SUR LA TOPOLOGIE DES POLYNÔMES COMPLEXES

HÀ HUY VUI ET LÊ DŨNG TRÁNG*

0. INTRODUCTION.

Dans [14] F. Pham étudie le comportement asymptotique d'une intégrale oscillante par une méthode qui généralise la méthode du col. Dans cette étude il est amené à faire des hypothèses de « bon comportement à l'infini » d'un polynôme complexe (hypothèse H1 de [14] (1.5)). De façon naturelle on peut donc se poser la question de connaître la topologie d'une fonction polynomiale complexe et de savoir quand se produisent ces accidents « à l'infini ».

Dans cet article nous donnons un critère effectif pour savoir quel est le plus grand ouvert de $\mathbf{C}$ sur lequel $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$, une fonction polynomiale de deux variables, est une fibration C^∞ localement triviale : en fait, nous montrons que f est une fibration C^∞ triviale sur un voisinage U d'un point $z \in \mathbf{C}$ si et seulement si z n'est pas une valeur critique de f et si la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre de F au-dessus de z égale la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une fibre générale de f.

Nous remercions F. Pham pour nous avoir intéressé à ce problème.

Cet article a été conçu à l'Institut de Mathématiques du Viêt Nam à Hanoi et a finalement été écrit et dactylographié grâce à l'hospitalité du R. I. M. S. de l'Université de Kyoto.

1. THÉORÈME DE FIBRATION

Soit $f : C^{n+1} \to C$ une fonction polynomiale complexe sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Nous montrons tout d'abord:

THÉORÈME 1. *Il existe un ensemble fini $A \subset \mathbf{C}$ tel que f induise une fibration C^∞ de $\mathbf{C}^{n+1} - f^{-1}(A)$ sur $\mathbf{C} - A$.*

* Adresse permanente: UER de Math., Univ. de Paris VII, 2 Place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05, France et Centre de Math., Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

Remarques 2

i) Ce théorème est un avatar des résultats de R. Thom sur la stratification des applications polynomiales (voir par exemple [20]) ;

ii) Dans [4] (Proposition 1). Broughton donne une démonstration de ce théorème ;

iii) Comme conséquence de ce théorème, nous pouvons parler pour toute fonction polynomiale complexe du type différentiable de la fibre générale de f, en particulier de son type d'homotopie ou de sa caractéristique d'Euler-Poincaré ; si f est une fonction constante, la fibre générale est évidemment $\emptyset$.

iv) Ce théorème est sensiblement différent du théorème de Bertini qui nous dit que l'ensemble B des valeurs critiques de f est fini. En effet dans [4] (Introduction. Remark (1) p. 168) S. Broughton remarque déjà que $X^2 \cdot Y + X$ est un polynôme de deux variables pour lequel $B = \emptyset$ et $\{0\} = A$. En tout cas le théorème de Bertinni nous dit déjà que la fibre générale de f est non singulière.

Dans [4] S. Broughton considère le plus petit ensemble A_f tel que f soit une fibration localement triviale au-dessus de $C - A_f$ Suivant sa terminologie nous appellerons les points dans A_f les *valeurs atypiques* de f. Nous verrons plus loin qu'une valeur critique est une valeur atypique.

v) Dans l'énoncé du théorème ci-dessus on donne l'existence d'un ensemble A, on en donnera une caractérisation « constructive », mais dans le cas général où $n \geqslant 2$ nous n'avons pas de résultats permettant de bien caractériser l'ensemble A_f des valeurs atypiques.

vi) On peut rapprocher ce théorème de fibration « global » au théorème « local » à la Milnor (cf [12] Theorem 4. 8 and Theorem 5. 11 or [7]).

Démonstration du théorème 1.

Plongeons $\mathbf{C}^{n+1}$ dans $\mathbf{P}^{n+1}$. Soient $X_0, \ldots, X_n$, T les coordonnées homogènes de $\mathbf{P}^{n+1}$ pour lesquelles l'ouvert où $T \neq 0$ est l'ouvert $\mathbf{C}^{n+1}$.

Notons $\widetilde{f}$ le polynôme homogénéisé de f par rapport à la variable T :

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_0 + \ldots + \alpha_n \leqslant d} c_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} x_0^{\alpha_0} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

où $d = \deg f$, alors:

$$\widetilde{f}(X_0, \ldots, X_n, T) = \sum_{\alpha_0 + \cdots + \alpha_n \leq d} c_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} X_0^{\alpha_0} \ldots X_n^{\alpha_n} T^{d - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j}$$

On considère le système linéaire dans $\mathbf{P}^{n+1}$ défini par:

$$\alpha \widetilde{f} + \beta T^d = 0$$

où $(\alpha : \beta) \in \mathbf{P}^1$.

Ceci définit une application:

$$\mathbf{P}^{n+1} - \{\widetilde{f} = T^d = 0\} \xrightarrow{\phi} \mathbf{P}^1$$

qui à $(X_0, \ldots, X_n, T)$ fait correspondre $(T^d : \widetilde{f}(X_0, \ldots, X_n))$ et dont le graphe $Gr\,\phi \subset \mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^1$ a une fermeture $\overline{Gr\,\phi} = Z \subset \mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^1$ qui est une sous-variété algébrique projective complexe de $\mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^1$. La projection sur $\mathbf{P}^1$ donne:

$$Z \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \mathbf{P}^1$$

et la projection sur $\mathbf{P}^{n+1}$ donne $\pi : Z \to \mathbf{P}^{n+1}$ qui est l'éclatement dans $\mathbf{P}^{n+1}$ de l'idéal homogène engendré par $\widetilde{f}$ et T^d.

On peut « décrire » Z d'une autre façon. Soit $\mathbf{C}^{n+1} \subset \mathbf{P}^{n+1}$ le plongement de $\mathbf{C}^{n+1}$ dans $\mathbf{P}^{n+1}$ qui à un point $(x_0, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}^{n+1}$ fait correspondre le point de coordonnées homogènes $(x_0 : \ldots : x_n : 1)$. On remarque alors que Z est aussi la fermeture dans $\mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^1$ de l'ensemble des points:

$$G = \{((x_0 : \ldots : x_n : 1), (1 : \widetilde{f}(x_0, \ldots, x_n, 1))) ; (x_0, \ldots, x_n)\ \mathbf{C}^{n+1}\}$$

Comme on a $\widetilde{f}(x_0, \ldots, x_n, 1) = f(x_0, \ldots, x_n)$, l'ensemble G est l'image dans $\mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^1$ du graphe de f dans $\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}$ en plongeant $\mathbf{C}^{n+1}$ dans $\mathbf{P}^{n+1}$ comme ci-dessus, et $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^1$ en identifiant λ et $(1 : \lambda)$. Notre construction est donc identique à celle de S. Broughton dans [4] (Proof of Proposition 1).

Soit $(Z_\beta)_{\beta \in B}$ une stratification de Whitney analytique complexe de Z (cf [22] ou [9] Déf. (1.2.6)). Comme $Z \cap (\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}) = G$ est un ouvert dense dans Z

de points non singuliers, on peut supposer que *G est l'une des strates*. Comme Z **est projectif**, le lemme de Chow montre que, pour tout $\beta \in B$, $\overline{Z}_\beta$ est projectif **et que, par conséquent**, B est un ensemble fini.

Soit C_β le lieu critique de la restriction $\widetilde{\phi}_{|Z_\beta}$ de $\widetilde{\phi}$ à la strate Z_β: la restriction de $\widetilde{\phi}$ à C_β est constante. Comme B est fini, l'ensemble

$$A_0 = \left\{\widetilde{\phi}\,(C_\beta)\right\}_{\beta \in B}$$

est fini. Les restrictions de $\widetilde{\phi}$ aux strates $(Z^0_\beta)_{\beta\ B_0}$ induites par $(Z_\beta)_{\beta\ B}$ sur $Z^0 = Z - \widetilde{\phi}^{-1}(A_0)$ sont donc de rang maximum: quitte à considérer $A'_0 \supset A_0$ un ensemble fini convenable, on peut supposer que les restrictions de $\widetilde{\varphi}$ aux strates de $Z - \widetilde{\phi}^{-1}(A'_0)$ sont de rang maximum et surjectives, i. e. submersives.

Nous pouvons donc appliquer le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather (cf [20] et [10]) au morphisme analytique de $Z - \widetilde{\phi}^{-1}(A'_0)$ sur $\mathbf{P}^1 - A'_0$ induit par $\widetilde{\phi}$: en particulier ce morphisme une fibration topologique localement triviale. En fait la démonstration de Mather montre que, sur chacune des strates $Z_\beta \cap (Z - \widetilde{\phi}^{-1}(A'_0))$ $((\neq \phi)$ on peut construire un champ de vecteurs C^∞ qui donne un « champ de vecteurs » de $Z - \widetilde{\phi}^{-1}(A'_0)$ (dans le fibré tangent de $\mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^1$) qui est intégrable et donc l'intégration réalise la fibration topologique. En particulier, G étant une strate, $G - \widetilde{\phi}^{-1}(A'_0)$ est un fibré topologique localement trivial sur $\mathbf{P}^1 - A'_0$. Comme la projection de G sur $\mathbf{C}^{n+1}$ donne un isomorphisme de $G - \widetilde{\phi}^{-1}(A'_0)$ sur $\mathbf{C}^{n+1} - \widetilde{\phi}^{-1}(A'_0)$, en choisissant $A = A'_0 - \{\infty\}$, où $\{\infty\} = \mathbf{P}^1 - \mathbf{C}$, on obtient une démonstration du théorème *1*.

Dans [4], S. Broughton invoque un théorème de Verdier dans [21], mais l'idée de la démonstration est la même.

Remarque 3. La compactification des fibres de f dans $\mathbf{P}^{n+1}$ donne les variétés algébriques projectives V_λ d'équations :

$$\tilde{f} - \lambda T^d = 0 \qquad (\gamma \in \mathbf{C})$$

Un point de V_λ est singulier si et seulement s'il satisfait le système d'équations :

$$\partial\tilde{f} / \partial X_0 = \ldots = \partial\tilde{f} / \partial X_n = \partial\tilde{f} / \partial T - d\lambda T^{d-1} = 0$$

Par conséquent, pour tout $\lambda \ni \mathbf{C}$, un point « à l'infini » de V_λ, où $\tilde{f} = T = 0$, est singulier si et seulement s'il est singulier sur V_0, i. e. sur la variété d'équation $\tilde{f} = 0$.

2. CAS DES POLYNÔMES À DEUX VARIABLES.

On suppose maintenant que $n = 1$, i. e. la fonction polynôme $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ est donnée par le polynôme

$$f(x,y) = \sum_{\alpha+\beta \leqslant d} c_{\alpha\beta}\, x^\alpha y^\beta .$$

D'après la remarque 2. iii) du §1, le théorème 1 nous permet de parler de la fibre générale F_f de f et de sa caractéristique d'Euler-Poincaré χ_f. Dans le prochain paragraphe nous montrerons le théorème suivant :

THÉORÈME PRINCIPAL. *L'application $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ est une fibration $\mathbf{C}^\infty$ triviale au-dessus d'un voisinage d'un point $z \in \mathbf{C}$ si et seulement si z n'est pas une valeur critique de f et la caractéristique d'Euler-Poincaré de $f^{-1}(z)$ égale celle de la fibre générale F_f de f.*

Remarque 4. Si z est une valeur critique de f, la fibre $f^{-1}(z)$ de f au-dessus de z a un point critique (x_0, y_0) et si f est une fibration C^∞ triviale sur un voisinage de z, la restriction de f à une boule B centrée en (x_0, y_0) et de rayon assez petit donne une fibration triviale $B \cap f^{-1}(D) \to D$ sur un disque assez petit centré en z, à cause du théorème des fonctions implicites. Mais ceci implique que la fibre de Milnor de f en (x_0, y_0) (cf [12] ou [6] § 2) est contractile. Or une conséquence d'un théorème d'A' Campo ([2] Théorème 3) montre que (x_0, y_0) ne peut pas être un point critique, ce qui est contradictoire.

COROLLAIRE 5. *Soit A_f le sous-ensemble de* $\mathbf{C}$ *des valeurs critiques de f et des points où la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre de f diffère de χ_f. Tout sous-ensemble A pour lequel f soit une fibration C^∞ localement triviale au-dessus de $\mathbf{C} - A$ contient l' ensemble A_f.*

Remarque 6. L'ensemble A_f est l'ensemble des valeurs atypiques de f (cf Remarque 1. iv) du §1). D'après la remarque 4, l'ensemble des valeurs atypiques de f contient l'ensemble des valeurs critiques de f : en fait la démonstration donnée dans la remarque 4 marche en toute dimension.

Avant de donner la démonstration du théorème principal dans le §3, nous allons donner un calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une courbe affine plane.

Rappelons:

LEMMA 7. *Si $C \subset \mathbf{P}^2$ est une courbe projective plane de degré d qui est non singulière, la caractéristique d'Euler-Poincaré de C égale $2 - (d-1)\, d - 2)$.*

Preuve : Soit L une droite projective qui coupe transversalement C en d points. On suppose que L est définie par $T = 0$ et que l'équation affine de $C_0 = C - L$ est $g = 0$ dans $\mathbf{P}^2 - L$.

On remarque qu'il existe une déformation de C_0 sur la singularité ordinaire donnée par d droites affines distinctes passant par un point et que C_0 a le type d'homotopie de la fibre de Milnor de cette singularité ordinaire : par conséquent la caractéristique $X(C_0)$ d'Euler-Poincaré de C_0 égale $X(C_0) = 1 - (d-1)^2$.

La suite exacte de Mayer — Vietoris appliquée au recouvrement de C par C_0 et des voisinages des d points de $C\ L$ homéomorphes à des disques donne :

$$X(C) = 1 - (d-1)^2 + d = -d^2 + 3d = 2 - (d-1)(d-2).$$

On suppose maintenant que la courbe projective C a k points singuliers $x_1, \dots, x_k$. On note $\mathcal{O}_{C, x_i}$ $(i = 1, \dots, k)$ les anneaux analytiques locaux de C en les x_i $(i = 1, \dots, k)$. Si L est une droite qui coupe C transversalement en d points et, si $g = 0$ est une équation affine de $C_0 = C - L$ dans $\mathbf{P} - L$, on a :

$$\mathcal{O}_{C, x_i} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2, x_i} / (g) \quad i = 1, \dots, k$$

où $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2, x_i}$ est l'anneau local analytique des germes de fonctions analytiques complexes de $\mathbf{C}^2 = \mathbf{P}^2 - L$ en x_i.

Rappelons qu'à x_i on attache le nombre de Milnor $\mu(C, x_i)$ de C en x_i (cf [6] § 3), i. e.

$$\mu(C, x_i) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2, x_i} \Big/ \left(\partial g / \partial x , \partial g / \partial y \right)$$

Soit $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{C}, x_i}$ la normalisation de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}, x_i}$ (cf [17] Chap. IV). On note $\delta(C, x_i)$ la longueur de $\overline{\mathcal{O}}_{C, x_i} / \mathcal{O}_{C, x_i}$:

$$\delta(C, x_i) = \dim_{\mathbf{C}} \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{C}, x_i} \ / \ \mathcal{O}_{C, x_i}$$

(cf [17] Chap IV § 4). On a la relation :

$$2\,\delta(C, x_i) = \mu(C, x_i) + r(C, x_i) - 1$$

ou $r(C, x_i)$ est le nombre de branches analytiques de C en x_i (cf [12] théorème 10.5 or [15] Théorème 1).

On a alors :

LEMMA 8. *Soit $C \subset \mathbf{P}^2$ une courbe projective complexe plane de degré d ayant en $x_1, \ldots, x_k$ des singularités de nombres de Milnor respectifs $\mu(C, x_1), \ldots, \mu(C, x_k)$. La caractéristique d'Euler-Poincaré de C égale:*

$$X(D) = 2 - (d-1)(d-2) + \sum_{i=1}^{k} \mu(C, x_i)$$

Preuve. En utilisant la formule de genre :

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{k} \delta(c, x_i)$$

(cf [17] Chap IV § 7 (19)) et la relation entre $\delta(C, x_i)$ et $\mu(C, x_i)$ donnée ci-dessus, on peut obtenir une preuve de ce lemme. Nous donnons ici une preuve de ce lemme qui utilise une interprétation topologique du nombre de Milnor (cf [12] theorem (7.2) and Problem 3 of Appendix B résolu dans [13] par exemple).

Soit L une droite projective, comme ci-dessus, qui coupe C transversalement. Soit $g(x, y) = 0$, une équation affine de $C_o = C - L$ dans $\mathbf{C}^2 = \mathbf{P}^2 - L$.

Soient $B_1, \ldots, B_k$ des boules de rayons assez petits centrées en $x_1, \ldots, x_k$.

Soit $\lambda \in C$ un nombre complexe assez petit. Alors le théorème de Bertini (cf [12] Corollary (28) par exemple) implique que l'ensemble des points où $g(x, y) - \lambda = 0$ est une courbe C_λ non singulière qui coupe transversalement le bord des boules B_i ($i = 1, \ldots, k$). Par ailleurs le type d'homotopie de $B_i \cap C_\lambda$

est celui d'un bouquet de $\mu\ (C,\ x_i)$ cercles d'après (12) (Théorème 5. 11 et Théorème 6.5). Donc la caractéristique d'Euler-Poincaré de $B_i \cap C_\lambda$ égale $1 - \mu\ (c,\ x_i)$.

Dans la preuve du lemme précédent on a vu:

$$\chi(C_\lambda) = 1 - (d-1)^2$$

En utilisant un recouvrement de C_0 par les $C_0 \cap B_i\ (i = 1, \ldots, k)$ et $C_0 - \overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} \overset{o}{B_i}$ et la suite exacte de Mayer-Vietris on obtient:

$$\chi(c_0) = 1 - (d-1)^2 - \sum_{i=l}^{k} ((1 - \mu\ (c, x_i)) - 1)$$

car $C_0 \cap B_i\ (i = 1, \ldots, k)$ est contractile (cf [12] Théorème 2.10).

D'où:

$$\chi\ (C) = \chi\ (C_0) + d = 1 - (d-1)^2 + d + \sum_{i=1}^{k} \mu(C,\ x_i)$$

ce qui démontre le théorème.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL.

L'argument essentiel de la démonstration du théorème principal utilise un théorème sur l'équisingularité de [5] (voir aussi [8] §3).

D'après ce que nous avons déjà remarqué (Remarques 4 et 6 du §2) parmi les valeurs atypiques on compte déjà les valeurs critiques de f. Soit donc $z \in \mathbf{C}$. On peut supposer que z n'est pas une valeur critique.

D'après le théorème 1, si λ est une valeur sssez générale, alors $\chi_f = \chi\ (f^{-1}(\lambda))$ et les calculs de §2 donnent.

$$\chi_f = 2 - (d-1)(d-2) + \sum_{i=1}^{k} \mu\ (C_\lambda,\ X_i) - k$$

ou $X_1, \ldots, X_k$ sont les points « à l'infini » de C_λ, i. e. si C_λ est défini par $f - \lambda T^d = 0$, ce sont les points de $f = T = 0$: remarquons que si X_i est non singulier $\mu\ (C_\lambda,\ X_i) = 0$.

On va montrer:

LEMMA 9. *Si z n'est pas une valeur critique, f est une fibration C^∞ triviale sur un voisinage de z si et seulement si $\chi\ (f^{-1}\ (z)) = \chi_f$.*

Compte tenu de la remarque 4 du §2, ce lemme entraine évidemment le théorème principal.

Preuve du lemme.

La condition est évidemment nécessaire puisque tout ouvert contenant z contient des points λ assez généraux tels que $\chi(f^{-1}(\lambda)) = \chi_f$ et, si f est une fibration triviale sur un voisinage de z, la caractéristique d'Euler-Poincaré des fibres de f sur les points de ce voisinage est constante.

Supposons donc $\chi(f^{-1}(z)) = \chi_f$. Par conséquent sur un disque U centré en z, on a $\chi(f^{-1}(\lambda)) = \chi_f$ pour tout $\lambda \in U$.

On va «réaliser» la fibration en intégrant un champ de vecteurs «à la manière» d'Ehresmann.

On considérer dans $\mathbf{P}^2$ des boules $B_1, \ldots, B_k$ assez petites centrées en $X_1, \ldots, X_k$. On note ∂B_i $(i = 1, \ldots, k)$ le bord de ces boules. Par ailleurs soit B une boule de $\mathbf{C}^2$, centrée en un point M quelconque, assez grande pour que $B \cap f^{-1}(z)$ ait le type d'homotopie de $f^{-1}(z)$: comme dans [12] (Corollary (2.8)), on remarque que a fonction carré de la distance à M restreinte a $f^{-1}(z)$ est algébrique réelle et n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques (théorème de Bertini) ; par conséquent si le rayon de B est assez grand, ∂B est transverse a $f^{-1}(z)$ et par un argument classique (cf[11] §3.1) on a que $B^0 \cap f^{-1}(z)$ est difféomorphe à $f^{-1}(z)$.

Soit U_0 un voisinage de z contenu dans U tel que, pour tout $\lambda \in U_0$, $f^{-1}(\lambda)$ est transverse à ∂B et aux sphères ∂B_i $(i = 1, \ldots, k)$. Ceci est possible puisque $f^{-1}(z)$ est transverse à ∂B et ∂B_i $(i = 1, \ldots, k)$.

On construit dans $f^{-1}(U_0)$ à l'extérieur de B_i^0 le champ de vecteurs cherché de telle sorte qu'il soit tangent à ∂B, aux sphères ∂B_i $(i = 1, \ldots, k)$ et relève le champ de vecteurs unité sur $U_0 \subset \mathbf{C}$. Pour cela on fait des constructions locales de tels champs de vecteurs et on les recolle par une partition de l'unité. Il reste à construire le champ de vecteurs dans $f^{-1}(U_0) \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i - L)$ (où L est la droite «à l'infini» $\mathbf{P}^2 - \mathbf{C}^2$). Une fois cette construction faite, a nouveau on recollera ce champ de vecteurs à celui que l'on vient de construire dans le complément des B_i^0 dans $f^{-1}(U_0)$ par une autre partition de l'unité. Il restera à montrer l'intégrabilité du champ de vecteurs.

Pour faire la construction du champ de vecteurs dans $f^{-1}(U_0) \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i - L)$ nous utilisons l'application analytique $\tilde{\varphi}$; $Z \to \mathbf{P}^1$ du § 1 dans le cas d'un polynome de deux variables.

Rappelons que Z est la fermeture dans $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1$ du graphe $G \subset \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} \subset \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1$ de f et que Φ est induit par la projection sur $\mathbf{P}^1$.

On remarque alors que, pour tout $\lambda \in U_0 \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{P}^1$ la fibre $\tilde{\Phi}^{-1}(\lambda)$ contient le point (x_i, λ) ($i = 1,\ldots, k$).

Comme B_i est assez petit, $(B_i \times U_0)\tilde{\Phi}^{-1}(z)$ est contractile (cf [12] Théorème (2.10). Par ailleurs la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\tilde{\Phi}^{-1}(\lambda)$ égale $2(-d-1)(d-2) + \sum_{i=1}^{k} \mu\,(\tilde{\Phi}^{-1}(\lambda),(x_i, \lambda))$, pour tout $\lambda \in U_0$. La semi-continuite du nombre de Milnor montre alors que, si U_0 est un ouvert assez petit contenant z, la famille analytique des courbes $\tilde{\Phi}^{-1}(\lambda)$ est à nombre de Milnor constant le long de $\{x_i\} \times U_0 (i = 1,\ldots, k)$. Dans[5] (ou [8] § 3) nous montrons que ceci implique que la multiplicité de ces courbes $\tilde{\Phi}^{-1}(\lambda)$ est constante le long de $\{x_i\} \times U_0$ ($i = 1,\ldots, k$). Le nombre discriminant de $\tilde{\Phi}^{-1}(\lambda)$ en (x_i, λ) égale la somme du nombre de Milnor et de la multiplicité moins un (cf [18] Chap II 1.2). Le critère discriminant de O.Zariski (cf [23] Théorèm 8.1) montre alors que la famille des courbes Φ (λ) satisfait la condition de Whitney le long de $\{x_i\} \times U_0$ (voir aussi [19] p. 599). On peut donc construire dans $B_i \times U_0$ un champ de vecteurs intégrable qui trivialise $Z \cap (B_i \times U_0)$, qui laisse invaliant $\{x_i\} \times U_0$ et qui relève le champ de vecteurs unité de U_0. Le champ de vecteurs de $Z \cap (B_i \times U_0) - \{x_i\} \times U_0$ se projette dans $\mathbf{C}^2$ en un champ de vecteurs intégrable qu'on recolle à l'aid d'une partition de l'unité avec le champ de vecteurs déjà construit à l'extérieur des B_i^0.

Ceci achève la démonstration du lemme 9 donc du théorème principal.

4. COMMENTAIRES.

Une conséquence intéressante du théorème principal est la suivante :

THÉORÈME 10. *Une fonction polynomiale* f : $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ *est une fibration triviale si et seulement si* f *n'a pas de valeurs critiques et si les caractéristiques d'Euler-Poincaré des fibres de* f *sont constantes.*

En fait si f est une fibration triviale, on a évidemment $\chi_f = 1$. La fibre générale est donc une courbe rationnelle avec une place à l'infini. Un théorème d'Abhyankar et Moh (cf [1] Embedding théorème (1.6)) montre alors que $\chi_f^{\mathbb{C}} = 1$ suffit pour montrer que f est une fibration. Une autre démonstration du théorème d'Abhyankar et Moh a été obtenue par L.Rudolph et utilise des techniques topologiques à rapprocher de celles que nous utilisons ici de façon implicite via le théorème d'équisingularité de [5].

Il y aurait peut-être une relation entre notre théorème principal et la conjecture du Jacobien (cf [3]).

Dans le cas d'une fonction polynôme $f : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$ avec $n \geq 2$, nous nous demandons s'il existe un critère combinatoire simple pour trouver les valeurs atypiques de f comme dans l'énoncé du théorème principal.

(Received February, 20, 1984)

(BIBLIOGRAPHIE)

[1] S.Abhyankar — T.S. Moh, *Emdedding of the line in the plane*, j. reine angew. Math. 276 (1975), 148 — 166.

[2] N.A' Campo, *Le nombre de Lefschetz d'une monodromie*, Indag. Math., 35 (1973), 113—118.

[3] H.Bass – E. Connell — D. Wright, *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), 287 — 330.

[4] S.Broughton, *On the topology of polynomial hypersurfaces*, in Proc. of Symp. of pure Math., vol 40, AMS pub. (1983), 165 – 178.

[5] Lê D.T., *Sur un critère d'équisingularité II*, Note aux C.R.Acad, Sc. Paris, 272, 138—140.

[6] Lê D.T., *Topologie des singularités isolées des hyper—surfaces complexes*, in Singularités à Cargèse, Astérisque 7 — 8 (1973), 171 — 181.

[7] Lê D. T., *Some remarks on relative monodromy*, in «*Real and Complex singularities*», Nordic Summer School, Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff (1977).

[8] Lê D. T., — C.P.Ramanujam, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*, Amer. J. Math. 98 (1976), 67 — 78.

[9] Lê D. T.—B . Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, II, in Proc. of Symp. in pure Math., vol 40, AMS Pub. (1983), 65 – 103.

[10] J. Mather, *Stratifications and mappings*, in Dynamical systems, Acad. Press. New York (1973) (or Notes on topological stability, Harvard Univ., Preprint, July 1970).

[11] J. Milnor, *Morse theory* Ann. of Math. Stud. n°51, Princeton Un. Press, Princeton, USA (1963).

[12] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Stud., n^{0}61, Princeton Un. Press, Princeton, USA (1968).

[13] V. I. Palamodov, *O kranotski golomorfnovo otobrajenia*, J. Anal. i ievo prilojenia (en Russe) (1967), 54–65.

[14] F. Pham, *Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method*, in Proc. of Symp. in pure Math. n^{0}40, AMS Pub. (1983), 319 – 333.

[15] J. J. Risler, *Sur l'idéal Jacobien d'une courbe plane*, Bull. Soc. Math. Fr. 99 (1971), 305 – 311.

[16] L. Rudolph, *Embeddings of the line in the plane*, J. reine angew. Math. 337 (1982), 113 – 118.

[17]. J. P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classe*, Hermann, 2^e edition, Paris (France) (1959).

[18] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, in Singularités a Cargese, Asterisque 7 – 8 (1973).

[19] B. Teissier, *Introduction to equisingularity problems*, Proc. Symp. in pure Math., vol. 29, AMS pub. (1974).

[20] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 240 – 284.

[21] J. L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini – Sard*, Inv. Math. 36 (1976), 295 — 312.

[22] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math. 81 (1964), 496 – 549.

[23] O. Zariski, *Studies in equisingularity II, Equisingularity in codimension one (and characteristic zero)*, Amer. J. Math. 90 (1968), 972–1006.

P.S. Après la rédaction de cet article nous apprenons que M. Suzuki dans J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 241–257, a donné sans démonstrations notre résultat principal dans le cas où la fibre générale de f est algébriquement irréductible. De plus, en utilisant un résultat de I. Wakabayashi (non publié en 1974, mais dont on trouvera une démonstration dans Mem. Fac. Kyushu Un., Series A. Math. Vol. XXXVI, 85 – 105 (Proposition A2 de l'Appendix)), M. Furushima montre que le résultat d'Abhyankar et Moh [1] est déjà obtenu par M. Suzuki dans loc. cit. Remarquons enfin, comme M. Suzuki, que, pour tout z, pour lequel $f^{-1}(z)$ est réduit, $\chi(f^{-1})(z)) \geqslant \chi_f$ (cf Théorème 1 de loc. cit.).