutes les hypothèses dans la conjecture de Novikov pour des feuilletages. Alors pour chaque élément $\alpha \in H^*_A\ (B\,\Gamma_q,\ Q) := H^*\ (B\,\Gamma_q;\ Q) \otimes K^*_A\ (pt)$, on a l'égalité

$$< h^*\alpha \cup L\ (TV),\ [V] > \; = \; < h'^*\alpha \cup L(TV'),\ [V'] >.$$

THÉORÈME : *La C^*—conjecture de Novikov est vraie lorsque (V, F) a des feuilles à courbure scalaire négatives.*

Nous voulons indiquer les points essentiels dans la démonstration des résultats précédants. Ils représentent une « C^*-champisation » des résultats classiques.

On doit considérer le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& K_0C^*_A\,(V', F') \arrow[r, "\widehat{f}"] & K_0C^*_A\,(V, F) & \\
& K^0_A(F') \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "Ch_A"] \arrow[ddl, "\tau"'] & K^0_A(F) \arrow[u, "i"'] \arrow[d, "Ch_A"] \arrow[ddr, "\tau"] & \\
& H^*_c(F'),\ Q\otimes K_A(pt) \arrow[r] & H^*_c(F,\ Q\otimes K_A(pt) & \\
H^*(V'\ Q\otimes K_A(pt) \arrow[ur, "Th"] \arrow[rrr, "f_*"'] & & & H^*(V,\ Q\otimes K_A(pt) \arrow[ul, "Th"']
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme $i: K^o_A(F) \to K_o\ C^*_A(V, F)$ associe à chaque symbole σ l'indice de l'opérateur déduit du A-symbole par l'intégrale oscillante :

$$i(\sigma) = \text{index } D_\sigma,\ \sigma \in K^o_A(E).$$

L'application $\tau : K^o_A(F) \to H^*(V ; Q \otimes K_A(pt))$ est donnée par la formule suivante

$$\tau(\sigma) = (1)^{l(l+1)/2}\ Th^{-1}(Ch_A(\sigma) \cup \text{Todd}(L \otimes F)).$$

Le point essentiel dans la démonstration est l'injectivité de i: $K^o_A(F) \to K_o\ C^*_A(V, F)$ qui devient l'injectivité de $K_o\,C_A(V) \to K_o\ C^*_A(V, F)$, d'après l'isomorphisme de Thom et la définition du foncteur $K^*_A(.)$. Par hypothèse, F est une spin^c-distribution. Alors on peut considérer l'opérateur de Dirac le long des feuilles

$$D^\pm : \Gamma^\infty(S^\pm \otimes A) \to \Gamma^\infty(S^\pm \otimes A),$$

$(D^+)^* = D^-$. On a donc un élément

$$[D] = [D^+] \in KK_o(C_A(V),\ C^*_A(V, F)).$$

On doit donc construire un élément $[\Delta]$ de $KK_o(C^*_A(V, F),\ C_A(V))$ tel que

$$[D] \underset{C^*_A(V, F)}{\otimes} [\Delta] = 1_{C_A(V)}.$$

On prend $\Delta = \{(T_x, H^+_x, H^-_x)\}_{x \in V}$ où

$$H^+_x := L^2(r^{-1}(x),\ S^+_x \otimes A_x)$$

$$H^-_x := L^2(r^{-1}(x),\ S^-_x \otimes A_x)$$

l'opérateur T_x opère par la même formule que dans le cas scalaire de P. Baum—A. Connes [1, §4]. ⊠

3. PROBLÈME DE LA COURBURE SCALAIRE POSITIVE

Nous considérons maintenant des champs continus de A-modules sur V, plats au sens qu'ils sont les images inverses d'un tel champ sur BG, où $\lambda : V \to BG$ est l'application classifiante.

THÉORÈME : *Soient (V, F) une variété compacte feuilletée par une $Spin^c$-distribution F, $A = (\{A_x\}_{x \in V}, \Gamma_A)$ un champ continu de C^*-algèbres avec unité, E un champ continu de A-modules hilbertiens plat. Supposons que les feuilles soient compactes et qu'elles aient des métriques Riemanniennes à courbure scalaire non-négative, strictement positive en un point au moins, faisant ensemble une fonction continue sur la variété V. Alors*

$$\langle L(M) \cup Ch_A E, [M] \rangle = 0 \text{ dans } K_A(pt) \otimes Q.$$

Preuve: Il faut seulement introduire dans la démonstration du Théorème 1. 1. de J. Rosenberg [6] les modifications suivantes.

On peut aussi supposer que la courbure k_x est strictement positive sur la feuille L_x, pour tout x de V. On considère l'opérateur de Dirac comme dans le paragraphe précédent : $D^{\pm} = \{D_x^{\pm}\}_{x \in V}$

$$D_x^{\pm} : \Gamma^{\infty}(S^{\pm} \otimes E_x), \longrightarrow \Gamma^{\infty}(S^{\pm} \otimes E_x),$$

$(D^+)^* = D^-$ et on a

$$\mathrm{Th}^{-1}(\mathrm{Todd}(V) \cup \mathrm{Ch}_A(D^+)) = L(V) \cup \mathrm{Ch}_A E,$$

Le reste de la démonstration est exactement analogue à celle du Théorème 1.1 de J. Rosenberg [6, § 1]. □

Remarques: Pour terminer nous voulons indiquer quelques possibilités de développements.

1) On peut considérer aussi la modification des autres résultats dans J. Rosenberg [6] dans le contexte des Champs continus de C^*-algèbres.

2) On peut considérer les complexes de De Rham-Sullivan de V à coefficients dans le complexe $\Omega_*^{\lambda}(A)$ de A. Connes. Alors la construction des § §1 — 4 de Karoubi [4] nous donne le caractère de Chern Ch_A à coefficients dans l'homologie cyclique de Connes. D'autre part, on peut obtenir aussi les classes de Pontrjagin dans $H^p(V ; H_q^{\lambda}(A)) \otimes Q = H^p(V ; Q) \otimes H_q^{\lambda}(A)$, le produit tensoriel de la cohomologie rationnelle et de l'homologie cyclique de Connes. D'après l'existence du cup-produit dans l'homologie cyclique de Connes on peut définir aussi les hautes signatures

$$< L_A(V) \cup Ch_A(E), [V] >$$

La conjecture de Novikov et le problème de la courbure scalaire positive se posent encore dans cette nouvelle situation.

Received January 14, 1984

REFERENCES

[1] P. Baum and A. Connes, *Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes*, preprint, Sept, 1983.

[2] P. Baum and A. Connes, Geometric K-theory for Lie groups and foliations, Proceedings of 1983 U.S. — Japan Seminar «Geometric methods in Operator algebras».

[3] T. Fack, *K-théorie bivariante de Kasparov*, Séminaire N. Bourbaki, Exposé 605, Février 1983.

[4] M. Karoubi, *Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique* Canadian Math. Soc. Conf. Proceed., vol. 2. part 1, 1982, 19—27.

[5] A. S, Misceko and Ju. P. Solov'ev, *On infinite-dimensional representations of fundamental groups and formulas of Hirzebruch type*, Soviet Math. Dokl., vol. 18 (1977), № 3, 767-771.

[6] J. Rosenberg, *C^*-algebras, positive scalar curvapture, and the Novikov coonjecture* Appendix to «Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds», by M. Gromov and H.B. Lawson, Jr..

[7] Đ.N. Diep, *C^*-complexes de Fredholm* I., Preprint, Aout 1983 IHES/M/83/53 Acta Math Vietnam., *t. 9*, № 1, 1984.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, P. O. BOX 630, BO HO, 10000 HANOI, VIETNAM.