ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Vol. 9 No. 1 (1984)

C* – COMPLEXES DE FREDHOLM I

DO NGOC ZIEP

Institut de Mathematiques

Hanoi

0. POURQUOI ENCORE UNE GÉNÉRALISATION.

Le problème d'étudier les indices d'opérateurs elliptiques a été posé par I.M. Gelfand, voir par exemple [10]. Il a proposé à comparer les indices analytique et topologique d'opérateurs elliptiques. Le problème est partiellement résolu par M.S. Agranovič, A.D. Dynin, R.T. Seely, A.T. Vol'pert dans plusieurs cas particuliers et il est complètement résolu par le théorème de l'indice de M.F. Atiyah et I.M. Singer [1] dans les cas généraux des familles d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques et des complexes de Fredholm, voir [4, 5]. M.F. Atiyah et I.M. Singer [2] ont calculé les indices d'opérateurs elliptiques en termes du genre de Todd et du caractère de Chern [1, 2], et puis pour les opérateurs particuliers, disons les opérateurs de Dirac de variétés compactes orientées, en termes du genre de Hirzebruch [3]. Ils ont ainsi obtenu une autre démonstration de l'invariance homotopique de la signature d'une variété compacte simplement connexe arbitraire. De même façon, après avoir construit pour chaque variété riémannienne compacte non simplement connexe un complexe de Fredholm et un complexe de Poincaré algébrique, A.S. Miščenko [13] a démontré la conjecture de S.P. Novikov sur l'invariance homotopique des hautes signatures dans les cas, où le complexe de Eilenberg-Mac Lane $K(\pi, 1)$ ést une variété compacte à une métrique riémannienne dont la courbure est non positive(*).

(*) Dernièrement, G.G. Kasparov [17] a prouvé l'invariance homotopique des hautes signatures pour sous-groupes discrets dans les groupes de Lie connexes.

Observée la mesure transverse reliée au cycle de Ruelle-Sullivan, A. Connes [6, 7] a proposé la formule analogue des indices pour les opérateurs pseudodifférentiels elliptiques le long des feuilles de feuilletages mesurés. Après la période de formation de la K-théorie homologique de Brown-Douglas-Fiimore-Kasparov, et puis au dernier temps la K-théorie bivariante de Kasparov [11], dont l'histoire du développement et des idées sont décrites, par exemple, dans la revue de J. Rosenberg [16], voir aussi l'exposé de T. Fack [9] au séminaire de N. Bourbaki, il est clair que les indices doivent être trouvés dans les groupes de la K-théorie bivariante citée. Le théorème général des indices d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques le long des feuilles d'un feuilletage est obtenu par A. Connes et G. Skandalis [8].

Appliquant la théorie des indices à la conjecture de Novikov, A.S. Mišcenko [12,13] a prouvé le rôle essentiel des représentations de dimension infinie des C^*— formes quadratiques sur la C^*— algèbre du groupe fondamental de la variété considérée. Dans un travail commun, A.S. Mišcenko et J.P. Solov'ev [15] ont obtenu une C^*— version de la formule de type de Hirzebruch. Ensuite, A.S. Mišcenko et A. T. Fomenko [14] ont montré le besoin de considérer les opérateurs pseudodifférentiels à coefficients dans une C^*-algèbre fixée et ils ont obtenu une C^*-version du théorème de l'indice de Atiyah-Singer.

Donc, en prenant le problème de reconstruction de Morse des feuilles non simplement connexes d'une variété feuilletée, nous avons une nécessité de continuer l'étude de Mišcenko et Fomenko [14] dans les directions de la théorie des indices de Atiyah-Singer-Hirzebruch-Mišcenko-Solov'ev-Fomenko-Connes-Skandalis pour les cas des complexes de Fredholm à coefficients dans un champ continu des C^*-algèbres. Nous obtenons comme un des corollaires le théorème de l'invariance homtopique des hautes signatures des feuilles (non simplement connexes) d'une variété feuilletée.

Remarquons que dans la théorie de A. Connes [6,7,8] les champs continus des espaces hilbertiens ont été considérés sur l'ensemble des revêtements d'holonomie des feuilles, autrement dit, sur « les feuilles » simplement connexes. En voulant retourner toutes les choses sur les feuilles mêmes, nous devons considérer la structure des C^*-modules des champs des espaces hilbertiens sur un champ continu des champs hilbertiens sur un champ continu des C^*-algèbres sur la variété qui est trivial sur les feuilles du feuilletage. La dernière condition nous permet de définir les dérivations le long des feuilles. Voici les causes auxquelles nous voulons proposer encore une généralisation, notamment formelle de la théorie de A. Connes.

Nous reviendrons aux détails des démonstrations des résultats exposés ici dans un autre papier. Pour le cas classique, les lecteurs peuvent consulter les travaux de A. Connes [7], [8], [6].

1. C^*-ALGÈBRE $C^*_A(V, F)$ DE A. CONNES.

Soient V une variété (compacte), (V, F) un feuilletage sur V, $\Omega = V/E$ l'ensemble des feuilles, G le groupoïde d'holonomie, $G_x := \{\gamma \in G;\ s(\gamma) := \gamma^{-1}{}_0\gamma = x\}$ le revêtement d'holonomie de la feuille qui contient x, $A = (\{A_x\}_{x \in V}, \Gamma_A)$ un champ continu de C^*-algèbres sur V.

DÉFINITION. *Nous disons que le champ continu de C^*-algèbres A est trivial sur les feuilles du feuilletage (V, F) si l'on fixe une famille des *-isomorphismes de C^*-algèbres $i_\gamma : A_{s(\gamma)} \xrightarrow{\cong} A_{r(\gamma)}$, pour tout $\gamma \in G$.*

Nous conservons les notations de A. Connes [7], en particulier nous désignons par $\Omega^{1/2} = \{\Omega^{1/2}_x\}_{x \in V}$ le fibré des semi-densités sur V, $\Gamma_c(G, \Omega^{1/2})$ l'ensemble des semi-densités sur G à support compact, $k := \dim F$. Nous posons, par définition,

$$\Omega(A)^{1/2}_x := \{\rho : \underset{\text{continue}}{\Lambda^k Fx \to A_x}\ ;\ \rho(\lambda v) = |\lambda|^{1/2}\rho(v),\ \forall \lambda \in C\}$$

Remarque. $\Omega(A)^{1/2}_x = \Omega^{1/2}_x \underset{C}{\otimes} A_x$.

Nous prenons $\Gamma_{\Omega(A)^{1/2}} := F(\Omega)^{1/2}) \otimes \Gamma_A$ comme l'espace des sections continues. Donc, nous avons un champ continu des C^*-algèbres sur V

$$\Omega(A)^{1/2} = (\{\Omega(A)^{1/2}_x\}_{x \in V}, \Gamma_{\Omega(A)^{1/2}}).$$

Nous définissons, pour chaque élément $\gamma \in G$; $\gamma : x \to y$,

$$\Omega(G, A)^{1/2}_\gamma := \Omega(A)^{1/2}_x \underset{C}{\otimes} \Omega^{1/2}_y \cong \Omega^{1/2}_x \underset{C}{\otimes} \Omega(A)^{1/2}_y \cong \Omega^{1/2} \underset{C}{\otimes} A_x$$

et

$$F_{\Omega(G,A)^{1/2}} := \Gamma(G, \Omega^{1/2}) \otimes \Gamma_A$$

Donc, nous avons un champ continu des C^*-algèbres sur G

$$\Omega(G, A)^{1/2} := (\{\Omega(G,)^{1/2}_\gamma\}_{\gamma \in G}, \Gamma_{\Omega(G,A)^{1/2}}).$$

Une fois la trivialisation du champ A est fixée, nous pouvons identifier les restrictions de sections sur des feuilles avec les fonctions sur des feuilles à valeurs dans C^*-algèbres, fixées pour chaque feuille. Donc nous avons l'ensemble des sections continues qui sont lisses sur des feuilles du champ $A = (\{A_x\}_{x \in V}, \Gamma_A)$, que nous désignons $\Gamma^\infty(A)$. Donc les sections continues qui sont lisses sur des feuilles du champ $\Omega(A)^{1/2}$ sont définies par

$$\Gamma^\infty(\Omega(A)^{1/2}) := \Gamma^\infty(\Omega^{1/2}) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \Gamma^\infty(A).$$

D'une façon analogue, nous définissons

$$\Gamma^\infty(\Omega(G, A)^{1/2}) := \Gamma^\infty(\Omega(G)^{1/2}) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \Gamma^\infty(A),$$

$$\Gamma^\infty_c(\Omega(G,A)^{1/2}) := \Gamma^\infty_c(\Omega(G)^{1/2}) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \Gamma^\infty_c(A),$$

où l'indice «c» signifie «à support compact».

Comme dans le cas scalaire considéré par A. Connes [7] l'involution dans $\Gamma^\infty_c(\Omega(G,A)^{1/2})$ est définie par $f^*(\gamma) := f(\gamma^{-1})^*$, où le signe $*$ à droite signifie l'involution dans la C^*-algèbre $\Omega(G, A)^{1/2}_\gamma$. Donc, avec le produit-convolution $\Gamma^\infty_c(\Omega(G,A)^{1/2})$ est une algèbre involutive.

Pour chaque feuille L du feuilletage (V, F) nous avons, par convolution, une $*$-représentation «régulière à gauche π_x de l'algèbre involutive $\Gamma^\infty_c(\Omega(G,A)^{1/2})$ dans l'espace $L^2(L, A_x)$ sur le revêtement d'holonomie $\widetilde{L} \cong G_x$ de L qui contient x. Comme le champ continu de C^*-algèbres A est trivial sur les feuilles, par l'hypothèse, nous avons l'équivalence naturelle des représentations π_x et π_y pour tout y qui est contenu dans la même feuille L de x.

DÉFINITION. *Le completé de l'algèbre involutive $\Gamma^\infty_c(\Omega(G,A)^{1/2}$ par rapport à la norme*

$$\|f\| := \sup_{x \in V} \|\pi_x(f)\|$$

est appelé C^*-algèbre de A. Connes et désigné par $C^*_A(V, F)$.

Remarque. Le cas où G n'est pas Hausdorff peut être modifié aussi comme dans A. Connes [7, §6].

Maintenant nous étudions des C^*-modules sur $C^*_A(V, F)$ et des morphismes entre eux.

Soit $H_A = \{H_{A_x}\}_{x\in V}$ un champ mesurable des A_x-modules hilbertiens. Supposons que pour chaque élément γ du groupoïde d'holonomie G on associe un isomorphisme unitaire de H_{A_x} sur H_{A_y}, où $x = s(\gamma)$, $y = r(\gamma)$: $\xi \in H_{A_y} \to \xi_0\gamma \in H_{A_x}$. Nous considérons les sections mesurables du champ mesurable $\Omega^{1/2} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} H_A := (\{\Omega_x^{1/2} \otimes H_{A_x}\}_{x\in V}, \Gamma)$. Donc pour deux 1/2-sections mesurables de H_A, nous avons une 1/2-densité (mesurable) sur G, (ξ, η), qui est définie par

$$(\xi\, \eta)\, (\gamma) := \langle \xi_{y\,0}\gamma,\ \eta_x\rangle, \text{ où } x = s(\gamma),\ y = r(\gamma)$$

et un opérateur $T(\xi) = (\xi, \cdot) \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{H}_A, \{L^2(G_x, A_x)\})_{x\in V}$ lorsque $\|\xi\|_\infty := \|T(\xi)\| < \infty$.

DÉFINITION. *Nous disons que l'on donne un champ continu des* A_x *- modules hilber-tiens* $H_A = \{H_{A_L}\}_{L\in V/F}$ *sur* V/F, *si on donne sur le champ mesurable de A-modules hilbertiens* $H_{\mathrm{A}} = \{H_x\}_{x\in V}$ *une représentation* $\xi \in H_{A_{r(\gamma)}} \to \xi_0\gamma \in H_{A_{s(\gamma)}}$ *du groupoïde d'holonomie, un espace linéaire* Γ *des 1/2-sections. telles que*

1°) Γ *admet un sous-ensemble total, dense en norme* $\|\cdot\|_\infty$.

2°) *Pour tout* $\xi, \eta \in \Gamma$, $(\xi, \eta) \in C^*_A(V, F)$.

3°) Γ *est fermé relativement* $\|\cdot\|_\infty$.

4°) *Pour tous* $f \in \Gamma^\infty_c(G, \Omega(A)^{1/2})$, $\xi \in \Gamma$, *on á* $\xi_* f \in \Gamma$.

THÉORÉME 1. *Il existe une bijection en ces champs continus hilbertiens* $H_A = \{H_{A_L}\}_{L\in V/F}$ *et les* C^**-modules sur* $C^*_A(V, F)$ *de type dénombrable.* □

Soient E_1, E_2 deux C^*-modules sur $C^*_A(V, F)$, H^1_A et H^2_A les champs continus des C^*-modules hilbertiens correspondants (sur V/F). Nous disons que la famille $T = \{Tx\}_{x\in V}$, $T_x \in \mathrm{Hom}_{A_x}(H^1_{A_x}, H^2_{A_x})$ est un *opérateur aléatoire* si $T_x(\xi^0\gamma) = (T_y\, \xi)\, {}^0\gamma$ pour tout $\xi \in G_{A_y}$, où $x = s(\gamma)$ et $y = r(\gamma)$, et $T\xi$, $T^*\xi$ sont des 1/2-sections pour toute 1/2-section ξ de H^1_A, H^2_A, respectivement. Nous le signons $T \in L_G(H^1_A, H^2_A)$.

Pour chaque paire des sections $\xi, \eta \in \Gamma(\Omega(A)^{1/2} \otimes H)$, $\theta(\xi, \eta) := T(\xi)^* T(\xi)$ définit un opérateur aléatoire continu et il admet une extension naturelle sur le C^*-module correspondant $\alpha \to \eta(\xi, \alpha)$, $\forall \alpha \in E$.

La clôture en norme des opérateurs de type $\theta(\xi, \eta)$ est un idéal $K_G(H_A) \subset L_G(H_A)$, et de plus $L_G H(A)$ est C^*-algèbre des multiplicateurs doubles de $K_G(H_A)$.

THÉORÈME 1. *Il existe un *-isomorphisme canonique entre les C^*-algèbres $K_G(H_A)$, $L_G(H_A)$ et les C^*-algèbres des endomorphismes compacts $K(E)$, C^*-algèbres des homomorphismes continus $L(E)$ du C^*-module E associé à H_A.*

2. C^*-CALCUL PSEUDODIFFÉRENTIEL ET L'INDICE ANALYTIQUE

Soient E_1, E_2 les champs continus des A-modules hilbertiens dont les « fibres » $E_{i,x}$ sont des C^*-modules projectifs de type fini sur A_x, $x \in V$ et dont les restrictions sur chaque feuille L du feuilletage (V, F) admet une structure de fibré vectoriel de classe C^∞, F^* le fibré dual de F, $\pi : E \to V$ la projection canonique et $\pi^*(E_i)$ les images réciproques des E_i, $i = 1, 2$. Nous définissons la classe des symboles $\mathrm{Symb}_A(V, F)$ comme l'espace des sections σ du champ continu $\mathrm{Hom}_A(\pi^*(E_1), \eta^*(E_2))$ qui satisfont les conditions

$$\| D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(y, x, \xi) \| \leqslant C_{\alpha, \beta, K}(1 + |\xi|)^{n - |\beta|}$$

pour tous (y, x, ξ) se changeant dans un compact K d'un système des coordonnées locales.

Soient $L^2(\widetilde{L}A)_L)$ L^2-espace sur le revêtement d'holonomie $\widetilde{L}$ de L, à valeurs dans la C^*-algèbre $A_L \cong A_x$, $\forall x \in L$. Cet espace est isomorphe à l'espace des L^2-sections du champ des C^*-algèbres $A_L := A|_L$ sur $\widetilde{L}$.

Nous supposons, comme toujours que toutes les feuilles du feuilletage sont les variétés riémanniens. Donc, on définit les opérateurs de Laplace Δ_L dans $L^2(\widetilde{L}, A_L)$ au sens des distributions, et l'espace de Sobolev

$$H^s(\widetilde{L}, A_L) := \{ f \in L^2(\widetilde{L}, A_L) ; (1 + \Delta_L)^{s/2} f \in L^2(\widetilde{L}, A_L) \}.$$

A.S. Miščenko et A.T. Fomenko [15] ont prouvé le théorème de type de l'inclusion de Sobolev :

$$H^s(\tilde{L}, A_L) \hookrightarrow H^1(\tilde{L}, A_L), \forall s' > s$$

et le théorème d'isomorphismes de C^*-modules hilbertiens :

$$H^s(\tilde{L}, A_L) \cong L_2(A_L), \quad \forall s \in \mathbf{R}$$

Par la méthode de l'intégrale oscillante, comme toujours on définit l'algèbre $\mathrm{OPD}_A(V, F)$ des opérateurs pseudodifférentiels le long des feuilles, à coefficients dans le champ continu de C^*-algèbres $A = (\{A_x\}_{x\in V}, \Gamma_A)$ dits C^**-opérateurs pseudodifférentiels.* Remarquons que $\{H^s(\tilde{L}, A_L)\}_{L\in V/F}$ et ses isomorphismes (de Miščenko-Fomenko) avec $l_2(A_L)$ nous donnent un champ continu hilbertien au sens du paragraphe précédent.

THÉORÈME 3. *Les C^*-opérateurs pseudo-différentiels font des opérateurs aléatoires dans ce champ hilbertien, et puis les C^*-opérateurs elliptiques font des quasi-isomorphismes (autrement dit, opérateurs aléatoires inversibles modules. compacts). Donc ils ont l'indice analytique $\mathrm{Ind}_a D \in K^*_A(V/F) := K_*(C^*_A(V, F))$.*

Enfin, les C^*-opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 font une suite exacte courte :

$$0 \to C^*_A(V, F) \to OPD^0_A(V,F) \xrightarrow{\sigma} Symb(F_1, Hom_A(\pi^*E_1, \pi^*E_2)) \to 0$$

où $F_1 = Sph\, F^*$ est le fibré en sphères du fibre F^*. □

COROLLAIRE. *Chaque opérateur elliptique définit, et il est défini par son indice analytique qui èst contenu dans le K-groupe algébrique $K_*(C^*_A(V, F))$.* □

3. CYCLES GÉOMÉTRIQUES ET L'INDICE TOPOLOGIQUE. THÉORÈME DE A. CONNES ET G. SKANDALIS.

Soient M une variété (compacte) lisse, f une application lisse K-orientée de M dans V/F, E un fibré vectoriel complexe sur M, dont les fibres sont les C^*-modules projectifs de type fini sur le champ continu de C^*-algèbres $f^*A := (\{f^*A_x : A_{f(x)}\}_{x\in M}, \Gamma_{f^*A})$, où $\Gamma_{f^*A} := \{s\circ f, s \in \Gamma_A\}$. Nous disons que (M, E, f) est un *cycle géométrique.*

Soit $C_A^*(X)$ la C^*-algèbre associée au champ continu de C^*-algèbres sur l'espace topologique X. Nous définissons $KK_{A,\,B}(X,\, Y) := KK(C_A(X),\, C_B(Y))$; en particulier $KK_A(M,\; V/F) := KK(C_A(M),\, C_A(V,\; F))$. Nous associons, comme dans le cas scalaire considéré par A. Connes et G. Skandalis [8] à chaque application lisse K-orientée $f : X \to Y$ un élément $f\,! \in KK(X,\, Y)$ qui peut être inclu dans $KK_A(X,\, Y)$ et nous obtenons par le produit de Kasparov

$$K_A^*(X) \times KK_A^*(X,\, Y) \to K_A^*(Y)$$

un élément $f\,![E]$ de $K_A^*(Y)$ pour chaque $[E] \in K_A^*(X)$. Donc, nous pouvons associer à chaque cycle géométrique $(M,\, E,\, f)$ un élément

$$\mu(M,\, E,\, f) = f\,!\,[E] \in K_A^*(V/F).$$

Nous avons sûrement aussi le théorème de *l'isomorphisme de Thom* $K_A^*(\mathrm{Sph}\, F) \cong K_A^*(N)$. (Ici nous supposons que $V \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ et N soit le fibré normal de F) et *le théorème de périodicité de Bott* $K_A^*(V/F) \cong K_A^*(V/F \times \mathbf{R}^n)$.

Il est clair que pour les opérateurs elliptiques le long des feuilles, à coefficients dans un champ continu A de C^*-algèbres, de degré 0, nous pouvons restreindre la considération aux opérateurs de Dirac de degré 0, $P = p_E$. Pour les derniers $\mathrm{Ind}_a(P) = [E] \underset{V}{\otimes} k_V\,!$, où $P_V = V \to V/F$ soit la projection canonique.

Utilisant aussi le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "e"] & V/F \times \mathbf{R}^n \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"] & \\ X \arrow[ur, "j"] \arrow[rrr, "f"'] & & & V/F \end{tikzcd}$$

avec $f\,! = j\,! \otimes_N e\,! \underset{\mathbf{R}^n}{\otimes} \beta^{-1}$, où β est l'élément dé Bott, nous avons

$$\mathrm{Ind}_a(P) = [E] \underset{V}{\otimes} j\,! \underset{N}{\otimes} e\,! \underset{\mathbf{R}^n}{\otimes} \beta^{-1}$$

$$= j!\,[E] \underset{N}{\otimes} e\,! \underset{\mathbf{R}^n}{\otimes} \beta^{-1}$$

D'autre part, si nous commençons par le symbole $\sigma(P)$, puis utilisons l'isomorphisme de Thom $K^*_A(\mathrm{Sph}\,F) \cong K^*_A(N)$ et l'isomorphisme de Bott $K^*(V/F) \cong K^*_A(V/F) \times \mathbf{R}^n$), et enfin si nous prenons le cup-produit avec l'élément $e! \in KK(N, V/F \times \mathbf{R}^n) : KK(N, (V \times \mathbf{R}^n) / (F \times \{0\})$ nous aurons l'*indice topologique*

$$\mathrm{Ind}_t : K^*_A(\mathrm{Sph}\,F) \xrightarrow{\sim} K^*_A(N) \to K^*_A(V/F \times \mathbf{R}^n) \xrightarrow{\sim} K^*_A(V/F)$$

$$\sigma(P) \mapsto \tilde{\sigma}(P) \longmapsto \mathrm{Ind}_t\, \tilde{\sigma}(P).$$

Remarquons que $\tilde{\sigma}(P) \in K^*_A(N)$ est justement le cup-produit de $[E] \in K^*_A(V)$ et $j! \in KK(V, N)$, pour les opérateurs de Dirac de degré 0, $P = P_E$. Donc, nous avons le théorème de l'indice (de A. Connes et G. Skandalis) généralisé.

THÉORÈME 4. *Soit (V, F) un feuilletage, $p \in OPD_A(V, F)$ un opérateur elliptique le long des feuilles. Supposons que $V \to \mathbf{R}^n$ soit une inclusion, $N_x := i_\star(F_\star)^\perp$ fibré normal de F. Donc, N est un ouvert transversal du feuilletage $(V \times \mathbf{R}^n, F \times \{0\})$ et nous avons l'égalité des indices analytique et topologique*

$$Ind_a(P) = Ind_t\, \tilde{\sigma}(P)$$

par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & K^*_A(V) \arrow[d, "j!"] \arrow[drr, "p_V!"] & & \\
OPD_A(V,F) \arrow[urrr] \arrow[r] & Symb_A(V/F) \arrow[r] & K^*_A(Sph\,F) \cong K^*_A(N) \arrow[rr, "e!"'] & & K^*_A(V/F \times \mathbf{R}^n) \cong K^*_A(V/F) &
\end{tikzcd}$$

Dans les parties suivantes nous discuterons les applications essentielles de la théorie aux problèmes de l'invariante homotopique des hautes signatures et de K-groupes de C^*-algèbres de groupes de Lie.

L'auteur est très heureux d'avoir eu l'occasion de séjourner à l' IHES et tient à remercier sincèrement professeur Alain Connes avec qui j'ai eu de nombreuses discussions concernant « K-théorie et C^*-algèbres » et professeur Pierre Cartier pour son soutien moral.

(Received January 14, 1984)

REFÉRENCES

[1] M.F. ATIYAH and I.M. SINGER, *The index of elliptic opérators on compact manifolds*, Bull. A.M.S.

[2] M.F. ATIYAH and I.M. SINGER, *The index of elliptic operators*. I, Ann. of Math., 87 (1968), 484 – 530.

[3] M.F. ATIYAH and I.M. SINGER, *The index of elliptic operators*, III, Ann. of Math., 87 (1968), 546 – 604.

[4] M.F. and I.M. SINGER, *The index of elliptic operators*. IV, Ann. of Math., 93 (1971), 119 – 138.

[5] M.F. ATIYAH and I.M. SINGER, *The index of elliptic operators*. V, Ann. of Math., 93 (1971), 139 – 149.

[6] A.CONNES, *Sur la théorie non-commutative de l'intégration, Algébres d'opérateurs* Lecture Notes in Math., N^0 725, Springer Verlag, 1979, pp. 19-143.

[7] A.CONNES. *A survey of foliations and operator algebras, Operator algebras and Applications*, Proc, Symp. Pure Math., AMS, 30 (1982), part I, pp. 521 – 628.

[8] A.CONNES and G. SKANDALIS, *The longitudinal index theorem for foliations*, Preprint IHES, 1982.

[9] T. FACK, *K-théorie bivariante dé Kasparov*, Séminaire N. Bourbaki, Exposé 605, Février 1983.

[10] I.M. GELFAND, *On elliptic équations*, Russian Math, Surveys, 15 (1960), N^0 3, 113.

[11] G.G. KASPAROV, *The operator K—functor and extensions of C^*-algebras*, Math. USSR Izy., 16 (1981), 513 – 572.

[12] A. S. MIŠČENKO, *Homotopy invariants of non simply connected manifolds*. I. Rational invariants, Math. USSR Izv., 4 (1970), 506 – 519.

[13] A. S. MIŠČENKO, *Infinite dimensional représentation of discrete groups and higher signatures*, Math, USSR Izv., 8 (1974), 85 – 111.

[14] A. S. MIŠČENKO and A. T. FOMENKO, *The index of elliptic operators over C^*-algebras*, Math. USSR Izv., 15, (1980), 87--112.

[15] A. S. MIŠČENKO and J. P. SOLOV'EV, *On infinite dimensional representations of fundamental groups and formulas of Hirvebruch type*, Soviet Math. Dokl., 18 (1977), 767 – 771.

[16] J. ROSENBERG, *Homological invariants of extensions of C^*-algebras*, Operator Algebras and Applications, Proc. Symp. Pure Math., AMS, 38 (1982), part I, 35.

[17] G.G. KASPAROV, *K-theory, group C^*-algebras and higher signatures (Conspectus)*, Parts I, II, Preprint, Chernogolovka, 1981.