ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Vol. 9 N$_0$1 (1984)

COHOMOLOGIES D'ALGÈBRES DE LIE SUR LE FIBRE TANGENT D'ORDRE 2

TONG VAN DUC

Institut Fourier

France

Soit M une variété différentiable connexe, paracompacte de dimension n. Soit T^2M son fibré tangent d'ordre 2: c'est l'ensemble des jets d'ordre 2 des applications différentiables de $\mathbf{R}$ dans M de source 0. Soient $\pi^2: T^2M \to M$, $\pi^2_1: T^2M \to TM$ et $\pi^1: TM \to M$ les projections canoniques. On a $\pi^2 = \pi^1 . \pi^2_1$. Un élément σ de T^2M s'écrit: $\sigma = j^2_0 f$ où f est une application différentiable de $\mathbf{R}$ dans M. Soit (U, x^i) une carte locale de M telle que $f(0) \in U$. Le jet σ est défini par:

$$x^i(\sigma) = x^i(f(0)),\ y^i(\sigma) = \frac{d(x^i . f)}{dt}(0),\ z^i(\sigma) = \frac{d^2(x^i . f)}{dt^2}(0).$$

Soit (U, x^i) une carte locale de M telle que $U \cap U' \neq \phi$. Sur $(\pi^2)^{-1}(U \cap U')$ les coordonnées $x^{i'}$, $y^{i'}$, $z^{i'}$ s'expriment en fonction de x^i, y^i, z^i suivant les formules;

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i),\quad y^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} y^i,\ z^{i'} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i\, \partial x^k} y^i y^k + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} z^j$$

Institut Fourier – B.P. 74-38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex

Laboratoire de Mathématiques Pures associé au CNRS – Tél. (76) 51-46-00

d'ou les matrices jacobiennes de changement de coordonnées:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i} y^j & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k \partial x^i} y^j y^k + \dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i} z^j & 2\dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i} y^j & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \end{pmatrix}$$

Soit L une algèbre de Lie réelle. La cohomologie de Chevalley de L est définie de la façon suivante: les 0-cochaînes sont des éléments de L; pour $p \geqslant 1$, les p-cochaînes C sont des applications p-linéaires alternées de L^p dans L; le cobord ∂C de C est donné par la formule:

$$\partial C(X_0, X_1, \ldots, X_p) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant p} (-1)^i [X_i, C(X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_p)] + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} C([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_p)$$

où $X_i \in L$, $0 \leqslant i \leqslant p$; les 1-cocycles sont des dérivations de L, i.e. des applications D de L dans L telles que

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)], \ \forall X, Y \in L;$$

les 1-cocycles exacts sont des dérivations intérieures, i.e. des endomorphismes de L de la forme $X \to [X,Y]$ où $Y \in L$.

Sauf mention contraire, (U, x^i) désignera une carte locale de M, (U_1, x^i, y^i) où $U_1 = (\pi^1)^{-1}(U)$, la carte locale de TM et (U_2, x^i, y^i, z^i) où $U_2 = (\pi^2)^{-1}(U)$, la carte locale de T^2M induites par la carte (U, x^i). Les indices $i, j, k \ldots$ varient de 1 à n.

Il existe sur la variété T^2M un tenseur F de type (1, 1) défini par:

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad F\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 2\frac{\partial}{\partial z^i}, \quad F\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0. \tag{1}$$

F est de rang $2n$ et vérifie $F^3 = 0$. De plus, quels que soient les champs de vecteurs X et Y sur T^2M,

$$N_F(X, Y) = [FX, FY] + F^2[X, Y] - F[FX, Y] - F[X, FY] = 0.$$

Dans ce qui suit, on adapte les techniques de J. Lehmann-Lejeune [3] à l'étude de quelques algèbres de Lie attachées à F.

Soit Ω un ouvert quelconque de $T^2 M$, on note $L_F(\Omega)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs X sur Ω tels que la dérivée de Lie $L_X F$ de F soit nulle ; on a donc, pour tout champ de vecteurs Y sur Ω :

$$(2) \qquad [X, FY] = F[X, Y].$$

LEMME 1. — *$X \in L_F(\Omega)$ si et seulement si quel que soit l'ouvert U_2 de $T^2 M$ tel que $\Omega \cap U_2 \neq \phi$, $X_{|\Omega \cap U_2}$ est somme sur $\Omega \cap U_2$ des champs de vecteurs des 3 types suivants :*

$$(5) \quad \begin{aligned} &\text{I)} \quad X^i(x^j)\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^k} y^j y^k + \frac{\partial x^i}{\partial x^j} z^j\right)\frac{\partial}{\partial z^i}, \\ &\text{II)} \quad Y^i(x^j)\frac{\partial}{\partial y^i} + 2\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial z^i} \\ &\text{III)} \quad Z^i(x^j)\frac{\partial}{\partial z^i} \end{aligned}$$

Preuve. Soit $X \in L_F(\Omega)$; dans $\Omega \cap U_2$, X a pour représentation locale

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + Z^i \frac{\partial}{\partial z^i}$$

Il résulte de (1) et de (2) que :

$$\frac{\partial X^i}{\partial y^j} = \frac{\partial X^i}{\partial z^j} = 0, \quad \frac{\partial Y^i}{\partial z^j} = 0, \quad \frac{\partial Z^i}{\partial y^j} = 2\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial Z^i}{\partial z^j} = \frac{\partial Y^i}{\partial y^j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j},$$

d'où la décomposition de X en somme des champs de vecteurs des 3 types cités.

Soient

$$L(\Omega) = L_F(\Omega) \cap \operatorname{Im} F,$$

$L_K(\Omega) = \{X \in L_F(\Omega)$ de type K sur $\Omega \cap U_2$, quel que soit l'ouvert U_2 de $T^2 M\}$, où $K = 1, 2, 3$.

Les $L_K(\Omega)$ sont bien définis et on a :

LEMME 2. — *$L(\Omega)$ est un idéal de $L_F(\Omega)$,*

$L(\Omega) = L_2(\Omega) \oplus L_3(\Omega)$,

$L_1(\Omega)$ est une sous-algèbre de Lie de $L_F(\Omega)$,

$[L_2(\Omega), L_3(\Omega)] = 0$,

$[L_3(\Omega), L_3(\Omega)] = 0$,

$L_F(\Omega) = L_1(\Omega) \oplus L_2(\Omega) \oplus L_3(\Omega)$,

$L_F(\Omega) \cap \operatorname{Ker} F_{|\Omega} = L_3(\Omega)$,

tout $X \in L_F(\Omega)$ se prolonge à $(\pi^2)^{-1}(\pi^2(\Omega))$.

Preuve — Soient $X \in L(\Omega)$ et $X' \in L_F(\Omega)$, on a :

$X = F(Z)$ où Z est un champ de vecteurs sur Ω,

$[X, FY] = F[X, Y]$ et $[X', FY] = F[X', Y]$ quel que soit le champ de vecteurs Y sur Ω; par suite $[X', X] = [X', FZ] = F[X', Z]$ et

$$\begin{aligned}[[X', X], FY] &= [X', [X, FY]] - [X, [X', FY]] \\ &= [X', F[X, Y]] - [X, F[X', Y]] \\ &= F[X', [X, Y]] - F[X, [X', Y]] = F[[X', X], Y]\end{aligned}$$

donc $[X', X] \in L(\Omega)$; les autres propriétés se déduisent facilement de (3).

On remarque les éléments de $L_K(T^2 M)$ $(K = 1, 2, 3)$ sont des relèvements de vecteurs sur M et que l'application $\chi(M) \to L_1(T^2 M)$ qui à

$$\widehat{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \to X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} y^j y^k + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} z^j\right)\frac{\partial}{\partial z^i}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

LEMME 3. — *Soit $X \in L_F(\Omega)$. Pour tout $\sigma \in \Omega$, le germe en σ de X est le germe en σ d'un élément $X' \in L_F(T^2 M)$.*

Preuve. — Soit $\sigma \in \Omega$ et soit U le domaine d'une carte locale de M tel que $\pi^2(\sigma) \in U$ et $U \subset \pi^2(\Omega)$. Il existe une fonction différentiable sur M à support dans U et telle que $f = 1$ dans un voisinage de $\pi^2(\sigma)$. Alors $F = f \cdot \pi^2$ est à support dans U_2 et $F = 1$ dans un voisinage de σ. Si $X \in L_1(\Omega)$, X a pour représentation locale dans U_α :

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} y^j y^k + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} z^j\right)\frac{\partial}{\partial z^i}.$$

Soit X' l'élément de $L_1(T^2 M)$ qui dans U^2 a pour représentation locale :

$$X' = (FX^i)\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial (FX^i)}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\frac{\partial^2 (FX^i)}{\partial x^j \partial x^k} y^j y^k + \frac{\partial (FX^i)}{\partial x^j} z^j\right)\frac{\partial}{\partial z^i}.$$

Alors X' coincide avec X dans un voisinage de σ. Les cas où $X \in L_2(\Omega)$ et $X \in L_3(\Omega)$ se traitent de la même façon.

THÉORÈME 1. — $L_1(T^2M) = [L_1(T^2M),\ L_1(T^2M)]$,

$$L_2(T^2M) = [L_1(T^2M),\ L_2(T^2M)],$$

$$L_3(T^2M) = [L_1(T^2M),\ L_3(T^2M)] = [L_2(T^2M),\ L_2(T^2M)],$$

$$L_F(T^2M) = [L_F(T^2M),\ L_F(T^2M)].$$

Preuve. — Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M par des domaines des cartes à adhérence compacte; d'après [2], il existe un recouvrement ouvert de M, localement fini, plus fin $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$ et une partition de I en une collection finie de sous-ensembles $I_\mu (\mu = 1,\ldots, r)$ tels que, pour tout μ, les ouverts U_λ où $\lambda \in I_\mu$ sont deux à deux disjoints.

Soit $(\theta_\lambda)_{\lambda \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$.

Soient $X \in L_1(T^2M)$ et $\widehat{X}_\lambda = \theta_\lambda \widehat{X}$ où $\widehat{X} = \pi^2_*(X)$; soit Φ_λ le support de $\widehat{X}_\lambda$; il existe une fonction différentiable h_λ sur M à support contenu dans U_λ et telle que $h_{\lambda|\Phi_\lambda} = 1$. Comme $U_\lambda \subset U_\alpha$ pour un certain $\alpha \in A$, on peut écrire :

$$\widehat{X}_\lambda = X^i_\lambda \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Soient $\widehat{T}_{\lambda,i}$ et $\widehat{V}_{\lambda,i}$ des champs de vecteurs sur M à support dans U_λ définis par:

$$\widehat{T}_{\lambda,i} = h_\lambda \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \widehat{V}_{\lambda,i} = \left(h_\lambda \int_0^{x_i} X^i_\lambda(x_1,\ldots,x_{i-1}, t, x_{i+1},\ldots, x_n)dt\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On a $\widehat{X}_\lambda = \sum_{i=1}^{n} [\widehat{T}_{\lambda,i}, \widehat{V}_{\lambda,i}]$ et puisque si λ et $\lambda' \in I_\mu$, $U_\lambda \cap U_{\lambda'} = \phi$.

On peut définir:

$$\widehat{X}_\mu = \sum_{\lambda \in I_\mu} \widehat{X}_\lambda,\quad \widehat{T}_{\mu,i} = \sum_{\lambda \in I_\mu} T_{\lambda,i},\quad \widehat{V}_{\mu,i} = \sum_{\lambda \in I_\mu} V_{\lambda,i}.$$

On a encore:

$$\widehat{X}_\mu = \sum_{i=1}^{n} [\widehat{T}_{\mu,i},\ \widehat{V}_{\mu,i}].$$

Comme $\widehat{X} = \sum_{\mu=1}^{r} \widehat{X}_\mu$, d'après la remarque faite ultérireuement il existe des champs de vecteurs $T_{\mu,i}$ et $V_{\mu,i}$ appartenant à $L_1(T^2M)$ et tels que $X = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} [T_{\mu,i}, V_{\mu,i}]$.

Si $Y \in L_2(T^2M)$, on pose $\widehat{Y}_\lambda = \theta_\lambda \widehat{Y}$ où $\widehat{Y} = \pi^2_*(Y)$ et on désigne par g_λ une fonction différentiable sur M ayant son support dans U_λ et telle que $g_{|\psi_\lambda} = 1$ où ψ_λ est le support de $\widehat{Y}_\lambda$. Soit $G_\lambda = g_\lambda \cdot \pi^2_i$.

Si $\widehat{Y}_\lambda = Y^i_\lambda \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ est la représentation locale de $\widehat{Y}_\lambda$ dans U_λ, on définit les éléments Y_λ, $V_{\lambda,i}$ de $L_2(T^2M)$ et $T_{\lambda,i}$ de $L_1(T^2M)$ par:

$$Y_\lambda = Y^i_\lambda(x^j) \frac{\partial}{\partial y^i} + 2 \frac{\partial Y^i_\lambda}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial z^i},$$

$$V_{\lambda,i} = \left(G_\lambda \int_0^{x^i} Y^i_\lambda(\ldots, t, \ldots)\, dt\right)\frac{\partial}{\partial y^i} + 2 \frac{\partial}{\partial x^i}\left(G_\lambda \int_0^{x^i} X^i_\lambda(\ldots, t, \ldots)\, dt\right) y^j \frac{\partial}{\partial z^i},$$

$$T_{\lambda,i} = G_\lambda \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial G_\lambda}{\partial x^j} y_j + \left(\frac{\partial^2 G_\lambda}{\partial x^j \partial x^k} y^j y^k + \frac{\partial G}{\partial x^j} z^j\right)\frac{\partial}{\partial z^i}.$$

Alors $Y_\lambda = \sum_{i=1}^{n} [T_{\lambda,i}, V_{\lambda,i}]$. En définissant comme plus haut:

$$Y_\mu = \sum_{\lambda \in I_\mu} Y_\lambda,\ T_{\mu,i} = \sum_{\lambda \in I_\mu} T_{\lambda,i},\ V_{\mu,i} = \sum_{\lambda \in I_\mu} V_{\lambda,i},$$

on obtient:

$$Y_\mu = \sum_{i=1}^{n} [T_{\mu,i}, V_{\mu,i}].$$

Comme $\pi_*\left(\sum_{\mu=1}^{r} Y_\mu\right) = \sum_{\lambda \in I} (\pi_* Y_\lambda) = \sum_{\lambda \in I} \widehat{Y}_\lambda = \pi_*(Y)$,

on a $Y = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} [T_{\mu,i}, V_{\mu,i}]$

Les autres égalités du théorème se démontrent de la même façon.

THÉORÈME 2. – *Soit $X \in L_F(T^2M)$ tel que son support soit contenu dans un ouvert Ω vérifiant $\Omega = (\pi^2)^{-1}(\pi^2(\Omega))$. Alors $X = \Sigma [T, V]$ (somme finie) où les T, V sont des éléments de $L_F(T^2M)$ à support dans Ω.*

Preuve. — Les notations sont celles du théorème 1, alors les images des supports de X_λ, Y_λ,... par π^2 sont contenues dans $U_\lambda \cap \Omega_1$ où $\Omega_1 = \pi^2(\Omega)$. On choisit h_λ, g_λ telles que leur support soit contenu dans $U_\lambda \cap \Omega_1$, alors $T_{\lambda,i}$, $V_{\lambda,i}$,... ont leur support dans $U_{2,\lambda} \cap \Omega$; puisque le recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in I}$ de M est localement fini, il en est de même du recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in I}$ de $T^2 M$; par suite
$\operatorname{Supp} T_{\mu,i} = \bigcup_{\lambda\in I_\mu} \operatorname{Supp} T_{\lambda,i} \subset \Omega$ de même $\operatorname{Supp} V_{\mu,i} = \Omega$.

LEMME 4. — *Soit U le domaine d'une carte locale de M ; soient $\sigma \in U_2$ et $X \in L_F\ (U_2)$ tel que $j^3 X(\sigma) = 0$. Alors il existe $T_1, \dots, T_p$, $V_1, \dots, V_p \in L_F(U_2)$ tels que :*

$$X = \sum_{\beta=1}^{p} [T_\beta\,,\ V_\beta] \quad \text{et} \quad j^1\, T_\beta\,(\sigma) = j^1\, V_\beta\,(\sigma) = 0.$$

Preuve. — Puisque X est somme des éléments de type I, II et III, il suffit de montrer le lemme lorsque X est l'un de ces 3 types. On choisit les coordonnées locales de telle sorte que $x^i(\sigma) = y^i(\sigma) = z^i(\sigma) = 0$.

$$1^0)\qquad X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\, y^j \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j\, \partial x^k}\, y^j\, y^k + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\, z^j\right) \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

On choisit T et $V \in L_1\ (U_2)$ de la façon suivante :

si $X^i = (x^i)^4\ F\ (x^1, \dots, x^n)$, alors $T^i = (x^i)^2$ et

$$V^i = (x^i)^2 \int_0^{x^i} F\ (x_1, \dots, x^{i-1}, t, x^{i+1}, x^n)\ dt\,;$$

si $X^i = (x^i)^3\, x^j F$ où $j \neq i$, alors $T^i = x^i\, x^j$, $V^i = x^i \int_0^{x^i} tF\ (\dots, t, \dots)\ dt\,;$

si $X^i = (x^i)^2\, x^j\, x^k F$ où $j \neq i$, $k \neq i$, alors $T^i = x^i\, x^j$, $V^i = x^i\, x^k \int_0^{x^i} F\ dt\,;$

si $X^i = x^i\, x^j x^k\, x^l\, F$ où $j \neq i$, $k \neq i$, $l \neq i$, alors $T^i = x^j\, x^k$, $V^i = x^l \int_0^{x^i} tF dt\,;$

si $X^i = x^j\, x^k\, x^l\, x^m\, F$ où $j \neq i$, $k \neq i$, $l \neq i$, $m \neq i$, alors $T^i = x^j\, x^k$,

$$V^i = x^l\, x^m \int_0^{x^i} F dt.$$

2°) $X = X^i \frac{\partial}{\partial y^i} + 2 \frac{\partial X^j}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial z^i}$. On choisit $T \in L_1(U_2)$ et $V \in L_2(U_2)$ de telle sorte que les composantes T^i et V^i de T et de V suivant $\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial}{\partial y^i}$ soient exactement comme dans le premier cas.

3°) $X = X^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ On choisit $T \in L_1(U_2)$ et $V \in L_3(U_2)$ comme dans les deux autres cas.

On étudie maintenant les dérivations de $L_F\ T^2(M)$.

PROPOSITION 1. — *Toute dérivation D de $L_F(T^2 M)$ est locale et pour tout $X \in L_F(T^2 M)$, Supp $D(X) \subset$ Supp X.*

Preuve. — Soit $X \in L_F(T^2 M)$ et soit ω un ouvert de $T^2 M$ tel que $X_{|\omega} = 0$. Soit $\Omega = (\pi^2)^{-1}(\pi^2(\omega))$, alors $X_{|\Omega} = 0$. Pour tout $\sigma \in \Omega$, il existe des ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 de $T^2 M$ tels que $\Omega_\alpha = (\pi^2)^{-1}(\pi^2(\Omega_\alpha))$, $\alpha = 1, 2$, Supp $X \subset \Omega_1$, $\sigma \in \Omega_2$; d'après le théorème 2, on a $X = \Sigma[T, V]$ où les champs T et V ont leurs supports contenus dans Ω_1. Comme $D(X) = \Sigma[D(T), V] + \Sigma[T, D(V)]$, on a $D(X)_{|\Omega_2} = 0$; par suite $D(X)_{|\Omega} = 0$.

Il existe sur $T^2 M$ deux champs de vecteurs canoniques C_1 et C_2 dont les représentations locales dans l'ouvert U_2 sont:

$$C_1 = y^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad C_2 = y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + 2z_i \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

En utilisant le lemme 1, on vérifie facilement la proposition suivante:

PROPOSITION 2. — *Les endomorphismes: $X \to [C_1, X]$ et $X \to [C_2, X]$ de $L_F(T^2 M)$ sont des dérivations qui ne sont pas intérieures. Par suite* dim $H^1(L_F(T^2 M)) \geqslant 2$.

D'autre part, il existe sur $T^2 M$ une structure presque-tangente définie par:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 0, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0$$

J est de rang n et $N_J = 0$.

Si Ω est un ouvert quelconque de $T^2 M$, on désignera par $\mathcal{L}_J(\Omega)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur Ω tels que $L_X J = 0$; on a donc pour tout champ Y sur Ω :

(4) $[X, JY] = J[X, Y]$.

LEMME 5. — *Un champ de vecteurs X sur Ω appartient à $\mathcal{L}_J(\Omega)$ si et seulement si quel que soit l'ouvert U_2 de T^2M tel que $\Omega \cap U_2 \neq \phi$, $X_{|\Omega \cap U_2}$ est somme sur $\Omega \cap U_2$ des 3 types suivants :*

$$\text{I)}\quad X^i(x)^j \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} z^i \frac{\partial}{\partial z^i}$$

$$\text{(5) II)}\quad Y^i(x^j, y^k)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\text{III)}\quad Z^i(x^j, y^k)\frac{\partial}{\partial z^i}.$$

Preuve — Soit X un champ de vecteurs sur Ω. Si dans U_2, X s'écrit :

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + Z^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

le fait que $X \in \mathcal{L}_J(\Omega)$ s'exprime par :

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \frac{\partial X^i}{\partial z^j} = 0, \quad \frac{\partial Y^i}{\partial z^i} = 0, \quad \frac{\partial Z^i}{\partial z^j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

d'où la décomposition de X en somme des champs de vecteurs de 3 types mentionnés.

Jusqu'à la fin, on suppose que la variété M est affine. Soient :

$\mathcal{L}(\Omega) = \mathcal{L}_J(\Omega) \cap \operatorname{Ker} J_{|\Omega}$,

$\mathcal{L}_K(\Omega) = \{X \in \mathcal{L}_J(\Omega)$ de type K sur $\Omega \cap U_2$ quel que soit l'ouvert $U_2\}$ où $K = 1, 2, 3$.

Les $\mathcal{L}_K(\Omega)$ sont bien définis et le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions données :

LEMME 6. — *$\mathcal{L}(\Omega)$ est un idéal de $\mathcal{L}_J(\Omega)$,*

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}_J(\Omega)$,

$\mathcal{L}_2(\Omega)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(\Omega)$,

$\mathcal{L}_3(\Omega)$ est un idéal de $\mathcal{L}_J(\Omega)$ et de $\mathcal{L}(\Omega)$,

$[\mathcal{L}_3(\Omega), \mathcal{L}_3(\Omega)] = 0$,

$\mathcal{L}(\Omega) = \mathcal{L}_2(\Omega) \oplus \mathcal{L}_3(\Omega)$, *tout* $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ *se prolonge à* $(\pi_1^2)^{-1}(\pi_1^2(\Omega))$,

tout $X \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ *se prolonge à* $(\pi^2)^{-1}(\pi^2(\Omega))$.

LEMME 7. — *Soit* $X \in \mathcal{L}_K(\Omega)$ $(K = 1, 2, 3)$. *Pour tout* $\sigma \in \Omega$, *le germe en* σ *de* X *est le germe en* σ *d'un élément* $X' \in \mathcal{L}_K(T^2 M)$.

Ce lemme se démontre exactement comme le lemme 3.

THÉORÈME 3.

$\mathcal{L}_1(T^2 M) = [\mathcal{L}_1(T^2 M), \mathcal{L}_1(T^2 M)]$, $\mathcal{L}_2(T^2 M) = [\mathcal{L}_2(T^2 M), \mathcal{L}_2(T^2 M)]$,
$\mathcal{L}_3(T^2 M) = [\mathcal{L}_2(T^2 M), \mathcal{L}_3(T^2 M)]$, $\mathcal{L}(T^2 M) = [\mathcal{L}(T^2 M), \mathcal{L}(T^2 M)]$,
$\mathcal{L}_J(T^2 M) = [\mathcal{L}_J(T^2 M), \mathcal{L}_J(T^2 M)]$.

Preuve — La première égalité se vérifie exactement comme dans le cas de $L_1(T^2 M)$. Soit $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$ le recouvrement ouvert de M utilisé dans la démonstration du théorème 1. Soit $(\theta_\lambda)_{\lambda \in I}$ la partition de l'unité subordonnée à $(U_\gamma)_{\lambda \in I}$ et $(\Theta_\lambda)_{\lambda \in I}$ la partition de l'unité associée sur $T^2 M$. Si $Y \in \mathcal{L}_2(T^2 M)$, soit $Y_\lambda = \Theta_\lambda Y$; $Y_\lambda \in \mathcal{L}_2(T^2 M)$ et son support est de la forme $(\pi^2)^{-1}(\Phi_\lambda)$ où Φ_λ est un fermé de M contenu dans U_λ. Soit h_λ une fonction différentiable sur M à support dans U_λ et telle que $h_{\lambda|\Phi_\lambda} = 1$ et soit $H_\lambda = h_\lambda \cdot \pi^2$

Si Y_λ a pour représentation locale $Y_\lambda = Y_\lambda^i(x^j, y^k)\dfrac{\partial}{\partial y^i}$ dans $U_{2,\lambda}$, soient:

$$T_{\lambda, i} = H_\lambda \frac{\partial}{\partial y^i}$$

et $$V_{\lambda, i} = \left(H_\lambda \int_0^{y_i} Y_\lambda^i(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^{i-1}, t, y^{i+1}, \ldots, y^n)\, dt\right)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Alors $T_{\lambda, i}$ et $V_{\lambda, i} \in \mathcal{L}_2(T^2 M)$ et on a $Y_\lambda = \sum_{i=1}^{n} [T_{\lambda, i}, V_{\lambda, i}]$.

En posant $T_{\mu, i} = \sum_{\lambda \in I_\mu} T_{\lambda, i}$ et $V_{\mu, i} = \sum_{\lambda \in I_\mu} V_{\lambda, i}$, on obtient

$X = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} [T_{\mu, i}, V_{\mu, i}]$. Si $Z \in \mathcal{L}_3(T^2 M)$ est tel que $Z_\lambda = \Theta_\lambda Z$ a pour représentation locale $Z_\lambda = Z_\lambda^i (x^i, y^k) \frac{\partial}{\partial z^i}$, on prendra :

$$T_{\lambda, i} = H_\lambda \frac{\partial}{\partial y^i} \text{ et } U_{\lambda, i} = \left(H_\lambda \int_0^i Z_\lambda^i \ (x^1, \ldots, x^n, \ldots \ t, \ldots) \ dt \right) \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

THÉORÈME 4.—*Soit* $X \in \mathcal{L}_K (T^2 M)$ $(K = 1, 2, 3)$ *tel que le support de* X *soit contenu dans un ouvert vérifiant* $\Omega = (\pi^2)^{-1} (\pi^2(\Omega))$. *Alors* $X = \Sigma [T, V]$ (somme finie) *où* T, V *sont des éléments de* $\mathcal{L}_K (T^2 M)$ *à support inclus dans* Ω.
Même démonstration que pour le théorème 2.

LEMME 7. — *Soit* U *le domaine d'une carte locale de* M. *Si* $\sigma \in U_2$ *et* $X \in \mathcal{L}_J(U_2)$ (*resp.* $\mathcal{L}(U_2)$) *tel que* $j^3 X(\sigma) = 0$, *alors il existe* $T_1, \ldots, T_p$, $V_1, \ldots, V_p \in \mathcal{L}_J(U_2)$ (*resp.* $\mathcal{L}(U_2)$) *tel que* $X = \sum_{\beta=1}^{p} [T_\beta, V_\beta]$ *et* $j^1 T_\beta(\sigma) = j^1 V_\beta(\sigma) = 0$.

Preuve. — On choisit des coordonnées locales sur U_2 telles que $x^i(\sigma) = $
$= y^i(\sigma) = z^i(\sigma) = 0$.

1) Si $X \in \mathcal{L}_1(T^2 M)$, on choisit T et $V \in \mathcal{L}_1(T^2 M)$ exactement dans la démonstration du lemme 4.

2) $X = X^i (x^i, y^k) \frac{\partial}{\partial y^i}$; on choisit $T = T^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, $V = V^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ comme suit :

• si $X^i = (y^i)^4 F(x^j, y^k)$,

on prend $T^i = (y^i)^2$, $V^i = (y^i)^2 \int_0^{y^i} F(x^j, y^1, \ldots, y^{i-1}, t, y^{i-1}, y^n) \, dt$.

• Si $X^i = (y^i)^3 u^k F$ où $u^k = x^k$ ou y^k et $k \neq i$,

$T^i = y^i u^k$, $V^i = y^i \int_0^{y^i} tF(., ., t, \ldots) \, dt$.

• Si $X^i = (y^i)^2 u^j u^k F$ où $j \neq i$, $k \neq i$,

$T^i = y^i u^j$, $V^i = y^i u^k \int_0^{y^i} F(\ldots, t, \ldots) \, dt$.

• Si $X^i = y^i u^j u^k u^l F$ où $j \neq i$, $k \neq i$, $l \neq i$,

$$T^i = u^j u^k, \quad V^i = u^l \int_0^{y^i} tF(\ldots, t, \ldots)dt.$$

• Si $X^i = u^j u^k u^l u^m F$ où $j \neq i$, $k \neq i$, $l \neq i$, $m \neq i$,

$$T^i = u^j u^k, \quad V^i = u^l u^m \int_0^{y^i} F(\ldots, t, \ldots)dt.$$

3) $X = X^i \frac{\partial}{\partial z^i}$, on prend $T = T^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, $V = V^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ comme suit

• Si $X^i = (y^i)^4 F$, $T^i = (y^i)^2$, $V^i = \int_0^{y^i} t^2 F(\ldots, t, \ldots)dt$.

• Si $X^i = (y^i)^3 u^j F$ où $j \neq i$,

$$T^i = (y^i)^2, \quad V^i = y^j \int_0^{y^i} tF(\ldots, t, \ldots)dt.$$

• Si $X^i = (y^i)^2 u^j u^k F$ où $X^i = y^i y^j u^k u^l$ ou $X^i = u^j u^k u^l u^m$,
on choisit T^i et V^i comme dans 2).

PROPOSITION 3. — *Toute dérivation D de $\mathcal{L}_J(T^2 M)$ laisse invariant $\mathcal{L}(T^2 M)$ et $D_{|\mathcal{L}(T^2 M)}$ est une dérivation de $\mathcal{L}(T^2 M)$.*

Preuve. — D'après le théorème 3, tout $X \in \mathcal{L}(T^2 M)$ est de la forme $X = \Sigma[T, V]$ (somme finie) où $T, V \in \mathcal{L}(T^2 M)$; par suite $D(X) = \Sigma([D(T), V] + [T, D(V)]) \in \mathcal{L}(T^2 M)$ puisque $\mathcal{L}(T^2 M)$ est un idéal de $\mathcal{L}_J(T^2 M)$.

PROPOSITION 4. — *Toute dérivation D de $\mathcal{L}_J(T^2 M)$ est locale et Supp $D(X) \subset$ Supp X pour tout $X \in \mathcal{L}_J(T^2 M)$. Les dérivations de $\mathcal{L}(T^2 M)$ ont mêmes propriétés.*

Même démonstration que pour la proposition 1.

Le lemme suivant est une conséquence directe du lemme 7.

LEMME 8. — *Soit U le domaine d'une carte locale de M. Si $\sigma \in U_2$ et $X \in \mathcal{L}_J(U_2)$ (resp. $\mathcal{L}(U_2)$) tel que $j^3 X(\sigma) = 0$, alors pour toute dérivation D de $\mathcal{L}_J(U_2)$ (resp. $\mathcal{L}(U_2)$), on a $D(X)(\sigma) = 0$.*

U sera toujours le domaine d'une carte locale de M.

Soit $\Delta : \mathcal{L}(U_2) \to \mathcal{L}(U_2)$ définie par :

$$\Delta\left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial y^i}\right)\left(F^i \frac{\partial}{\partial z^i}\right)$$

où F^i sont des fonctions définies sur U_2 qui ne dépendent que des x^i.

D'autre part, soit $T = G^i_j z^j \frac{\partial}{\partial z^i}$ un champ de vecteurs sur U_2 où G^i_j sont des fonctions différentiables des x^i seulement. $T \notin \mathcal{L}_J(U_2)$ et on a :

LEMME 9. — *Δ et l'application $X \to [X, T]$ sont des dérivations de $\mathcal{L}(U_2)$ qui ne sont pas intérieures.*

THÉORÈME 4. — *Soit D une dérivation de $\mathcal{L}(U_\alpha)$; alors il existe $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{L}_J(U_2)$ de type 1, 2, 3, Δ et T tel que $\forall\ X \in \mathcal{L}(U_2)$,*

(6) $$D(X) = [X, Z_1 + Z_2 + Z_3] + \Delta(X) + [X, T].$$

Z_1 et Z_2, Δ, T sont déterminés de manière unique.

Z_3 n'est déterminé qu'à l'addition près de $H^i(x^j) \frac{\partial}{\partial z^i}$.

Preuve — Supposons qu'il existe $Z'_1, Z'_2, Z'_3, \Delta', T'$ qui vérifient encore (6). Si l'on pose :

$$Z_1 - Z'_1 = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^j} z^j \frac{\partial}{\partial z^j}$$

$$Z_2 - Z'_2 = B^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

$$Z_3 - Z'_3 = C^i \frac{\partial}{\partial z^i}$$

$$F''^i = F^i - F'^i, \quad G''^i = G^i - G'^i,$$

dans $[X, (Z_1 - Z'_1) + (Z_2 - Z'_2) + (Z_3 - Z'_3)] + (\Delta - \Delta')(X) + [X, T - T'] = 0$ en faisant $X = \frac{\partial}{\partial y^j}$, on obtient $\frac{\partial B^i}{\partial y^j} = \frac{\partial C^i}{\partial y^j} = 0$; de même pour

$X = y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, on trouve $B^i = F''^i = 0$; pour $X = x^i \frac{\partial}{\partial y^j}$, il vient

$A^i = 0$ et pour $X = \frac{\partial}{\partial z^i}$, $G^i_j = 0$

L'existence de Z_1, Z_2, Z_3, Δ, T découle des lemmes suivants.

LEMME 10. — *Il existe $Z \in \mathcal{L}(U_2)$ telle que la dérivation*

$X \to D_1(X) = D(X) - [X, Z]$ *de $\mathcal{L}(U_2)$ vérifie* $D_1\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$.

Preuve. — Si l'on pose $D\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = D^i_j \frac{\partial}{\partial z^i}$, de $D\left[\frac{\partial}{\partial y^j}, \frac{\partial}{\partial y^k}\right] = 0$

Il résulte que $\frac{\partial D^i_j}{\partial y^k} = \frac{\partial D^i_k}{\partial y^j}, \frac{\partial D'^i_j}{\partial y^k} = \frac{\partial D'^i_j}{\partial y^j}$. Donc il existe sur U_2 des fonctions différentiables $D^i(x^j, y^k)$ et $D'^i(x^j, y^k)$ telles que $\frac{\partial D^i}{\partial y^j} = D^i_j$ et $\frac{\partial D'^i}{\partial y^j} = D'^i_j$.

Il suffit de prendre $Z = D^i \frac{\partial}{\partial y^i} + D'^i \frac{\partial}{\partial z^i}$.

LEMME 11. — *Il existe $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}_J(U_2)$ de type 1, 2 et une dérivation Δ de $\mathcal{L}(U_2)$ telle que la dérivation $X \to D_2(X) = D_1(X) - [X, Z_1 + Z_2] - \Delta(X)$ de $\mathcal{L}(U_2)$ vérifie $D_2\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$, $D_2\left(x^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$, $D_2\left(y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$.*

Preuve. — Si l'on pose :

$$D_1\left(x^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = D^{i,k}_j \frac{\partial}{\partial y^k} + D'^{i,k}_j \frac{\partial}{\partial z^k}$$

$$D_1\left(y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \widetilde{D}^{i,k}_j \frac{\partial}{\partial z^k} + \widetilde{D}'^{i,k}_j \frac{\partial}{\partial z^k}$$

de $D_1\left[\frac{l}{\partial y^l}, x^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = D_1\left[\frac{\partial}{\partial y^l}, y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 0$, on déduit que les fonctions $D^{i,k}_j$, $D'^{i,k}_j$, $\widetilde{D}^{i,k}_j$, $\widetilde{D}'^{i,j}_k$ ne dépendent que des x^i.

De $D_1\left(\left[x^i \frac{\partial}{\partial y^j}, y^l \frac{\partial}{\partial j^m}\right]\right) = \delta^l_j D_1\left(x^i \frac{\partial}{\partial y^m}\right)$, on obtient :

$$D^{i,k}_j = 0 \text{ si } j \neq k, \quad D'^{i,k}_j = 0, \; D^{i,j}_j = D^{i,k}_k .$$

De $D_1\left(\left[y^i \frac{\partial}{\partial y^j}, y^l \frac{\partial}{\partial y^m}\right]\right) = \delta^l_j \left(D_1\left(y^j \frac{\partial}{\partial y^m}\right)\right) - \delta^i_m D_1\left(y^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$,

il vient :

$$\widetilde{D}^{i,k}_j = 0 \text{ si } j \neq k, \; \widetilde{D}^{i,j}_j = \widetilde{D}^{i,k}_k, \; D'^{i,k}_j = 0 \text{ si } i \neq j.$$

De $\widetilde{D}_1\left(\left[y^i \frac{\partial}{\partial y^j}, y^j \frac{\partial}{\partial y^i}\right]\right) = D_1\left(\left[y^i \frac{\partial}{\partial y^i} - y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\right)$, on obtient :

$$\widetilde{D}'^{i,k}_i = \widetilde{D}'^{j,k}_j .$$

Soient D^i, $\widetilde{D}^i$ et F^i les valeurs communes des $D_j^{i,j}$, $\widetilde{D}_j^{i,j}$, $\widetilde{D}_j^{,j,i}$, alors :

$$Z_1 = D^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial D^i}{\partial x^j} z^j \frac{\partial}{\partial z^i},$$

$$Z_2 = \widetilde{D}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \text{ et } \Delta\left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial y^i}\right)\left(F^i \frac{\partial}{\partial z^i}\right) \quad \text{conviennent.}$$

LEMME 12. *Il existe un champ de vecteurs T sur U_2 tel que la dérivation $X \to D_3(X) - [X,T]$ de $\mathcal{L}(U_2)$* vérifie

$$D_3\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = D_3\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0 \text{ et } D_3\left(x^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = D_3\left(y^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 0.$$

Preuve — Si l'on pose $D_2\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = D_i^k \frac{\partial}{\partial y^k} + D_i^{,k} \frac{\partial}{\partial z^k}$, de $D_2\left(\frac{\partial}{\partial y^j}, \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0$, on déduit que D_i^k et $D_i^{,k}$ ne dépendent que des x^i. À partir de $D_2\left[\frac{\partial}{\partial z^i}\right], y^i \frac{\partial}{\partial y^i} = 0$, on obtient $D_i^k = 0$. On prend alors $T = D_i^{,k} \frac{\partial}{\partial z^k}$.

LEMME 13. — *Pour tout $X \in \mathcal{L}(U_2)$ dont les composantes suivant $\frac{\partial}{\partial y^i}$ et $\frac{\partial}{\partial z^i}$ sont des polynômes en x^i et y^i de degré $\leqslant 3$, $D_3(X) = 0$.*

Preuve — u^i désignera soit x^i, soit y^i.

(1) Si l'on pose $D_3\left(u^i u^k \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = D_j^{ik,l} \frac{\partial}{\partial y^l} + D_j^{,ik,l} \frac{\partial}{\partial z^l}$, il résulte de $D_3\left[\frac{\partial}{\partial y^m}, u^i u^k \frac{\partial}{\partial y^i}\right] = 0$ que $D_j^{ik,l}$ et $D_j^{,ik,l}$ sont des fonctions des x^l;

de $\left[y^m \frac{\partial}{\partial y^m}, y^i y^k \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = y^i y^k \frac{\partial}{\partial y^j}$ on obtient $D_3\left(y^i y^k \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$,

de $\left[x^i \frac{\partial}{\partial y^j}, (y^k)^2 \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 2x^i y^k \frac{\partial}{\partial y^j}$ on obtient $D_3\left(x^i y^k \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$,

de $\left[x^i \frac{\partial}{\partial y^j}, x^k y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = x^i x^k \frac{\partial}{\partial y^j}$ on obtient $D_3\left(x^i x^k \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0.$

(2)

De $D_3\left(\left[\frac{\partial}{\partial y^m}, u^i u^k u^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) = 0$

on obtient $\left[\frac{\partial}{\partial y^m}, D_3 (u^i u^k u^l) \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 0.$

de $\left[y^m \frac{\partial}{\partial y^m}, y^i y^k y^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 2y^i y^k y^l \frac{\partial}{\partial y^j}$

on obtient $D_3\left(y^i y^k y^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0,$

de $\left[y^m \frac{\partial}{\partial y^m} x^i y^k y^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = x^i y^k y^l \frac{\partial}{\partial y^j}$

on obtient $D_3\left(x^i y^k y^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0,$

de $\left[x^i x^k \frac{\partial}{\partial y^l}, (y^l)^2 \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 2x^i x^k y^l \frac{\partial}{\partial y^j}$

on obtient $D_3\left(x^i x^k y^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0,$

de $\left[x^i x^k \frac{\partial}{\partial y^m}, x^l y^m \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = x^i x^k x^l \frac{\partial}{\partial y^j}$

on obtient $D_3\left(x^i x^k x^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0.$

(3)

De $D_3\left(\left[\frac{\partial}{\partial y^m}, u^i \frac{\partial}{\partial z^j}\right]\right) = 0$ on obtient $\left[\frac{\partial}{\partial y^m}, D_3\left(u^i \frac{\partial}{\partial z^j}\right)\right] = 0,$

de $\left[u^i \frac{\partial}{\partial y^m}, y^m \frac{\partial}{\partial z^j}\right] = u^i \frac{\partial}{\partial z^j}$ on obtient $D_3\left(u^i \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0,$

de $\left[u^i u^k \frac{\partial}{\partial y^m}, y^m \frac{\partial}{\partial z^i}\right] = u^i u^k \frac{\partial}{\partial z^i}$ on obtient $D_3\left(u^i u^k \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0,$

de $\left[u^i u^k u^l \frac{\partial}{\partial y^m}, y^m \frac{\partial}{\partial z^j}\right] = u^i u^k u^l \frac{\partial}{\partial z^j}$ on obtient $D_3\left(u^i u^k u^l \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0.$

Enfin, soit $X \in \mathcal{L}(U_2)$; quel que soit $\sigma \in U_2$, il existe $X' \in \mathcal{L}(U_2)$ dont les composantes sont des polynômes de degré $\leqslant 3$ et tel que $j^3(X - X')(\sigma) = 0$. Par suite $D_3(X - X')(\sigma) = 0$ (lemme 8) ; d'où $D_3(X)(\sigma) = 0$.

D'autre part, il existe sur $T^2 M$ un champ de vecteurs canonique C dont l'expression locale dans un ouvert U_α est $C = z^i \frac{\partial}{\partial z^i}$.

LEMME 14. *L'application: $X \to [X, C_{|U_2}]$ est une dérivation de $\mathcal{L}_J(U_2)$ qui n'est pas intérieure; par suite dim $H^1(\mathcal{L}_J(U_2)) \geqslant 1$.*

THÉORÈME 5. *Soit D une dérivation de $\mathcal{L}_J(U_2)$. Alors il existe une constante k et $Y \in \mathcal{L}_J(U_2)$ tel que $\forall\, X \in \mathcal{L}_J(U_2)$, $D(X) = [X, kC_{|U_2} + Y]$; k et Y sont uniques. dim $H^1(\mathcal{L}_J(U_2)) = 1$.*

Preuve. S'il existe k, k' et Y, Y' qui satisfont le théorème, alors $[X, (k - k')C_{|U_2} + (Y - Y')] = 0$. Comme

$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, C_{|U_2}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, C_{|U_2}\right] = 0$, les composantes de $Y - Y'$ sont constantes.

Puisque

$$\left[x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}, C_{|U_2}\right] = \left[x^i \frac{\partial}{\partial y^j}, C_{|U_2}\right] = \left[y^i \frac{\partial}{\partial y^j}, C_{|U_2}\right] = 0,$$

on a:

$$(Y - Y')(x^i) = (Y - Y')(y^i) = (Y - Y')(z^i) = 0;$$

par suite

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^j}, (k - k')C_{|U_2}\right] = 0$$

et

$$k = k'.$$

Comme $D_{|\mathcal{L}(U_2)}$ est uue dérivation de $\mathcal{L}(U_2)$, la dérivation D_1 du lemme 10 se prolonge à $\mathcal{L}_J(U_2)$ puisque $\mathcal{L}(U_2)$ est un idéal de $\mathcal{L}_J(U_2)$. La dérivation $X \to D'_2(X) = D_1(X) - [X, Z_1 + Z_2]$ de $\mathcal{L}_J(U_2)$ est telle que $D'_2\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$,

$$D'_2\left(x^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0,\ D'_2\left(y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0. \text{ Si } i \neq j \text{ et}$$

$$D'_2\left(y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = F^i \frac{\partial}{\partial y^i} \text{ où } F^i \text{ sont des fonctions des } x^i. \text{ Si l'on pose:}$$

$$D'_2\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^l \frac{\partial}{\partial x^l} + Y^l \frac{\partial}{\partial y^l} + \left(\frac{\partial X^l}{\partial x^k} z^k + Z^l\right) \frac{\partial}{\partial z^l}$$

de $\quad D'_2\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) = D'_2\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, x^k \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 0$

$$D'_2\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, y^k \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) = 0 = \left[D'_2\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), y^k \frac{\partial}{\partial y^j}\right] \quad \text{si} \quad k \neq j$$

$$= \left[D'_2\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, F^l \frac{\partial}{\partial z^l}\right] \text{ si } k = j.$$

on déduit que:

$$X^l = 0,\ Y^l = 0, \frac{\partial Z^l}{\partial y^j} = 0$$

et que F^i sont des constantes.

De $D'_2\left[x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 0 = \left[D'_2\left(x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}\right), \frac{\partial}{\partial y^j}\right]$

$$D'_2\left(\left[x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}, y^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) = 0 = \left[D'_2\left(x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}\right), y^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right]$$

si $l \neq j$,

$$= \left[D'_2\left(x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}\right), y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] + \left[x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}, F^m \frac{\partial}{\partial z^m}\right] \text{ si } l = j.$$

On déduit que les composantes de $D'_2\left(x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}\right)$ sur $\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial}{\partial y^i}$ sont nulles, celles sur $\frac{\partial}{\partial z^i}$ sont des fonctions des x^i et $F^i = 0$. Donc $D_2 = D'_2$. On en déduit:

$$D_2\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial z^l}\right]\right) = 0 = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, D'^k_l \frac{\partial}{\partial z^k}\right] \text{ (lemme 10).}$$

Donc les D'^k_l sont des constantes. De même:

$$D_2\left(\left[x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^k}\right]\right) = \left[x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}, D^l_k \frac{\partial}{\partial z^l}\right]$$

implique que $D'^i_i = D'^k_k$, $D'^l_i = 0$ si $l \neq i$. Le champ T du lemme 12 devient $T = KC_{|U_2}$ où $k = D'^i_i = D'^k_k = \dots$

En résumé, on a le

LEMME 15. — *La dérivation*: $X \to D_3(X) = D_2(X) - k[X, C_{|U_2}]$ *de* $\mathcal{L}_J(U_2)$ *est telle que* $D_3\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = D^j_i \frac{\partial}{\partial z^i}$, $D_3\left(x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}\right)^2 = D^{k,j}_i \frac{\partial}{\partial z^j}$ *où* D^j_i *et* $D^{k,j}_i$ *sont des fonctions de* x^i *et* $D_3(X) = 0$ *pour tout* $X \in \mathcal{L}(U_2)$ *dont les composantes sont des polynômes en* x^i *et* y^i *de degré* $\leqslant 3$.

Comme $\left[D_3\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^k}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, D_3\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right] = 0$, soit

$\frac{\partial D^j_k}{\partial x^i} = \frac{\partial D^j_i}{\partial x^k}$, il existe des fonctions $D^j(x^i)$ sur U_2 telles que $\frac{\partial D^j}{\partial x^i} = D^j_i$.

Soit $Z'_3 = D^j \frac{\partial}{\partial z^j}$. Alors $X \to D_4(X) = D_3(X) - [X, Z'_3]$ est une dérivation de $\mathcal{L}_J(U_2)$ telle que $D_4\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = D_4\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = D_4\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0$.

Si l'on pose :

$D_4\left(x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = \widehat{D}^{k,l}_i \frac{\partial}{\partial z^l}$ où $\widehat{D}^{k,l}_i$ sont des fonctions de x^i.

Comme $D_4\left(x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0$, les $\widehat{D}^{k,l}_i$ sont constantes.

De $D_4\left(\left[x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}, x^m \frac{\partial}{\partial x^k} + z^m \frac{\partial}{\partial z^k}\right]\right) = \delta^m_i \left(\widehat{D}^{k,l}_k \frac{\partial}{\partial z^l}\right) - \widehat{D}^{m,l}_i \frac{\partial}{\partial z^l}$ on déduit que $\widehat{D}^{m,l}_i = 0$ pour $l \neq i$, $\widehat{D}^{i,m}_i = 0$, $\widehat{D}^{m,i}_i = \widehat{D}^{m,k}_k$.

Soit $Z''_3 = \widehat{D}^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ où $\widehat{D}^i = \widehat{D}^{i,k}_k$, alors $X \to D_5(X) = D_4(X) - [X, Z''_3]$ est une dérivation de $\mathcal{L}_J(U_2)$ telle que $D_5\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0$, $D_5\left(x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + z^k \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0$ et $D_5(X) = 0$ $\forall X \in \mathcal{L}(U_2)$ dont les composantes sont des polynômes en x^i et y^i de degré $\leqslant 3$.

$$\text{De } D_5\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^l}, x^k x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + (x^j z^k + x^k z^j) \frac{\partial}{\partial z^i}\right]\right) = 0$$

$$D_5\left(\left[\frac{\partial}{\partial y^l}, x^k x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + (x^j z^k + x^k z^j) \frac{\partial}{\partial z^i}\right]\right) = 0$$

On déduit que toutes les composantes de $D_5\left(x^j x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + (x^k z^j + x^j z^k) \frac{\partial}{\partial z^i}\right)$ sont constantes.

$$\text{De } \left[x^l \frac{\partial}{\partial x^l} + z^l \frac{\partial}{\partial z^l}, x^k x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + (x^j z^k + x^k z^j) \frac{\partial}{\partial z^j}\right]$$

$$= x^k x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + (x^j z^k + x^k z^j) \frac{\partial}{\partial z^i},$$

on déduit que :

$$D_5\left(x^j x^k \frac{\partial}{\partial x^i} + (x^j z^k + x^k z^j)\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = 0.$$

Par suite :

$$D_5\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^l}, x^k x^j x^m \frac{\partial}{\partial x^i} + (z^k x^j x^m + x^k x^m z^j + x^k x^j z^m)\frac{\partial}{\partial z^i}\right]\right) = 0.$$

$$D_5\left(\left[\frac{\partial}{\partial y^i}, x^k x^j x^m \frac{\partial}{\partial x^i} + (z^k x^j x^m + x^k x^m z^j + x^k x^j z^m)\frac{\partial}{\partial z^i}\right]\right) = 0$$

ce qui implique toutes les composantes de

$$D_5\left(x^k x^j x^m \frac{\partial}{\partial x^i} + (z^k x^j x^m + x^k x^m z^j + x^k x^j z^m)\frac{\partial}{\partial z^i}\right)$$

sont constantes.

$$\text{De}\left[x^k \frac{\partial}{\partial x^l} + z^l \frac{\partial}{\partial z^l}, x^k x^j x^m \frac{\partial}{\partial x^i}\ (z^k x^j x^m + x^k x^m z^j + x^k x^j z^m)\frac{\partial}{\partial z^i}\right]$$

$$= 2\left(x^k x^j x^m \frac{\partial}{\partial x^i} + (z^k x^j x^m + x^k z^j x^m + x^k x^j z^m)\frac{\partial}{\partial z^j}\right),$$

on déduit que :

$$D_5\left(x^k x^j x^m \frac{\partial}{\partial x^i} + (z^k x^i x^m + x^k z^j x^m + x^k x^j z^m)\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0.$$

Ainsi $D_5(X) = 0\ \forall X \in \mathcal{L}_J(U_2)$, dont les composantes sont des polynômes en x^i en y^i de degré $\leqslant 3$.

Il en résulte que $D_5(X)(\sigma) = 0\ \ \forall \sigma \in U_2$. Si l'on désigne par Y la somme de tous les champs Z obtenus, on a :

$$D(X) = [X, kC_U + Y].$$

THÉORÈME 6 — $dim\ H^1(\mathcal{L}_J(T^2M)) = 1$.

Preuve. — Soit D une dérivation de $\mathcal{L}_J(T^2M)$. Soit $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$ un recouvrement ouvert de M par des domaines des cartes locales et soit $(U_{2,\lambda})_{\lambda \in I}$ le recouvrement correspondant de T^2M. Pour tout $\lambda \in I$ on a une dérivation $D_{U_{2,\lambda}}$ de $\mathcal{L}_J(U_{2,\lambda})$ définie de la façon suivante : $\forall X \in \mathcal{L}_J(U_{2,\lambda})$ et tout $\sigma \in U_{2,\lambda}$, $D_{U_{2,\lambda}}(\sigma) = D(X')(\sigma)$ où $X' \in \mathcal{L}_J(T^2M)$ qui coincide avec X dans un voisinage de σ ; $D_{U_{2,\lambda}}(X)(\sigma)$ ne dépend pas de X' d'après la proposition 4.

Par ailleurs, pour tout λ, it existe k_λ et Y_λ tel que $D_{U_{2,\lambda}}(X) = [X, k_\lambda C_{|U_{2,\lambda}} + Y_\lambda] \ \forall X \in \mathcal{L}_J(U_{2,\lambda})$. Comme les restrictions de $D_{U_{2,\lambda}}$ et $D_{U_{2,\lambda'}}$, à $U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ sont égales, il en est de même des restrictions de k_λ et k'_λ d'une part, et Y_λ et $Y_{\lambda'}$, d'autre part. Donc il existe k et $Y \in \mathcal{L}_J(T^2M)$ tel que $\forall \lambda \in I$, $k = k_\lambda$ et $Y_{|U_{2,\lambda}} = Y_\lambda$. Comme $D(X)_{|U_{2,\lambda}} = D_{U_{2,\lambda}}\left(X_{|U_{2,\lambda}}\right)$, on a :
$D(X) = [X, kC + Y] \ \forall X \in \mathcal{L}_J(T^2M)$.

Received January 16, 1984

REFERENCES

[1] TỐNG VĂN ĐỨC, *Structure presque-transverse*, J. Diff. Geom. 14 (1979), pp. 215–219.

[2] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE, *Connections, curvature and cohomology*, Vol. I, Academic Press.

[3] J. LEHMANN – LEJEUNE, *Cohomologie sur le fibré transverse à un feuilletage*; C.R.A.S., 259 (1982), pp. 495 – 498.

[4] F. TAKENS, *Derivations of vector fields*, Compos. Mathem. 26 (1973), pp. 151 – 158.

[5] K. YANO, S. ISHIHARA, *Differential Geometry of tangent bundles of order 2*, Kodai Math. Sem. Rep. 20 (1968), pp. 318 – 354.