ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 9 №1 (1984)

ПРЯМОЙ МЕТОД В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ОБЩИМИ ТИПАМИ ИНФОРМАЦИИ

ФАН ЗУЙ ХАЙ
Институт математики,
Ханой.

Теория дифференциальных игр — одно из интенсивно развивающихся направлений математики. Она тесно связана с такими областями математики, как теория оптимального управления, теория игр, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление. Проблемы дифференциальных игр имеют своим источником такие прикладные задачи, как задача о преследовании одного управляемого объекта другим, задача о приведении управляемого объекта в заданное состояние при неизвестных заранее возмущающих силах, задача об управлении объектом при неполной информации о его текущем фазовом состоянии. Предметом теории дифференциальных игр является изучение управления объектами, движения которых описываются дифференциальными уравнениями, в конфликтных ситуациях.

В последние годы после опубликования статьи [1] появился ряд работ, посвященных задачам преследования в линейных дифференциальных играх. Такие задачи представляют не только чисто математический интерес, но и нередко встречаются в приложениях. Примером задачи, приводящей к линейной дифференциальной игре преследования, является задача о преследовании одного управляемого объекта другим.

Решению задачи преследования посвящено много работ. Основополагающими здесь являются работы Л. С. Понтрягина [1 — 3]. В этих работах даются методы нахождения множества начальных точек игр, из которых можно закончить игру за конечное время. Развитию и обобщению результатов Л. С. Понтрягина по дифференциальным играм посвящены работы Н. Ю. Сатимова [4], Б. Н.

Пшеничного [5], М. С. Никольского [6], А. Я. Азимова [8], С. П. Берзана [7] и других авторов. В указанных работах приведены различные достаточные условия поимка из данного состояния фазового пространства.

Настоящая статья посвящена задачам преследования в линейных дифференциальных играх с общими типами информации. В отличие от работ [1 — 8], предположение об информации, используемое нами в данной работе, является достаточно общим. Такой вид информации включает в себе как частные случая полную и неполную информацию, а также информацию с запаздыванием. Приведены эффективные новые достаточные условия поимка линейных дифференциальных игр преследования. Полученные результаты являются существенными общими соответствующих теорем в [1], [2], [4], [7], [8]. В статье также рассматриваются некоторые конкретные задачи преследования линейных дифференциальных игр. Такие задачи интересны как с практической точки зрения, так и с точки зрения иллюстрации полученных теоретических результатов.

1. Пусть движение вектора $Z \in R^n$ описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{z} = Az - Bu + Cv; \; z(0) = z_0, \tag{1}$$

где A, B, C — соответственно матрицы с размерами $n \times n$, $p \times n$ и $q \times n$; u, v — управления преследователя и убегающего соответственно принадлежат R^p и R^q. Управления $u(t)$, $v(t)$ выбираются в классе измеримых векторных функций, удовлетворяющих ограничениям

$$u \in P; \; v \in Q, \tag{2}$$

где P и Q — компактные, выпуклые множества в R^p и R^q соответственно. В R^n задано некоторое терминальное множество M где $M = M_1 + M_2$, M_1 — подпространство пространства R^n, а $M_2 \subset L$, причем L — ортогональное дополнение к M_1 в R^n. Пусть $\dim L = \tau$, ь L возьмём некоторый базис, тогда оператору ортогонального проектирования из R^n на L соответствует некоторая матрица размера $n \times \tau$, которая обозначается через π.

Пусть $\theta(t)$ — данная неотрицательная, неубывающая и кусочно-непрерывная функция при $t \geqslant 0$, а $\tau(t)$ — данная неотрицательная, строговозрастающая и непрерывно — дифференцируемая функция и $\tau(t) \leqslant t$ при всех $t \geqslant 0$.

Введем в рассмотрение семейство множеств

$$\Omega(t) = \begin{cases} [\theta(t), \tau(t)], & \text{если } \theta(t) \leqslant \tau(t) \\ \phi, & \text{если } \theta(t) > \tau(t) \end{cases}$$

Будем говорить, что в игре (1) — (2) из начального состояния $Z_0 \notin M$ возможна поимка за время t_1, если по любой измеримой функции $v = v(t)$,

$0 \leqslant t \leqslant t_1$, $v(t) \in Q$ можно построить такую функцию $u = u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$; $u(t) \in P$, что решение $Z = Z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ уравнения

$$\dot{Z} = AZ - Bu(t) + Cv(t)\ ;\ Z(0) = Z_0$$

попадает на множество M при $t = t_1$, т. е $z(t_1) \in M$. При этом для нахождения значения $u(t)$ в каждый момент времени $t \in [0, t_1]$ разрешается использовать значения Z_0 и $v(s)$ для всех $S \in \Omega(t)$. Случай $\Omega(t_1) = \phi$ означает, что в момент t_1 преследователь ничего не знает об управлении убегающего объекта.

Введем в рассмотрение множества

$$\Delta_1(T) = \{t \in [0, T] : \Omega(t) \neq \phi\}\ ;\ \Delta_2(T) = [0, T] \setminus \Delta_1(T)\ ;$$

$$\Delta_3(T) = \bigcup_{t \in \Delta_1(T)} \Omega(t)\ ;\ \Delta_4(T) = [0,T] \setminus \Delta_3(T).$$

Из свойств функций $\theta(t)$, $\tau(t)$ следует, что $\Delta_i(T)$, $i = 1,\ldots, 4$ измеримые множества по лебегу.

Введем операцию геометрического вычитания множеств/см. [I]/

$$M \overset{*}{-} N = \{z : z + N \subset M\}.$$

ТЕОРЕМА I. *Пусть $T_1 > 0$ — число такое, что*

а) $M_2 \overset{*}{-} G(T_1) \neq \phi$, *где* $G(T_1) = \int\limits_{\Delta_4(T_1)} \pi\ exp\ (T_1 - t)\ A \,.\, CQ\, dt,$

б) Существует матрица кусочно-непрерывных функций $\Phi_{T_1}(t,s) = \left\{\varphi^{ij}_{T_1}(t,s)\right\}, i,j = \overline{1, \tau}$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T_1$, $0 \leqslant s \leqslant T_1$, *обладающая следующими свойствами*

I. $\Phi_{T_1}(t,s) = \widetilde{O}_\tau$ *если* $s \notin \Omega(t)$, *или* $t \in \Delta_2(T_1)$, *где* $\widetilde{O}_\tau$, *нулевая матрица порядка* τ,

2. При всех $t \in \Delta_1(T_1)$ *имеет место следующие соотношения*

а) $K(t) = \pi\ exp\ (T_1 - t)\ A.\ BP \overset{*}{-} F(t) \neq \phi$, *где*

$$F(t) = \dot{\tau}(t)\Big(E - \int\limits_0^{T_1} \Phi_{T_1}(s, \tau(t))\, ds\Big)\, \pi\ exp\ (T_1 - \tau(t))\ A.\ CQ\ \dot{+}$$

$$+ \int\limits_{\theta(t)}^{\tau(t)} \Phi_{T_1}(t, s)\ \pi\ exp\ (T_1 - s)\ A.CQ\, ds,$$

б) $\pi\ exp\ T_1 A.\ z_0 \in H(T_1) + (M_2 \overset{*}{-} G(T_1)) + K(T_1)$, *где*

$$H(T_1) = \int\limits_{t\in\Delta_2(T_1)} \pi\ exp\ (T_1 - t)\ A.\ BP\,dt\ ; \qquad K(T_1) = \int\limits_{t\in\Delta_1(T_1)} K(t)\,dt\ . \tag{3}$$

Тогда преследование в игре [1] — [2] из начального состояния $z_0 \notin M$ заканчивается за время T_1.

Доказательство. Из соотношения (3) следует, что существуют векторы $\omega_1(T_1) \in H(T_1)$; $\omega_2(T_1) \in M_2 \overset{*}{-} G(T_1)$; $\omega_3(T_1) \in K(T_1)$ такие, что

$$\pi\ \exp T_1 A\,.\,z_0 = \omega_1(T_1) + \omega_2(T_1) + \omega_3(T_1)\,. \tag{4}$$

А, из $\omega_1(T_1) \in H(T_1)$ вытекает, что существует измеримая функция $u^*(t)$, $t \in \Delta_2(T_1)$, такая, что

$$\omega_1(T_1) = \int\limits_{\Delta_2(T_1)} \pi\ exp\ (T_1 - t)\ A.\ Bu^*(t)\,dt. \tag{5}$$

Пусть $\bar{v}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant T_1$ — любое допустимое управление убегающего объекта, т.е. $\bar{v}(s) \in Q$ при всех $0 \leqslant s \leqslant T_1$. Из $\omega_2(T_1) \in M_2 \overset{*}{-} G(T_1)$ ясно, что существует вектор $m \in M_2$ такой, что

$$\omega_2(T_1) = m - \int\limits_{\Delta_4(T_1)} \pi\ \exp\ (T_1 - s)\ A.\ C\,\bar{v}(s)\,ds\ . \tag{6}$$

Из $\omega_3(T_1) \in K(T_1)$ и в силу теоремы Филиппова [13] отметим, что существует измеримая функция $\tilde{u}(t)$ на $\Delta_1(T_1)$ такая, что.

1. $\tilde{u}(s) \in P$ при всех $s \in \Delta_1(T_1)$,
2. $\omega_3(T_1) = \int\limits_{\Delta_1(T_1)} \omega(t)\,dt$, где при $t \in \Delta_1(T_1)$ имеет место следующее

$$\omega(t) = \pi\ \exp\ (T_1 - t)\ A.\ B\ \tilde{u}(t) - \Big\{\dot{\tau}(t)\Big(E - \int\limits_0^{T_1} \Phi_{T_1}(s, \dot{\tau}(t))\,ds\Big).$$

$$\pi\ exp\,(T_1 - \tau(t))\,A\,.\,C\,\bar{v}\,(\tau(t)) + \int\limits_{\theta(t)}^{\tau(t)} \Phi_{T_1}(t, s)\ \pi\ \exp\ (T_1 - s)\ A\,.\,C\,\bar{v}(s)\,ds\Big\}\,. \tag{7}$$

Видим в силу (3) — (7), что

$$\pi\ \exp\ T_1 A\,.\,Z_0 = m + \int\limits_{\Delta_2(T_1)} \pi\ \exp\ (T_1 - s)\ A\,.\,B\ u^*(s)\,ds - \int\limits_{\Delta_4(T_1)} \pi \exp\,(T_1 - s) A.\ C\bar{v}\,(s)ds +$$

$$+\int\limits_{\Delta_1(T_1)}\pi\exp(T_1-t)A.\,B\,\tilde{u}(t)\,dt-\int\limits_{\Delta_1(T_1)}\Big(\int\limits_{\theta(t)}^{\tau(t)}\Phi_{T_1}(t,s)\,\pi\exp(T_1-s)A.\,C\,\bar{v}(s)\,ds\Big)\,dt-$$

$$-\int\limits_{\Delta_1(T_1)}\dot{\tau}(t)\Big(E-\int\limits_0^{T_1}\Phi_{T_1}(s,\tau(t))\,ds\Big)\,\pi\exp(T_1-\tau(t))A.\,C\,\bar{v}(\tau(t))\,dt. \qquad (8)$$

Если определим управлении $\bar{u}(t)$, $0\leqslant t\leqslant T_1$ преследователя следующим образом:

$$\bar{u}(t)=\begin{cases}u^*(t), & \text{если } t\in\Delta_2(T_1),\\ \tilde{u}(t), & \text{если } t\in\Delta_1(T_1),\end{cases}$$

то

$$\pi\exp T_1A\,.\,Z_0=m+\int\limits_0^{T_1}\pi\exp(T_1-s)\,AB\bar{u}(s)ds-\int\limits_{\Delta_4(T_1)}\pi\exp(T_1-s)AC\bar{v}(s)\,ds-$$

$$-\int\limits_{\Delta_1(T_1)}\dot{\tau}(t)\Big(E-\int\limits_0^{T_1}\Phi_{T_1}(s,(\tau(t))ds\Big)\,\pi\exp(T_1-\tau(t))\,A\,.\,C\bar{v}\,(\tau(t)\,dt-$$

$$-\int\limits_{\Delta_1(T_1)}\Big(\int\limits_{\theta(t)}^{\tau(t)}\Phi_{T_1}(t,s)\,\pi\exp(T_1-s)\,A\,.\,C\bar{v}(s)ds\Big)\,dt. \qquad (9)$$

Следующее соотношение вытекает из свойств функций $\tau(t)$ и $\theta(t)$

$$\Delta_3(T_1)=\bigcup_{t\in\Delta_1(T_1)}\tau(t),$$

далее если положив $x=\tau(t)$, преобразуя третий интеграл в (9), получим

$$\int\limits_{\Delta_1(T_1)}\dot{\tau}(t)\Big(E-\int\limits_0^{T_1}\Phi_{T_1}(s,\tau(t))\,ds\Big)\pi\exp(T_1-\tau(t))\,A\,.\,C\bar{v}(\tau(t))\,dt=$$

$$=\int\limits_{\Delta_3(T_1)}\Big(E-\int\limits_0^{T_1}\Phi_{T_1}(s,x)\,ds\Big)\,\pi\exp(T_1-x)\,A\,.\,C\bar{v}(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\Delta_3(T_1)}\pi\exp(T_1-s)\,A.\,C\,\bar{v}(s)\,ds-\int\limits_{\Delta_3(T_1)}\Big(\int\limits_0^{T_1}\Phi_{T_1}(s,x)\,ds\Big)\pi\exp(T_1-x)\,A\,.\,C\bar{v}\,(x)dx. \qquad (10)$$

Объеденяя (9) и (10) мы находим что

$$\pi\exp\ T_1 A.z_0 = m + \int_0^{T_1} \pi\exp\ (T_1 - s)\ A\ .\ B\ \overline{u}(s)\, ds - \int_0^{T_1} \pi\exp\ (T_1 - s) A . C \overline{v}(s) ds +$$

$$+ \int_{\Delta_3(T_1)} \left(\int_0^{T_1} \Phi_{T_1}(s,\ t)\ ds \right) \pi\exp\ (T_1 - t)\ A\ .\ C\ \overline{v}\ (t)\ dt -$$

$$- \int_{\Delta_1(T_1)} \left(\int_{\theta(t)}^{\tau(t)} \Phi_{T_1}(t,s)\ \ \pi\exp\ (T_1 - s)\ A\ .\ C \overline{v}\ \ (s)\ \ ds \right) dt. \qquad (11)$$

Из предположения о матрице Φ_{T_1} (t,s) верно

$$\int_{\Delta_1(T_1)} \left(\int_{\theta(t)}^{r(t)} \Phi_{T_1}(t,s)\ \pi\exp\ (T_1 - s)\ A.C\ \overline{v}(s)\ ds \right) dt =$$

$$= \int_{\Delta_1(T_1)} \left(\int_0^{T_1} \Phi_{T_1}\ (t,s)\ \pi\exp\ (T_1 - s)\ A.C\ \overline{v}\ (s)\ ds \right) dt =$$

$$= \int_0^{T_1} \left(\int_0^{T_1} \Phi_{T_1}\ (t,\ s)\ \pi\exp\ (T_1 - s)\ A\ .\ C\ \overline{v}\ (s)\ ds \right) dt.$$

Отметим в сиду теоремы фубини (см [12]), что

$$\int_{\Delta_1(T_1)} \left(\int_{\theta(t)}^{\tau(t)} \Phi_{T_1}(t,s)\ \ \pi\exp\ (T_1 - s)\ A\ .\ C.\overline{v}\ (s)\ ds \right) dt. =$$

$$= \int_0^{T_1} \left(\int_0^{T_1} \Phi_{T_1}(t,\ s)\ \pi\exp\ (T_1 - s)\ A\ .\ C\ \overline{v}(s)\ dt \right) ds =$$

$$= \int_0^{T_1} \left(\int_0^{T_1} \Phi_{T_1}\ (t,\ s)\ dt \right) \pi\exp\ (T_1 - s)\ A\ .\ C\ \overline{v}\ (s)\ ds\ . \qquad (12)$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\int \Big(\int_0^{T_1} \Phi_{T_1}(s,\, t)\; ds \Big) \pi \exp\,(T_1 - t)\, A\,.\, C\bar{v}\,(t)\, dt =$$

$$\triangle_3(T_1)$$

$$= \int_0^{T_1} \Big(\int_0^{T_1} \Phi_{T_1}(s,\, t)\;\; ds \Big)\, \pi \exp\,(T_1 - t)\; A\,.\, C\;\; \bar{v}\;\; (t)\;\; dt. \tag{13}$$

Теперь учитывая (11), (12), (13), получим, что

$$\pi \exp T_1 \;\; A\,.\, z_0 = m + \int_0^{T_1} \pi \exp(T_1 \; - s)\; A\;.\; B\,\bar{u}\;\; (s)\; dt \; -$$

$$- \int_0^{T_1} \pi \exp\;(T_1 \;- s)\; A\,.\, C\,\bar{v}\;\, (s)\, ds. \tag{14}$$

А это означает, что $z\,(T_1\;) \in M$. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* M_2 — *выпуклое множество и* $T_1 > 0$ — *число такое, что*

а) $M_2 \overset{*}{-} G(T_1)$ *непусты,*

б) Существуют функция $\omega\,(t)$, $t \in \Delta_1\;(T_1)$, *суммируемая на*

$\Delta_1(T_1)$ *и матрица кусочно - непрерывных функций*

$$\psi_{T_1}(t,s) = \Big\{\; \varphi^{ij}_{T_1}\;\;(t,\, s) \Big\}_{ij\; =\; 1,..\; \tau}$$

на $[0,\;\; T_1] \times [0,\, T_1]$, *обладающие следующими свойствами;*

1. $$\int_{\Delta_1 T_1} \omega(t) dt = 1,$$

2. $\psi_{T_1}(t,s) = \widetilde{O}_\tau$ *если* $S \notin \Omega\;(t)$ *или* $t \in \Delta_2(T_1)$, *где*

$\widetilde{O}_\tau$ — *нулевая матрица порядка* τ,

3. *При всех* $t \in \Delta_1(T_1)$ *имеет место следующие*

а) $\overline{K}\,(t) = \Big\{ \omega(t) \Big(M_2 \;\overset{*}{-}\; G\;(T_1) \Big) + \pi exp\;(T_1 \,-\, t)\; A\,.\; BP \Big\} \overset{*}{-} F(t) + \phi,$

$$F(t) = \dot{\tau}(t)\left(E - \int_0^{T_1} \psi_{T_1}(S,\tau(t))ds\right)\pi exp(T_1 - \tau(t))A.CQ +$$

$$+ \int_{\theta(t)}^{\tau(t)} \psi_{T_1}(t,s)\pi exp\,(T_1 - s)A\,.\,CQds,$$

б) $\pi exp\ T_1 A.Z_0 \in H(T_1) + \overline{K}\ (T_1)$, *где* $H(T_1) = \int_{\Delta_2(T_1)} \pi exp(T_1 - t)A\,.\,BPdt,$

$$G(T_1) = \int_{\Delta_4(T_1)} \pi exp\,(T_1 - t)A\,.CQdt; \qquad \overline{K}(T_1 = \int_{\Delta_1(T_1)} \overline{K}(t)dt\,.$$

Тогда преследование в игре (1) – (2) из начального состояния $Z_0 \notin M$ *заканчивается за время* T_1.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $T_1 > 0$ *— число, такое, что,*

$$\pi exp\ T_1 A\,.\,Z_0 \in \int_0^{T_1} \pi exp(T_1 - s)A\,.\,BPds + (M_2 \overset{*}{-} \int_0^{T_1} \pi exp\ (T_1 - s)A.CQds).$$

Тогда догоняющий может завершить преследования в игре (1) (2) из начального состояния $z_0 \notin M$ *за время* T_1*, не зная совсем управления убегающего объекта.*

2. Как видно из предыдуших пунктов, предположение об информации, используемое нами, является достаточно общим. В этом пункте рассматриваются частные формы теорем 1-2, которые полезны для исследования конкретных дифференциальных игр преследования.

Сначала рассматривается преследование с полной информацией.

СЛЕДСТВИЕ 1. (*См.* [1]). *Пусть* $T_1 > 0$ *– числое такое, что*

а) $\pi\ exp\,(tA).\ BP \overset{*}{-} \pi\ exp\,(tA).\ CQ \neq \phi$ *при всех* $t \in [0,T_1]$,

б) $\pi\ exp\ T_1 A,\ z_0 \in M_2 + \int_0^{T_1} (\pi\,exp\,(tA).\ BP \overset{*}{-} \pi\,exp\,(tA)\ CQ)\ dt.$

Тогда игра (1) (2) из начального состояния $z_0 \notin M$ *заканчивается за время* T_1.

Замечание 1. В этом случае имеем
$\theta(t) \equiv \tau(t) \equiv \Omega(t) \equiv t$ при всех $t \geqslant 0$, $\Delta_1(T_1) = \Delta_3(T_1) = [0,T_1]$.

$\Delta_2(T_1) = \Delta_4(T_1) = \phi$; $\Phi_{T_1}(t,s) \equiv \widetilde{O}_r$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T_1$ $0 \leqslant s \leqslant T_1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. (см [4]). *Пусть M_2 — выпуклое множество и $T_1 > 0$ число такое, что*

а) Существует функция $\alpha(r)$, суммируемая на $[0,T_1]$, обладающая следующими свойствами:

1. $$\int_0^{T_1} \alpha(r)\, dr = 1,$$

2. $[\alpha(r) M_2 + \pi\, exp\,(rA).\, BP] \overset{*}{-} \pi\, exp\,(rA).\, CQ \neq \phi$ *при всех* $r \in [0,T_1]$,

б) $$\pi\, exp\,(T_1 A).\, z_0 \in \int_0^{T_1} \{[\alpha(r)\, M_2 + \pi\, exp\,(rA).\, BP] \overset{*}{-} \pi\, exp\,(rA).\, CQ\}\, dr.$$

Тогда преследование из начального состояния $z_0 \notin M$ в игре (1)—(2) заканчивается за время T_1.

Рассматривается теперь дифференциальная игра с запаздыванием информации

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть существует непрерывно—дифференцируемая, строго возрастающая функция, $I(t)$, определенная на $[0,\ T_1]$ такая, что*

а) $I(o) = 0$,

б) $I(t) \geqslant t$ *при всех* $0 \leqslant t \leqslant T_1$,

в) $\pi exp\,(t_o + t_1 - s)\, A.BP \overset{*}{-} [\dot{I}\,(t_o + t_1 - s) \pi exp\,(t_o + t_1 - I(t_1 - s))\, A.CQ] \neq \phi$ *при всех* $t_o \leqslant s \leqslant t_o + t_1$, *где* $t_o = I(t_1) - t_1$.

Кроме того выполнено условие

$$\pi exp\,(I(t_1)\, A).\, z_o \in M_2 + \int_o^{t_o} \pi exp\,(t_o + t_1 - t) A.BPdt +$$

$$+ \int_{t_o}^{t_o+t_1} \left\{ \pi exp\,(t_o + t_1 - s)\, A.BP \overset{*}{-} [\dot{I}(t_o + t - s) \pi exp\,(t_o + t_1 - I\,(t_1 - s) A.CQ] \right\} ds.$$

Тогда преследование из начального состояния $z_o \notin M$ в игре (1)—(2) заканчивается за время $t_1 + t_o$.

Замечание 2. В этом случае имеем

$\Delta_1(t_1) = [t_o, I(t_1)]$; $\Delta_2(t_1) = [0, t_o)$; $\Delta_3(t_1) = [0, I(t_1)]$; $\Delta_4(t_1) = \phi$;

$$\Omega(t) = \begin{cases} \phi & \text{, если } 0 \leqslant t \leqslant t_o \\ I(t_1) - I(t_1 + t) & \text{, если } t_o \leqslant t \leqslant t_o + t_1. \end{cases}$$

Заметим, что такая информация является полной.

СЛЕДСТВИЕ 4. (см. [7].) *Пусть существует непрерывно — дифференцируемая, строговозрастающая функция* $\tau(t)$, *определенная на* $[0,T_1]$ *такая, что*

а) $\tau(0) = \overset{*}{0}$,

б) $\tau(t) \leqslant t$ *при всех* $0 \leqslant t \leqslant T_1$

в) $\pi exp\,(T_1 - t)A.BP \overset{*}{-}\dot{\tau}(t)\pi exp(T_1 - \tau(t)A).\,CQ \neq \phi$ *при всех* $0 \leqslant t \leqslant T_1$

и пусть кроме того выполнено включение

$$\pi exp\,(T_1 A).z_0 \in [M_2 \overset{*}{-} \int\limits_{\tau(t_1)}^{t_1} \pi exp(T_1 - s)A.CQds] \dotplus$$

$$+ \int\limits_0^{T_1} [\pi exp(T_1 - t)A.BP \overset{*}{-}\dot{\tau}(t)\pi exp\,(T_1 - \tau(t))A.CQ]dt.$$

Тогда игра (1) (2) *из начального состояния* $z_0 \notin M$ *заканчивается за время* T_1.

Замечание 3. В этом случаем имеем $\theta(t) \equiv \tau(t)$;

$\Delta_1(T_1) = [0, T_1]$; $\Delta_2(T_1) = \phi$; $\Delta_3(T_1) = [0, \tau(T_1)]$; $\Delta_4(T_1) = (\tau(T_1), T_1]$.

Таким образом преследователь также использует информацию с запаздыванием, но в отличие от следствия 3, здесь информация является неполной.

СЛЕДСТВИЕ 5. (см. [II]). *Пусть* $T_1 > 0$ — *число такое, что*

а) *Существует матрица кусочно-непрерывных функций* $\chi_{T_1}(t,s) = \left\{\varphi^{ij}_{T_1}(t,s)\right\}_{i,j=1,\dots\tau}$ *на* $[0,T_1]\times[0,T_1]$, *обладающая следующими свойствами:*

1. $\chi_{T_1}(t,s) = \widetilde{O}_\tau$ *если* $t < s$, *где* $\widetilde{O}_\tau$ — *нулевая матрица порядка* τ,

2. *При всех* $t \in [0,T_1]$ *имеет место следующее*

$$K(t) = \pi \exp\,(T_1 - t)\;A.\,BP \overset{*}{-} F(t) \neq \phi \quad , где$$

$$F(t) = \left(E - \int\limits_0^{T_1} \chi_{T_1}(s,t)\,ds\right) \pi \exp\,(T_1 - t)\;A.\,CQ +$$

$$+ \int\limits_0^{t} \chi_{T_1}(t,s)\;\pi \exp\,(T_1 - s)\;A.\,CQds\,,$$

б) $\pi \exp(T_1 A).\ z_0 \in M_2 + \int^{T_1} K(t)\,dt$.

Тогда преследование в игре (1) — (2) из начального состояния $z_0 \notin M$ может быть закончено за время T_1.

Замечание 4. В этом случаем имеем

$$\theta(t) \equiv 0\ ;\ \tau(t) \equiv t\ ;\ \Omega(t) = [0,\ t]\ ;\ \Delta_1(T_1) = \Delta_3(T_1) = [0, T_1]\ ;$$

$$\Delta_2(T_1) = \Delta_4(T_1) = \phi.$$

Заметим что здесь при построении управления преследователя используется максимум информации о прошлом поведении убегающего объекта.

3. В этом пункте рассматриваются некоторые конкретные линейные дифференциальные игры преследования с геометрическими ограничениями.

Пусть движения точек $x \in R^n$, $y \in R^n$ описываются уравнениями

$$\ddot{x} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \dot{x} = \bar{u}\ ;\ \dot{y} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{pmatrix} y = \bar{v}\ , \tag{15}$$

где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$ при всех $i = 1, \ldots, m$.

Управления u преследователя и v убегающего удовлетворяют ограничениям

$$\|\bar{u}\| \leqslant \rho\ ; \qquad \|\bar{v}\| \leqslant б, \tag{16}$$

где ρ, б — некоторые положительные числа. Считается, что точка x поймала точку y, если $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторая положительная фиксированная константа (ε — поимка). Задача (15) — (16), причем $\alpha_i = \beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$ называется задачей об «изотропных ракетах», которая рассматривалась в [9].

Введем обозначения

$$z = (z_1, z_2, z_3)^T;\ u = (\bar{0}\ ;\ \bar{u}\ ,\ \bar{0})^T\ ;\ v = (\bar{0}\ ,\ \bar{0}\ ,\ \bar{v})^T\ ;$$

$$P = \{(\bar{0}\ ,\ \bar{u}\ ;\ \bar{0})^T\ :\ \|\bar{u}\| \leqslant \rho\}\ ;\ Q = \{(\bar{0}\ ,\ \bar{0},\ \bar{v})^T\ :\ \|\bar{v}\| \leqslant б\};$$

$$
A = \begin{pmatrix}
\tilde{0} & E & \tilde{0} \\
\tilde{0} & \begin{matrix} -\alpha_1 & & 0 \\ & -\alpha_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & -\alpha_n \end{matrix} & \tilde{0} \\
\tilde{0} & \tilde{0} & \begin{matrix} -\beta_1 & & 0 \\ & -\beta_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & -\beta_n \end{matrix}
\end{pmatrix}
$$

где $\tilde{0}$, E — соответственно нулевая и единичная матрица порядка n, $\bar{0}$ — начало координат (нулевой вектор) пространства R^n. Тогда задача (15) — (16) может быть записана в следующем виде

$$\dot{z} = Az - u + v\,;\ u \in P\,;\ v \in Q, \tag{17}$$

и терминальное множество имеет вид $M = \{(z_1, z_2, z_3)^T : \| z_1 - z_3 \| \leqslant \varepsilon\}$. Будем говорить что в игре (17) (или, что то же самое, в игре (15) — (16)) из точки $z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)^T \notin M$ возможна ε — поимка за время t_1, если по любой измеримой функции $v = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, $v(t) \in Q$ можно построить такую измеримую функцию $u = u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, $u(t) \in P$, что решение $z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ уравнения

$$\dot{z} = Az - u(t) + v(t)\ ;\ z(0) = z_0,$$

попадает на M при $t = t_1$. При этом для нахождения значения $u(t)$ в каждый момент времени $t \in [0, t_1]$ рарешается использовать значения Z_0 и $v(t)$. Положим $N = \{(z_1, z_2, z_3)^T : z_1 = z_3\}$. Тогда N является подпространством пространства R^{3n}. Пусть L ортогональное дополнение к N в R^{3n}, то

$$L = \{(z_1, z_2, z_3)^T : z_1 = -z_3,\ z_2 = 0\}.$$

Пусть π — оператор ортогонального проектирования из R^{3n} на L. Если положив $\Pi = (E, \tilde{O}, -E)$, тогда в некоторой выбранной системе координат, вектор πz записывается как $\Pi z = z_1 - z_3$. Через S обозначаем единичный шар с центром в точке $O \in R^{3n}$ пространства L. Нетрудно доказать, что $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in M$ тогда и только тогда, когда $\Pi z \in \varepsilon S$.

Введем функции

$$
\varphi_i(r) = \begin{cases} \dfrac{1-\exp(-\alpha_i r)}{\alpha_i}, & \text{если } \alpha_i > 0 \\ r, & \text{если } \alpha_i = 0;\ i = 1, \dots, n. \end{cases}
$$

Тогда ясно, что

$$
\exp(rA) = \begin{pmatrix} E & \begin{matrix} \varphi_1(r) & & 0 \\ & \varphi_2(r) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \varphi_n(r) \end{matrix} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \begin{matrix} \dot{\varphi}_1(r) & & 0 \\ & \dot{\varphi}_2(r) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \dot{\varphi}_n(r) \end{matrix} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{O} & \begin{matrix} \exp(-\beta_1 r) & & 0 \\ & \exp(-\beta_2 r) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \exp(-\beta_n r) \end{matrix} \end{pmatrix}
$$

Следовательно,

$$
\Pi\exp(rA).P = \rho \begin{pmatrix} \varphi_1(r) & & 0 \\ & \varphi_2'(r) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \varphi_n(r) \end{pmatrix} S;\ \Pi\exp(rA).Q = б \begin{pmatrix} \exp(-\beta_1 r) & & 0 \\ & \exp(-\beta_2 r) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \exp(-\beta_n r) \end{pmatrix} S
$$

Заметим, что если $\alpha_i > \alpha_j > 0$, то

$$
\left(1 - \exp(-\alpha_i \tau)\right) \alpha_i^{-1} < \left(1 - \exp(-\alpha_j \tau)\right) \alpha_j^{-1} < \tau \quad \text{при всех } \tau > 0.
$$

Положим $\alpha = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\beta = \min(\beta_1, \dots, \beta_n)$;

$$
\Omega = \{1 \leqslant i \leqslant n : \alpha_i = 0\}.
$$

Если $\alpha = \alpha_p$, $\beta = \beta_q$, тогда имеем при всех $\tau \geqslant 0$

$$
\varphi_i(\tau) \geqslant \varphi_p(\tau);\ \exp(-\beta_i \tau) \leqslant \exp(-\beta_q \tau),\ i = 1, \dots, n;
$$

$$
\Pi\exp(\tau A)\,P > \rho\varphi_p(\tau)\,S;\ \Pi\exp(\tau A)\,.\,Q < б\exp(-\beta_q \tau)\,.\,S.
$$

В силу непрерывности $\varphi_p(\tau)$ и $\exp(-\beta_q \tau)$ следует, найдется $\tau_0 > 0$, что выполнено $\rho\varphi_p(\tau) < б\exp(-\beta_q \tau)$ в отрезке $[0, \tau_0]$.

А это значит, что Пexp $(\tau A) . P \overset{*}{-}$ Пexp (τA) . $Q = \phi$ при всех $\tau \in [0, \tau_0)$, поэтому метод преследования Л.С.Понтрягина (см [1]) не применим к игре (15) (16).

Пусть $z_0 = (z_0^1, \ z_0^2, \ z_0^3)^T$ — начальное состояние игры (15) (16).

Тогда

$$\text{Пexp}\,(\tau A) \,.\, z_0 = z_0^1 + \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) & & & \\ & \varphi_2(\tau) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi_n(\tau) \end{pmatrix} z_0^2 - \begin{pmatrix} \exp(-\beta_1 \tau) & & & \\ & \exp(-\beta_2 \tau) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(-\beta_n \tau) \end{pmatrix} z_0^3 .$$

Пусть теперь $\alpha\,(r, \tau)$, $0 \leqslant r \leqslant \tau$ – произвольная неотрицательная суммируемая на $[0, \tau]$ функция и

$$\int_0^\tau \alpha\,(r, \tau)\,dr = 1.$$

Положим.

$$W_1(0) = \varepsilon S; \ W_1(\tau) = \bigcup_{\alpha\,(.,\,\tau)} W\,(\alpha\,(.,\tau)\,;$$

$$W\,(\alpha(.,\tau)) = \int_0^\tau \{[\alpha\,(r,\tau)\,\varepsilon S + \text{Пexp}\,(rA) . P] \overset{*}{-} \text{Пexp}\,(rA) . Q\}\,dr. \tag{18}$$

где в 18 суммирование в производится по всем функциям $\alpha(r, \tau)$, $0 \leqslant r \leqslant \tau$, с описанными выше свойствами. Будем использовать метод преследования проведенное в следствии 2.

Очевидно, что при всех $\tau \geqslant 0$ имеем

$$W_1\,(\tau) \supset \widehat{W}_1(\tau) = \bigcup_{\alpha(.,\tau)} \int_0^\tau \{[\alpha(r,\tau)\,\varepsilon S + \rho\,\varphi_p\,(r) S] \overset{*}{-} \sigma \exp\,(-\beta_q\, r) \,.\, S\}\,dr.$$

Легко видет, что $\widehat{W}_1(\tau)$ является непустым множеством в случае

$$f(\tau) = \varepsilon + \rho \int_0^\tau \varphi_p\,(r)\,dr - \sigma \int_0^\tau \exp\,(-\beta_q\, r)\,dr \geqslant 0,$$

И тогда имеем

$$\widehat{W}_1\,(\tau) = f(\tau).\,S.$$

Исследование вдиотности ε —поимки приводится в трех следующих случаях.

Случай 1. Пусть $\alpha = \max\,(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$; $\beta = \min\,(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$.

Тогда имеем

$$f(\tau) = \varepsilon + \left(\frac{\rho}{\alpha} - б\right)\tau - \frac{\rho}{\alpha^2}(1 - \exp(-\alpha\tau)),$$

$$f'(\tau) = \frac{\rho}{\alpha} - б - \frac{\rho}{\alpha}\exp(-\alpha\tau).$$

Если $\frac{\rho}{\alpha} - б > 0$ то

$$\min_{\tau \geqslant 0} f(\tau) = f\left(\frac{1}{\alpha}\ ln\ \frac{\rho}{\rho - \alpha б}\right) = \varepsilon - \rho б + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\rho}{\alpha} - б\right) ln \frac{\rho}{\rho - \alpha б}.$$

Таким образом имеем $W_1(\tau) \neq \phi$ при всех $\tau \geqslant 0$, если

$$\varepsilon - \rho б + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\rho}{\alpha} - б\right) ln \frac{\rho}{\rho - \alpha б} \geqslant 0.$$

Пусть $z_i = (z_{i1}, \ldots, z_{in}) \in R^n$; $i = 1, 2, 3.$

Введем в рассмотрение множества

$$\Omega_\gamma(z)_2 = \{ (z_2) = (z_{21}, \ldots, z_{2n}) \in R^n : \sqrt{\sum_{i \in \Omega} z_{2i}^{2}} < \gamma \},$$

$$\Omega_\gamma(z_1, z_2, z_3) = \{(z_1, z_2, z_3)^T \in R^{3n} : z_2 \in \Omega_\gamma(z_2)\}.$$

Очевидно, что если $z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)^T \in \Omega_{\frac{\rho}{\alpha} - \sigma}(z_0^2)$, то

$$\lim_{\tau \to +\infty} \left[\varepsilon + \left(\frac{\rho}{\alpha} - \sigma\right)\tau - \frac{\rho}{\alpha^2}(1 - \exp(-\alpha\tau))\right] \left\| \Pi\exp(\tau A).\ Z_0 \right\|^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\tau \to +\infty} \left[\varepsilon + \left(\frac{\rho}{\alpha} - \sigma\right) - \frac{\rho}{\alpha^2}(1 - \exp(-\alpha\tau))\right] \left[\| Z_1^0 \| + \right.$$

$$\left. \left\| \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_n(\tau) \end{pmatrix} Z_2^0 \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \exp(-\beta_1\tau) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(-\beta_n\tau) \end{pmatrix} Z_3^0 \right\| \right]^{-1} > 1.$$

Отсюда следует, что существует число $\tau\ (Z_0)$ такое, что

$$\Pi\exp(\tau(Z_0)A) \cdot Z_0 \in W_1\ (\tau(Z_0)).$$

Случай 2. Пусть $\alpha = \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > 0$; $\beta = \min(\beta_1, \ldots, \beta_n) > 0$; $\beta \geqslant \alpha$.

Тогда имеем $\sigma\exp(-\beta r) \cdot S \subset \sigma\exp(-\alpha r) \cdot S$, поэтому

$$W_1(\tau) \supset \overline{W}_1(\tau) \equiv \bigcup_{\alpha(\cdot,\tau)} \int_0^\tau \left\{ \left[\alpha(r,\tau)\varepsilon S + \rho\frac{1 - \exp(-\alpha r)}{\alpha} S\right] \underline{*}\ \sigma\exp(-\alpha r).S \right\} dr.$$

Ясно, что $\overline{W}_1(\tau)$ является непустым множеством, если

$$g(\tau) = \varepsilon + \frac{\rho}{\alpha}\,\tau - \frac{\rho}{\alpha_2}\,(1-\exp(-\alpha\tau)) - \frac{\sigma}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha\tau}\right) \geqslant 0.$$

Нетудно доказать, что

$$\min_{\tau \geqslant 0} g(\tau) = g\left(\frac{1}{\alpha}\, ln\, \frac{\rho+\alpha\sigma}{\rho}\right) = \varepsilon - \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{\rho}{\alpha^2}\, ln\, \frac{\rho+\alpha\sigma}{\rho}.$$

Таким образом $\overline{W}_1(\tau) \neq \phi$ При всех $\tau \geqslant 0$, если

$$\varepsilon - \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{\rho}{\alpha^2}\, ln\, \frac{\rho+\alpha\sigma}{\rho} \geqslant 0$$

С другой стороны, если $Z_0 = \left(Z_0^1,\ Z_0^2,\ Z_0^3\right)^T \in \Omega_{\frac{\rho}{\alpha}}\left(Z_0^1,\ Z_0^2,\ Z_0^3\right)$, то

$$\lim_{\tau\to+\infty} \|\Pi\exp(\tau A)\, Z_0\|^{-1}\left[\varepsilon + \frac{\rho}{\alpha}\tau - \frac{\rho}{\alpha^2}\,(1-\exp(-\alpha\tau)) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma}{\alpha}\,(1-\exp(-\alpha\tau))\right] > 1,$$

А это значит,что существует число $\tau\,(Z_0)$ такое, что

$$\Pi\exp\,(\tau(Z_0)\,A)\,.\,Z_0 \in W_1\,(\tau\,(Z_0)).$$

Случай 3. Пусть $\alpha = \max\,(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 0.$

В этом случае имеем

$$W_1(\tau) \supset \widetilde{W}_1(\tau) = \bigcup_{\alpha(.,\tau)} \int_0^\tau \{[\alpha\,(r,\tau)\,\varepsilon S + \rho S] \overset{*}{-} б\varepsilon S\}\, dr.$$

Ясно что $\widetilde{W}_1(\tau)$ является непустым множеством в случае

$$h(\tau) = \varepsilon + \frac{1}{2}\,\rho\tau^2 - б\tau \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $W_1(\tau) \neq \phi$ при всех $\tau \geqslant 0$, если $2\,\rho\varepsilon \geqslant б^2.$

Тогда при любом начальном состояние игры $z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)^T$, имеем

$$\lim_{\tau\to+\infty} h(\tau)\,\|\Pi\exp\,(\tau A).\, z_0\|^{-1} = +\infty$$

Таким образом доказана следующая:

ТЕОРЕМА 4. 1. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta = 0$, $\frac{\rho}{\alpha} - б > 0$ и выполнено*

$$\varepsilon - \rhoб + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\rho}{\alpha} - б\right) ln\, \frac{\rho}{\rho - \alphaб} \geqslant 0$$

то в игре (15) — (16) возможна ε-поимка из произвольной точки

$$z_0 = (z_2^1, z_0^2, z_0^3)^T \in \Omega_{\frac{\rho}{\alpha} - \delta}(z_0^1, z_0^2, z_0^3).$$

2. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta \geqslant \alpha$, и выполнено*

$$\varepsilon - \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\rho}{\alpha^2} \ln \frac{\rho + \alpha\delta}{\rho} \geqslant 0,$$

то в игре (15) — (16) возможна ε — поимка из любой точки

$$z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)^T \in \Omega_{\frac{\rho}{\alpha}}(z_0^1, z_0^2, z_0^3).$$

3. *Пусть $\alpha = 0$, $2\varepsilon\rho \geqslant \sigma^2$, то в игре (15) — (16) возможна ε — поимка из любой точки $z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)^\tau \in \mathbf{R}^{3n}$.*

Замечание 5. Если $\alpha_i = \beta_i = 0$ при всех $i = 1,\ldots, n$, то из теоремы 4, как следствие, получим результат в [9].

Пусть теперь движения точек $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n$ описываются уравнениями

$$\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 x = \overline{u}\,; \dot{y} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \beta_n \end{pmatrix} y = \overline{v}\,, \tag{19}$$

где $\beta_i > 0$, $i = 1,\ldots, n$; α_1, α_2 — некоторые действительные числа. Управления $\overline{u}$, $\overline{v}$ удовлетворяют ограничениям:

$$\| \overline{u} \| \leqslant \rho\,; \qquad \| \overline{v} \| \leqslant \delta\,. \tag{20}$$

ε — поимка определяется как в игре (15—16).

Так как $z = (z_1, z_2, z_3)^T = (x, \dot{x}, y)^T \in R^{3n}$, следовательно игра (19 — 20) принимает вид

$$\dot{z} = Az - u + v\,; \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{21}$$

здесь

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{0} & E & \tilde{0} \\ \tilde{0} & -\alpha_1 E & -\alpha_2 E \\ & & \begin{matrix} -\beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\beta_n \end{matrix} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \end{pmatrix}$$

Через $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ обозначим решения скалярного уравнения

$$\ddot{\xi} + \alpha_1\dot{\xi} + \alpha_2\xi = 0 \qquad (22)$$

с начальным уловиям

$\varphi_1(0) = 1$; $\dot{\varphi}_1(0) = 0$; $\varphi_2(0) = 0$; $\dot{\varphi}_2(0) = 1$

Ясно, что

$$\exp(rA) = \begin{pmatrix} \varphi_1(r)E & \varphi_2(r)E & \tilde{0} & \\ \dot{\varphi}_1(r)E & \dot{\varphi}_2(r)E & \tilde{0} & \\ & & \exp(-\beta_1 r) & \\ \tilde{0} & \tilde{0} & & \exp(-\beta_2 r) \quad 0 \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \exp(-\beta_n r) \end{pmatrix}.$$

$$\Pi \exp(\tau A).P = \rho\varphi_2(\tau)S,$$

$$\Pi\exp(\tau A).Q = 6\begin{pmatrix} \exp(-\beta_1\tau) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(-\beta_n\tau) \end{pmatrix} S \subset 6\exp(-\beta_\tau).S,$$

где $\beta = \min(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Пусть $z_0 = \left(z_0^1, z_0^2, z_0^3\right)$ — начальное состояние игры (21), тогда имеем

$$\Pi\exp(\tau A).z_0 = \varphi_1(\tau)z_0^1 + \varphi_2(\tau)z_0^2 - \begin{pmatrix} \exp(-\beta_1\tau) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(-\beta_n\tau) \end{pmatrix} z_0^3.$$

Пусть (22) имеют действительные различные характеритические корни λ_1, λ_2 где $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Тогда имеем

$$\varphi_2(\tau) = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\left(\exp(\lambda_2\tau) - \exp(\lambda_1\tau)\right).$$

Пусть $\beta \geqslant -\lambda_2$, тогда $6\exp(-\beta\tau).S \subset 6\exp(\lambda_2\tau).S$ при $\tau \geqslant 0$.

Ясно, что $W_1(\tau)$ является непустым множеством если

$$f(\tau) = \varepsilon + \frac{\rho}{\lambda_2\lambda_1} + \frac{\rho}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2^{-1}\exp(\lambda_2\tau) - \lambda_1^{-1}\exp(\lambda_1\tau)\right) + 6\,\frac{1 - \exp(\lambda_2\tau)}{\lambda_2} > 0.$$

Нетурно доказать, что

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2-1}$$

$$\min_{\tau\geqslant 0} f(\tau)=\varepsilon+\frac{\rho}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{б}{\lambda_2}-\frac{\rho}{\lambda_1\lambda_2\Big[\rho-б(\lambda_2-\lambda_1)\Big]^{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}}}.$$

Из $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\varphi_1(\tau) = \lim\limits_{\tau\to+\infty}\varphi_2(\tau) = 0$ следует, что существует число $\tau(z_0)$

такое, что

$$П\exp(\tau(z_0)A).z_0\in W_1(\tau(z_0)).$$

Пусть теперь уравнение (22) имеет двкуратный характеритический корень

λ, где $\lambda<0$. Тогда $\varphi_2(\tau)=\tau.\exp(\lambda\tau)$.

Пусть $\beta\geqslant-\lambda$, тогда $б\exp(-\beta\tau).S\subset б\exp(\lambda\tau).S$ при $\tau\geqslant 0$.

Как видно что

$$W_1(\tau)\supset W'_1(\tau)=\bigcup_{\alpha(.,\tau)}\int_0^\tau\{[\alpha(r,\tau)\varepsilon S+\rho r.\exp(\lambda r).S] \overset{*}{-} б\exp(\lambda r).S\}\,dr$$

поэтому $W_1(\tau)\neq\phi$ при всех $\tau\geqslant 0$, если $\varepsilon+\lambda^{-1}б-\dfrac{1-\exp(\lambda б)}{\lambda^2}\geqslant 0$

Тогда при любом начальном состоянии $z_0=(z_0^1,z_0^2,z_0^3)^T$ игры (19) — (20) существует число $\tau(z_0)$ такое, что

$$П\exp(\tau(z_0)A).z_0\in W_1(\tau(z_0)).$$

Таким образом доказана следующая :

ТЕОРЕМА 5. 1. *Пусть* (22) *имеют различные действительные характеритические корни* $\lambda_1<\lambda_2<0$ *и выполнено неравенство*

$$\rho+\lambda_2\geqslant 0\ ;\ \rho(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}-б>0;$$

$$\varepsilon=\frac{\rho}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{б}{\lambda_2}-\frac{\rho^{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}}}{\lambda_1\lambda_2[\rho-б(\lambda_2-\lambda_1)]^{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}}}\geqslant 0.$$

Тогда в игре (19) — (20) *возможна* ε — *поимка из любой точки*

$$z_0=(z_0^1,z_0^2,z_0^3)^T\in R^{3n}$$

2. *Пусть* (22) *имеет двукратный характеритический корень* λ *где* $\lambda<0$ *и выполнено неравенство*

$$\beta+\lambda\geqslant 0;\ \varepsilon+б\lambda^{-1}+\lambda^{-2}(1-\exp(\lambda б))\geqslant 0.$$

Тогда в игре (19) — (20) возможна ε — поимка из любой точки

$$z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)^T \in R^{3n}$$

Пусть теперь движения векторов $x \in R^n$, $y \in R^n$ описываются уравнениями:

$$x^{(p)} = \bar{u} \quad ; \quad y^{(q)} = \bar{v} \ , \tag{23}$$

где p, q — целые числа такие, что $p > q \geqslant 1$. Управления $\bar{u}$, $\bar{v}$ удовлетворяют ограничениям

$$\|\bar{u}\| \leqslant \rho \quad ; \quad \|\bar{v}\| \leqslant \delta \ . \tag{24}$$

Положим

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \tilde{O}\, E\, \tilde{O} \ldots\ldots \tilde{O} \\ \tilde{O}\, \tilde{O}\, E \ldots\ldots \tilde{O} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{O}\, \tilde{O}\, \tilde{O} \ldots\ldots E \\ \tilde{O}\, \tilde{O}\, \tilde{O} \ldots\ldots \tilde{O} \end{matrix} & O^{**} \\ O^{*} & \begin{matrix} \tilde{O}\, E\, \tilde{O} \ldots\ldots \tilde{O} \\ \tilde{O}\, \tilde{O}\, E \ldots\ldots \tilde{O} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{O}\, \tilde{O}\, \tilde{O} \ldots\ldots E \\ \tilde{O}\, \tilde{O}\, \tilde{O} \quad\ \ \tilde{O} \end{matrix} \end{pmatrix} .$$

$$z \equiv (z_1, \ldots, z_p, z_{p+1}, \ldots, z_{p+q})^T = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(p-1)}, y, \dot{y}, \ldots, y^{(q-1)})^T,$$

$$u = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{u}, \bar{0}, \ldots, \bar{0})^T ; \ v = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{0}, \ldots, \bar{v})^T,$$

$$P = \{ (\bar{0}, \ldots \bar{u}, \ldots, \bar{0})^T : \|\bar{u}\| \leqslant \rho \} ; \ Q = \{ (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{v})^T : \|\bar{v}\| \leqslant \delta \},$$

здесь O^*, O^{**} соответственно нулевые матрицы размер $qn \times pn$ и $pn \times qn$. Тогда (23) — (24) записывается в следующей виде

$$\dot{z} = Az - u + v \ ; \ u \in P \ , \ v \in Q \ . \tag{25}$$

В этом случае ε — поимка определяется как в игре [15] – [16], поэтому терминальное множество M принимает вид

$$M = \{ (z_1, \ldots, z_{p+q})^T : \|z_1 - z_{p+1}\| \leqslant \varepsilon \} \ .$$

Введем в рассмотрение подпространство L пространства $R^{n(p+q)}$.

$$L = \{ (z_1, \ldots, z_{p+q})^T : z_1 = -z_{p+1} \ ; \ z_j = 0 \text{ если } j \neq 1 \ , \ j \neq p+1 \} \ .$$

Положим $\Pi = (E, \widetilde{O}, \dots, -E, \dots, \widetilde{O})$, где первая E находится в первом месте и вторая $-E$ в $p+1$ — ом месте. Тогда в некоторой выбранной системе координат, вектор πz записывается как $\Pi z = z_1 - z_{p+1}$, где π — оператор ортогонального проектирования из $R^{n(p+q)}$ на L. Через S обозначаем единичный шар с центром в нуле подпространства L. Тогда вектор $z = (z_1, \dots, z_{p+q})^T \in M$ тогда и только тогда, когда $\Pi z \in \varepsilon S$. Ясно, что

$$exp(\tau A) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} E & \tau E & \frac{\tau^2}{2!}E & \dots & \frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!}E \\ \widetilde{O} & E & \tau E & \dots & \frac{\tau^{p-2}}{(p-2)!}E \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{O} & \widetilde{O} & \widetilde{O} & \dots & E \end{matrix} & O^{**} \\ O^{*} & \begin{matrix} E & \tau E & \frac{\tau^2}{2!}E & \dots & \frac{\tau^{q-1}}{(q-1)!}E \\ \widetilde{O} & E & \tau E & \dots & \frac{\tau^{q-2}}{(q-2)!}E \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{O} & \widetilde{O} & \widetilde{O} & \dots & E \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\Pi exp(tA) \cdot P = \rho \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}S; \quad \Pi exp(tA) \cdot Q = \delta \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}S;$$

$$\Pi exp(tA) \cdot z_0 = z_0^1 + tz_0^2 + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p+1)!} z_p^0 - z_{p+1}^0 - tz_{p+2}^0 - \dots -$$

$$- \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} z_{p+q}^0 \quad \text{где } z_0 = \left(z_0^1, \dots, z_o^{p+q}\right)^\tau$$ — начальное состояние игры [25].

Очевидно, что если t достаточно близкок к нуле, то

$$\frac{\delta}{(q-1)!} t^{q-1} > \frac{\rho}{(p-1)!} t^{p-1}.$$

А это значает, что при таких значения t вычитание Π exp (tA). $P \overset{*}{-} \Pi$ exp (tA) . Q будет пустым. Следовательно метод преследования Л. С. Понтрягина (см. [1]) не применим к игре (25). В этом случае $W_1(\tau)$ является непустым множеством если

$$f(\tau) = \varepsilon + \frac{\rho}{p!}\tau^p - \frac{\delta}{q!}\tau^q \geqslant 0.$$

Можно доказать, что

$$\min_{\tau\geqslant 0} f(\tau) = f\left(\left(\frac{\delta(p-1)!}{\rho(q-1)!}\right)^{(p-q)^{-1}}\right) =$$

$$= \varepsilon + \frac{\rho}{p!}\left(\frac{\delta(p-1)!}{\rho(q-1)!}\right)^{p(p-q)^{-1}} - \frac{\delta}{q!}\left(\frac{\delta(p-1)!}{\rho(q-1)!}\right)^{q(p-q)^{-1}}.$$

Ясно, что при любом начальном состояние игры (25) имеем

$$\lim_{\tau\to+\infty} \|\Pi \exp(\tau A)\cdot z_0\|^{-1}\left(\varepsilon + \frac{\rho\tau^p}{p!} - \frac{\delta\tau^q}{q!}\right) = +\infty.$$

Таким образом доказана следуюшая:

ТЕОРЕМА 6. *Пусть выполнено неравенство*

$$\varepsilon + \frac{\rho}{p!}\left(\frac{\delta(p-1)!}{\rho(q-1)!}\right)^{p(p-q)^{-1}} - \frac{\delta}{q!}\left(\frac{\delta(p-1)!}{\rho(q-1)!}\right)^{q(p-q)^{-1}} > 0.$$

Тогда игра (23) — (24) заканчивается из любой точки $\left(Z_0^1,\dots, Z_0^{p+q}\right)^T$

Замечание 6. Результат Н.Ю. Сатимова в [9] может быть получем как частный случай теоремы 6, если положить $p = 2$, $q = 1$.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. С. Понтрягин. *О линейных дифференциальных играх.1.* ДАН СССР, т.174, № 6, 1967, стр. 1278-1280.
2. Л. С. Понтрягин. *К теории дифференциальных игр.* УМН, т. 21, вып. 4, 1966, стр. 219-272.
3. Л. С. Понтрягин, *О линейных дифференциальных играх.* II. ДАН СССР, т.175, № 4, 1967, стр. 764-766.
4. Н. Ю. Сатимов. *К задаче преследования в линейных дифференциальных играх.* Дифференциальные уравнения, т. 9, № 11, 1973, стр. 200-209.
5. Б. Н. Пшеничный. *Линейные дифференциальные игры.* Автоматика и телемеханика, № 1, 1968, стр. 65-78.
6. М. С. Никольский. *Линейные дифференциальные игры при наличии запаздыванием.* ДАН СССР, т. 179, № 5, 1971, стр. 1018—1021.

7. С. П. Берзан. *Об одной линейной дифференциальной игре преследования с неполной информацией.* Вестн. МГУ. Вычисл. мат. и кибернет., № 3, 1979, стр. 68—72.

8. А. Я. Азимов. *Об одной задаче теории преследования.* Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1975, стр. 37—43.

9. Н. Ю. Сатимов. *К полному исследованию задачи об «изотропных ракетах».* ДАН УзССР, № 9, 1980, стр. 6—8.

10. Фан Зуй Хай. *Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играй с разнотипными ограничениями.* Изв. АН АзССР, серия физи. техни. и матем. наук.. № 2, 1981, стр. 27—31.

11. Фан Зуй Хай., Фам Хонг Куанг. *О новых эффективных методах преследования в линейных дифференциальных играх.* ДАН АзССР, № 7, 1983, стр. 10—14.

12. А. Н., Колмогоров С. В, Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М., «Наука», 1977.

13. А. Ф. Филиппов. *О некоторых вопросах оптимального регулирования.* Вестник МГУ, сер. матем, техни. астрон. физ. хим., 2, № 1, 1959, стр. 25 — 32

14. Phan Huy Khai. *On the pursuit process in the differential games.* Acta Mathematica Vietnamica, Vol 8, No1, 1983, p. p. 41 — 57.