ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 9 N° 1 (1984)

SUR UNE NOUVELLE CLASSE D'ÉQUATION D'ÉVOLUTION DANS LES ESPACES DE HILBERT

C. CASTAING

Institut de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon
34060 MONTPELLIER CEDEX
France

INTRODUCTION

Le but principal de cet exposé est de démontrer l'existence et l'unicité des solutions à variation bornée et continue à droite d'une nouvelle classe d'équation d'évolution. Le problème posé est le suivant. Soit C une multifonction de $[0,T]$ à valeurs convexes fermées non vides d'un espace hilbertien H. Soit $a \in C(0)$. Trouver une fonction $u : [0, T] \to H$, à variation bornée, continue à droite telle que

$$\begin{cases} u(0) = a \\ -\dfrac{du}{|du|}(t) \in \partial\psi_{C(t)}(u(t)), \ |du| - p.p. \end{cases}$$

où du est la mesure différentielle de u, $|du|$ est la variation de u, $\dfrac{du}{|du|}(.)$ est la densité de du par rapport à $|du|$ et $\partial\psi_{C(t)}(x)$ est le sous-différentiel au point $x \in C(t)$ de la fonction indicatrice de C (t),

$$\psi_{C(t)}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in C(t) \\ +\infty \text{ si } x \notin C(t) \end{cases}$$

Récemment, Tanaka ([13]) a démontré l'existence et l'unicité de l'équation d'évolution précédente dans le cas particulier suivant : H est l'espace $\mathbf{R}^l$, $C(t) = D - w(t)$, $t \in [0, T]$, où D est un convexe fermé d'intérieur non vide dans $\mathbf{R}^l$ et w est une fonction continue de $[0, T]$ à valeur dans $\mathbf{R}^l$. De façon précise, Tanaka démontre qu'il existe une fonction (unique) à variation bornée et continue $u: [0, T] \mapsto \mathbf{R}^l$ vérifiant : $u(0) = a \in C(0)$, $u(t) + w(t) \in D$ pour tout $t \in [0, T]$, $\int_{t_1}^{t_2} [h - (u + w)]\, du \geqslant 0$ pour $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$ et pour toute fonction continue $h: [0, T] \to D$. Il est bon d'établir le lien entre les résultats de Castaing ([1]), [2], [3]), Moreau ([10]) et Tanaka ([13]). Dans les travaux de Castaing et Moreau, si C est une multifonction à variation bornée et continue à droite (ou à rétraction continue à droite) de $[0, T]$ à valeurs convexes fermées non vides de H, alors le problème d'évolution précédent admet une solution unique à variation bornée et continue à droite. Dans l'article de Tanaka, H est de dimension finie et C est la translaté d'un convexe fermé d'intérieur non vide D par une fonction continue w qui n'est pas nécessairement à variation bornée. Bien évidemment si w est à variation bornée, le résultat de Tanaka est un cas particulier des résultats obtenus par Castaing, Moreau car, alors, la multifonction $C: t \to D - w(t)$ est à variation bornée sur $[0,T]$. *La nouveauté dans l'équation considérée par Tanaka est la suivante : la perturbation w n'est pas nécessairement à variation bornée.* L'intérêt d'obtenir l'existence et l'unicité de ce problème d'évolution est que cela permet à Tanaka de traiter un problème d'évolution avec perturbation stochastique et condition au bord dans le cas où la multifonction C est le translaté d'un convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^l$ par une application continue de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^l$; le cas où $l=1$ est connu des spécialistes des équations différentielles stochastiques. A ce sujet, je renvoie le lecteur à la bibliographie de l'article de Tanaka. Signalons aussi aux lecteurs intéressés le récent résultat obtenu par Krée ([8]) sous des hypothèses différentes, concernant ce problème d'évolution stochastique. En fait, il est formellement possible d'envisager la perturbation stochastique d'une équation d'évolution de la forme

$$du(t) + A_t(u(t))dt \ni b(t, u(t))dt + \sigma(t,u(t))\, dB(t)$$

où A_t est un opérateur maximal monotone, B un mouvement brownien et les coefficients b, σ satisfont aux hypothèses habituelles dans les équations différentielles stochastiques. Une telle équation d'évolution est difficile à résoudre dans toute sa généralité ; les difficultés proviennent du terme $\sigma(t, u(t))\, dB(t)$ même dans le cas où σ est identiquement égal à 1. Lorsque σ est nul, l'équation d'évolution précédente se réduit aux équations d'évolution avec perturbation convexes et non convexes, déjà étudiées par Gamal ([6]) dans les espaces de Banach

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A_t(u(t)) + F(t, u(t)) \\ u(0) = a \in \operatorname{Dom} A_0 \end{cases}$$

Dans cet exposé, on présente quelques résultats de compacité et de convergence permettant de résoudre le problème d'évolution posé dans le cas où la multifonction C est de la forme

$$C(t) = \Gamma(t) - w(t), \ t \in [0, T]$$

où Γ est une multifonction à variation bornée et continue à droite (ou à rétraction continue à droite) de $[0, T]$ à valeurs convexes fermées non vides de H et w une fonction *continue* de $[0, T]$ à valeur dans H telles que $\Gamma(t) - w(t)$ contienne une boule $B(\xi, r)$ de H pour tout $t \in [0, T]$. Si w est à variation bornée, le problème posé admet une solution unique, à variation bornée et continue à droite d'après les travaux de Castaing et Moreau et ceci, sans aucune condition supplémentaire portant sur $\Gamma - w$. Par contre, si w n'est pas à variation bornée, il est trivial de voir que le problème posé n'admet pas de solution si la condition de régularité: $C(t) = \Gamma(t) - w(t) \supset B(\xi, r)$ pour tout $t \in [0, T]$, n'est pas satisfaite. Il suffit de prendre $\Gamma(t) = \{0\}$, $\forall\, t \in [0, T]$ pour se convaincre que le problème posé n'admet pas de solution à variation bornée et continue à droite.

Pour terminer ce paragraphe, signalons que la résolution du problème posé nécessite des techniques nouvelles qui sont totalement différentes de celles habituellement utilisées dans les problèmes de perturbation des équations d'évolution rencontrées dans la littérature.

1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Rappels et Notations. Une multifonction Γ de $[0, T]$ à valeurs convexes fermées non vides d'un espace de Banach est *«à variation bornée et continue à droite» (V B C D)* s'il existe une fonction positive croissante continue à droite sur $[0, T]$, v, telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $t \in [0, T]$, tout $x \in \Gamma(t)$, il existe $\tau \in]t, t+\varepsilon]$ et $y \in \Gamma(\tau)$ tel que $y - x \in (v(\tau) - v(t))\, B$ où B est la boule unité de E. Remarquons que toute fonction $u: [0, T] \to E$, à variation bornée et continue à droite est $V\ B\ C\ D$ au sens précédent.

Désignons par $[0, T]_{\mathcal{C}_d}$ l'intervalle $[0, T]$ muni de la topologie droite et par E_σ l'espace vectoriel E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$. Si E est réflexif, si Γ est une multifonction $VBCD$, de graphe séquentiellement fermé dans $[0, T] \times E_\sigma$, de $[0, T]$ à valeurs convexes fermées non vides de E, il existe ([1], [2], [3]) une application $u: [0, T] \to E$, $V\ B\ C\ D$, qui est sélection de Γ (i.e. $u(t) \in \Gamma(t)$ pour tout $t \in [0, T]$); de façon précise, étant donné $a \in \Gamma(0)$, il existe $u: [0,T] \to E$ de la forme

$$u(t) = a + \int_{[0,\ t]} \dot{u}(s)\, v(ds),\ t \in [0,T],$$

où ν est la mesure borélienne positive associée à v sur $[0, T]$ et $u : [0, T] \to E$ une application ν-mesurable de $[0, T]$ dans B. L'existence d'une telle sélection repose sur méthode de discrétisation et sur la compacité faible de la boule unité de $L_E^\infty([0, T], \nu)$ ([1], [2], [3]). Ce résultat d'existence est valable pour le cas où F est un espace de Banach arbitraire si l'on remplace dans la définition « *à variation bornée et continue à droite* » de Γ, la boule unité B par un convexe faiblement compact K. Ceci n'est pas trivial car la compacité faible de l'ensemble

$$S_K = \{u \in L_E^1([0, T], \nu) \mid u(t) \in K \quad \nu\text{. p. p.}\}$$

n'est pas triviale ([4], [5]). Par contre, S_B n'est pas faiblement compact dans $L_E^1([0, T], \nu)$ si E est un espace de Banach non réflexif. D'où certaines précautions nécessaires si l'on désire obtenir des résultats de ce type dans le cas des espaces de Banach arbitraires. Nous verrons plus loin que l'existence des solutions du problème posé dans l'introduction fournit, en particulier, des nouveaux résultats de sélection $V\,B\,C\,D$ d'une classe de multifonctions.

Le résultat suivant est connu et admet une version multivoque ([4], theor. *VI. 3*, p. *167*). Nou reproduisons ici un énoncé qui s'applique directement au problème en vue.

THÉORÈME 1. *Soit E un espace de Banach réflexif séparable et $u : [0, T] \to E$ une fonction VBCD avec $u(0) = 0$. Alors il existe une mesure borélienne m sur $\mathcal{B}([0, T])$ à valeur dans E telle que*

$$m([0, t]) = u(t) = \int_{[0, t]} \gamma(s) \mid m \mid (ds),\ t \in [0, T]$$

où γ est une application $|m|$-mesurable de $[0, T]$ dans la boule unité B de E.

Démonstration. En effet, on a

$$\| u(t) - u(\tau) \| \leqslant v(t) - v(\tau)$$

pour $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, où v est une fonction positive, croissante continue à droite sur $[0, T]$. Il existe une mesure borélienne m définie sur $\mathcal{B}([0, T])$ à valeur dans E et une mesure borélienne positive ν définie sur $\mathcal{B}([0,T])$ telle que

$$m([\tau, t]) = u(t) - u(\tau),\ t > \tau$$
$$\nu([\tau, t]) = v(t) - v(\tau),\ t > \tau$$

Chacune des mesures scalaires $m_{x'} = \langle x', m(.) \rangle$ avec $\| x' \| \leqslant 1$ est dominée par la mesure ν. Donc la mesure $|m| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} |m_{x'}|$ l'est aussi et l'on a

$$m(A) \in |m|(A)\, B$$

pour tout $A \in \mathcal{B}$ ([0, T]. Il existe donc une application $| m |$ — mesurable γ de [0, T] dans B telle que

$$m(A) = \int_A \gamma(s) \, | m | (ds)$$

pour tout $A \in \mathcal{B}$ ([0, T]). Comme $u(0) = 0$, en faisant $A = [0, t]$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$u(t) = \int_{[0,t]} \gamma(s) \, | m | (ds)$$

Remarques. 1) La mesure m est la mesure différentielle du de la fonction u. On notera

$$u(t) = \int_{[0,t]} \gamma(s) \, | du | (s)$$

2) En utilisant les arguments de la démonstration du théorème VI. 3 p. 167 de Castaing—Valadier ([4]), il est possible de vérifier qu'une fonction $u : [0,T] \to E$, $V\,B\,C\,D$, est dérivable p.p. pour la mesure de Lebesgue.

3) Si E n'est pas réflexif, il est classiquement connu qu'une fonction lipschitzienne $u : [0, T] \to E$ n'est pas dérivable p.p. L'exemple classique consistant à prendre pour E, l'espace $L^1([0, T], dt)$ et pour u, l'application $u : t \to \chi_{[0,\, t]}$ de [0, T] dans $L^1([0, T], dt)$ montre que u n'est pas scalairement dérivable sur [0, T].

THÉORÈME 2. *Soit Γ une multifonction de $[0, T]$ à valeurs convexes fermées non vides d'un espace hilbertien séparable H. On suppose que Γ est $V\,B\,C\,D$, de graphe séquentiellement fermé dans $[0, T]_{\mathcal{C}_d} \times H_\sigma$ et que la fonction $(t, x) \to \delta^*(x, \Gamma(t))$ est semi continue inférieurement sur $[0, T]_{\mathcal{C}_d} \times B_\sigma$ ($\delta^*(x, \Gamma(t))$ est la fonction d'appui de Γ et B_σ est la boule unité B muni de la topologie faible). Alors, pour $a \in \Gamma(0)$, il existe $u : [0, T] \to H$ de la forme*

$$u(t) = a + \int_{]0,t]} \gamma(s) \, | du | (s), \; t \in [0, T]$$

où γ est une application $| du |$ — mesurable de $[0, T]$ dans B, qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :

$$(i) \begin{cases} \forall\, t \in [0, T],\; u(t) \in \Gamma(t) \\ -\gamma(t) \in \partial\, \psi_{\Gamma(t)}(u(t)),\; | du | - p.\,p. \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} \forall\, t \in [0, T],\; u(t) \in \Gamma(t) \\ \sup\limits_{h \in S_\Gamma^{V\,B\,C\,D}} \int_{[0,T]} [\langle h, -du \rangle + \langle u, du \rangle] \leqslant 0 \\ \text{où } S_\Gamma^{V\,B\,C\,D} \text{ est l'ensemble des sélections } V\,B\,C\,D \text{ de } \Gamma \end{cases}$$

Démonstration. L'existence et l'unicité de u est due à Castaing ([2], [3]) (et à Moreau ([10]) si l'on suppose Γ à rétraction continue à droite). Compte tenu du théorème 1 et des notations introduites dans la remarque 1) de ce théorème la condition (i) signifie que u est solution de l'équation d'évolution

$$\begin{cases} u(0) = a \in \Gamma(0) \\ -\dfrac{du}{|du|}(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t)}(u(t)), \quad |du| - p.p. \end{cases}$$

L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) n'est pas triviale dont la démonstration repose sur un résultat dû à Valadier ([14], lemme, p. 13.3) qui affirme que l'ensemble S_Γ^{VBCD} est dense dans l'ensemble S_Γ^∞ des sélections $|du|$ — mesurables et bornées de Γ pour la topologie $\sigma(L_H^\infty([0, T], |du|), L_H^1([0, T], |du|))$ car (i) équivaut à

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], \; u(t) \in \Gamma(t) \\ \sup\limits_{h \in S_\Gamma^\infty[0, T]} \int [\langle h, -du\rangle + \langle u, du\rangle] \leqslant 0 \end{cases}$$

D'où (i) $\Leftrightarrow$ (ii) car on a, grâce au résultat de densité cité, la formule suivante (Valadier [14]),

$$\delta^*(du, S_\Gamma^{VBCD}) = \int_{[0,T]} \delta^*\left(\frac{du}{|du|}(t), \Gamma(t)\right) |du|(t) = \delta^*\left(\frac{du}{|du|}, S_\Gamma^\infty\right) .$$

Dans tout le reste de ce papier, H est un espace hilbertien séparable.

2. RÉSULTATS DE COMPACITÉ ET DE CONVERGENCE

THÉORÈME 3. *Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions V B C D définies sur $[0, T]$ à valeurs dans H telle que $u_n(0) = 0$, $\forall n \geqslant 1$ et telle que la suite des mesures différentielles $(du_n)_{n \geqslant 1}$ soit bornée, i.e., $\sup_n \int_{[0, T]} |du_n| < \infty$. Alors il existe un filtre $\mathcal{F}$ plus fin que le filtre de Fréchet et une fonction V B, $u : [0, T] \to H$ telle que*

$$\lim_{\mathcal{F}} \langle x, u_n(t)\rangle = \langle x, u(t)\rangle$$

pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in H$.

De plus, si u est continue à droite, alors pour toute fonction continue h: $[0, T] \to H$ on a

$$\lim_{\mathcal{F}} \int h \, du_n = \int h \, du$$

Démonstration. Chacune des u_n peut se mettre sous la forme

$$u_n(t) = \int_{[0,t]} \gamma_n(s)\, |du_n|(s) \quad , \quad t \in [0, T]$$

où γ_n est une application $|du_n|$ - mesurable de $[0, T]$ dans B. Soit $\mu_n = |du_n|$ et soit $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \dfrac{\mu_n}{\|\mu_n\|}$. Chacune des μ_n est de base μ. Donc il existe $g_n : [0, T] \to \mathbf{R}$, μ—intégrable tel que $\mu_n = g_n \mu$.

Compte tenu de l'hypothèse, il est immédiat que la suite (g_n) est bornée dans $L^1_{\mathbf{R}}([0, T], \mu)$ et il en est de même de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ avec $f_n = g_n \gamma_n$ $(n \geqslant 1)$ dans $L^1_H([0, T], \mu)$. Soit l une valeur d'adhérence de $(f_n)_{n \geqslant 1}$ dans le bidual faible de $L^1_H([0, T], \mu)$. Il existe un filtre $\mathcal{G}$ plus fin que le filtre de Fréchet tel que

$$\lim_{\mathcal{G}} \langle f_n , v \rangle = l(v)$$

pour tout $v \in L^{\infty}_H([0, T], \mu)$. En particulier, pour $v = \chi_{[0,t]}\, x$, $(x \in H)$, on a

$$\lim_{\mathcal{G}} \langle x, u_n(t) \rangle = l(\chi_{[0,t]}\, x)$$

Posons $\langle x, u(t) \rangle = l(\chi_{[0,t]}\, x)$ pour $t \in]\, 0, T]$ et $x \in H$ et $u(0) = 0$.
Alors u est à variation bornée et on a

$$\lim_{\mathcal{G}} \langle x, u_n(t) \rangle = \langle x, u(t) \rangle$$

pour tout $x \in H$ et tout $t \in [0, T]$.

Supposons u continue à droite. Démontrons le deuxième point de l'énoncé.

Soit $h : [0, T] \to H$ une application continue et soit $(S_m)_{m \geqslant 1}$ une suite de subdivisions de $[0, T]$,

$$0 = t_0^m < t_1^m < \dots < t_{v_m}^m = T$$

telle que

$$\lim_{n \to \infty} l(S_m) = 0 \text{ où } l(S_m) \text{ est le pas de } S_m .$$

On a

$$\lim_{m \to \infty} \; \sup_{0 \leqslant i \leqslant v_m} \; \sup_{t_i^m \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_{i+1}^m} \| h(t) - h(\tau) \| = 0 .$$

Soit τ_i^m un point arbitrairement choisi dans $[t_i^m, t_{i+1}^m]$ et posons $h_m(t)=h(\tau_0^m)$ pour $t \in [0, t_1^m]$ et $h_m(t) = h(\tau_i^m)$ pour $t \in]t_i^m, t_{i+1}^m]$ pour $i > 0$. Comme u est continue à droite et comme on a

$$l(\chi_{[0,t]}\, x) = < x, u(t) >$$

pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in H$, on en déduit

$$l(h_m) = \int h_m \, du$$

D'où

$$\lim_{m\to\infty} l(h_m) = l(h) = \lim \int h_m \, du$$
$$= \int h \, du$$

Comme on a

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int h \, du_n = l(h)$$

on en déduit que

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int h \, du_n = \int h \, du$$

Remarques 1) Avec les notations de la démonstration du théorème précédent, pour tout $\varphi \in L_H^\infty([0, T], \mu)'$, tout $a \in H$, désignons par $S_a \varphi : [0, T] \to H$ la fonction à variation bornée définie par

$$\forall\, t \in [0,T], \forall\, x \in H, < x, (S_a \varphi)(t) > = < x, a > + \varphi(\chi_{[0,t]}\, x)$$

Alors on a, pour tout $t \in [0, T]$

$$u_n(t) = S_0\, f_n(t) = \int_{[0,t]} f_n(s)\, \mu(ds)$$

$$u(t) = S_0\, l(t)$$

$$\int u_n \, du_n = < S_0\, f_n, f_n >$$

où $< .,. >$ désigne le produit scalaire pour la dualité $(L_H^\infty([0, T], \mu), L_H^\infty([0, T], \mu)')$. Si (u_n) converge uniformément vers u pour la topologie forte de H, alors

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int u_n \, du_n = \lim_{\mathfrak{F}} < S_0\, f_n, f_n > = < S_0\, l, l >$$

2) L'utilisation du dual de $L_H^\infty([0, T], \mu)$ semble être inutilement sophistiquée. Signalons cependant qu'il est possible de se passer de cet artifice dans certains cas particuliers. Par exemple, supposons $H = \mathbf{R}^l$ et que la suite (u_n) converge

simplement vers une fonction à variation bornée non nécessairement continue à droite u. Il s'agit de vérifier qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int h\, du_n = \int h\, du$$

pour tout h continue, où l'intégrale est prise au sens de Stieljes. En effet, avec les notations de la démonstration précédente, considérons des sommes de Riemann,

$$\Sigma_{m,n}(h) = \sum_{i=0}^{\nu_m - 1} < h(\tau_i^m),\ u_n(t_{i+1}^m) - u_n(t_i^m) >$$

Alors on a, pour tout m et tout n fixés,

$$\begin{aligned}\| \Sigma_{m,n}(h) - \int h\, du_n \| &\leqslant \int_{[0,T]} \| h(t) - h_m(t) \|\ | du_n | (t) \\ &\leqslant \sup_{t\in[0,T]} \| h(t) - h_m(t) \| \int_{[0,T]} | du_n |\end{aligned}$$

Comme la suite (du_n) est bornée, on a

$$\lim_{m\to\infty} \Sigma_{m,n}(h) = \int h\, du_n$$

uniformément par rapport à n. Par ailleurs, on a, pour tout m fixé,

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{m,n}(h) = \sum_{i=0}^{\nu_m - 1} < h(\tau_i^m), u(t_{i+1}^m) - u(t_i^m) >$$

D'où

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \Sigma_{m,n}(h) &= \lim_{n\to\infty} \int h\, du_n \\ &= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Sigma_{m,n}(h) \\ &= \lim_{m\to\infty} \Sigma_m(h) = \int h\, du\end{aligned}$$

où l'on a posé $\Sigma_m(h) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\nu_m - 1} < h(\tau_i^m), u(t_{i+1}^m) - u(t_i^m) >$

3) Si H est $\mathbf{R}^l$ et si l'on suppose qu'il existe $h : [0,T] \to \mathbf{R}^+$, croissante continue à droite sur $[0,T]$ telle que

$$\| u_n(t) - u_n(\tau) \| \leqslant h(t) - h(\tau)$$

pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, alors la fonction limite u dans l'énoncé du théorème précédent est continue à droite.

4. Dans certains problèmes d'évolution, u_n apparait comme solution d'une équation d'évolution. Alors, moyennant des conditions de régularité que nous précisons plus loin, la suite considérée dans l'énoncé du théorème précédent converge uniformément vers une fonction à variation bornée et continue à droite u. Dans ce cas, la convergence de la suite $(\int h\, du_n)$ vers $\int h\, du$ pour h continue (resp. à variation bornée et continue à droite) est plus directe (cf. théorème 4 suivant).

Voici maintenant un résultat de convergence qui intervient dans l'existence des solutions.

THÉORÈME 4. *Soit Γ une multifonction de $[0, T]$ à valeurs convexes fermées non vides de H et vérifiant les conditions du théorème 2.*

Soit $(w_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions $VBCD$ sur $[0,T]$ à valeurs dans H convergeant uniformément vers $w : [0,T] \to H$, telle que $w_n(0) = w(0)$, $\forall n \geqslant 1$ Soit $u_n : [0,T] \to H$ la solution VBCD de l'équation d'évolution

$$\begin{cases} -\dfrac{du_n}{|du_n|}(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t) - w_n(t)}\,(u)_n(t)) \\ u_n(0) = a \in \Gamma(0) - w_n(0) \end{cases}$$

Si la suite $(du_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée, c'est à dire, $\sup_n \int |du_n| < +\infty$, alors il existe une mesure de Radon positive μ sur $[0, T]$, un élément $l \in L^\infty_H([0,T], \mu)$ telle que l'on ait :

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} u_n(t) \overset{déf.}{=} u(t) = S_a\, l(t) \text{ uniformément en } t \in [0, T],$$

$$(ii)\ \forall\, h \in L^\infty_H([0, T], \mu),\ < h - (u + w), l > \geqslant 0$$

Démonstration. Compte tenu du fait que pour toute fonction $VBCD$ φ: $[0, T] \to H$, avec $\varphi(0) = 0$, on a,

$$\frac{1}{2} \|\varphi(t)\|^2 \leqslant \int_{[0,\, t]} \varphi\, d\varphi$$

pour tout $t \in [0, T]$([9], [13]), on en déduit, en utilisant la monotonie de l'opérateur $\partial\psi_\Gamma$, que

$$\frac{1}{2} \| u_n(t) - u_m(t) \|^2 \leqslant \int_{[t,\, 0]} < w_m - w_n, du_n - du_m >$$

Comme on a $\sup_n \int_{[0,T]} |du_n| < +\infty$, et comme la suite $(w_n)_{n \geqslant 1}$ est uniformément convergente, on a

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \int_{[0,\,t]} < w_m - w_n, du_n - du_m > = 0$$

car, en utilisant les notations de la démonstration du théorème 3,

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \int_{[0;\,t]} w_m - w_n, du_n - du_m >$$

$$= \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \int_{[0,\,t]} < w_m - w_n, - f_n - f_m > d\mu = 0$$

Donc (u_n) converge uniformément vers $u : [0,\ T] \to H$ qui est à variation bornée et continue à droite d'après le théorème 3 et l'on a, $\forall\ t \in [0, T]$, $u(t) = S_a\, l(t)$ en appliquant les notations de la remarque 1) du théorème 3. Reste à prouver la relation (ii) de l'énoncé. Puisque $(u_n + w_u)$ converge uniformément vers $u + w$, on a, en appliquant les notations de la démonstration du théorème 3,

$$\lim_{\mathfrak{F}} < u_n + w_n, f_n > = < u + w, l >$$

Comme u_n est solution de l'équation d'évolution

$$\begin{cases} -\dfrac{du_n}{|\,du_n\,|}\,(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t) - w_n(t)}\,(u_n(t)) \\ u_n(0) = a \in \Gamma(0) - w_n(0) \end{cases}$$

on a, en désignant par $S_\Gamma^\infty(\mu)$ l'ensemble des sélections μ-mesurables et bornées de Γ, $\forall\ n$, $\delta^*(-f_n, S_\Gamma^\infty(\mu)) + < u_n + w_n, f_n > \leqslant 0$ où $\delta^*(.,\ S_\Gamma^\infty(\mu))$ désigne la fonction d'appui de l'ensemble convexe fermé $S_\Gamma^\infty(\mu)$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) pour la dualité $(L_H^\infty([0,\ T],\ \mu),\ L_H^\infty([0, T],\ \mu)')$. Puisque $\delta^*(S_\Gamma^\infty(\mu))$ est convexe semi continue inférieurement pour $\sigma(L_H^\infty([0, T],\ \mu))\ L_H^\infty([0,T], \mu)$ et $\lim_{\mathfrak{F}} f_n = l$ pour cette topologie, on en déduit que

$$\delta^*(-e, S_\Gamma^\infty(\mu)) + < u + w, l > \leqslant 0$$

ou

(ii) $$\forall\ h \in S_\Gamma^\infty(\mu), < h - (u + w), l > \geqslant 0.$$

Remarques. 1) Si Γ est lipschitzienne ainsi que les w_n, la fonction u est solution de l'équation

$$-\frac{du}{du}(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t) - w(t)}\,(u(t)),\ |\,du\,| - p\,.\,p.$$

En effet, pour tout $h \in s_\Gamma^{VBCD}$, on a

$$| \int < h - (u + w), du > - \int < h - (u_n + w_n), du_n > |$$
$$\leqslant | \int < (u+w) - (u_n + w_n), du_n > | + | \int < h - (u + w), du_n - du > |$$

Comme u_n, u et w sont *continues*, en prenant la limite suivant le filtre $\mathcal{F}$ dans ces inégalités (cf. Théorème 2), on obtient

$$0 \leqslant \lim_{\mathcal{F}} \int < h - (u_n + w_n), du_n > = \int < h - (u + w), du >$$

Ainsi, dans le cas considéré, u est aussi solution au sens de Tanaka ([13]). En fait, on a un résultat plus précis.

2) Le théorème précédent s'applique aussi au cas où Γ est à rétraction continue à droite au sens de Moreau ([10]).

3. RÉSULTATS D'EXISTENCE.

Le résultat suivant est crucial dans les problèmes d'existence que nous avons en vue.

THÉORÈME 5. *Soit Γ une multifonction VBCD de $[0, T]$ à valeurs convexes fermées non vides de H, vérifiant les conditions du théorème 2 et telle que $\Gamma(t) \supset B$, pour tout $t \in [0, T]$. Soit $a \in \Gamma(0)$ avec $\| a \| \geqslant 1$ et soit $u : [0, T] \to H$ la solution à variation bornée et continue à droite de l'équation d'évolution*

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{|du|}(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t)}(u(t)) \\ u(0) = a \end{cases}$$

Alors $\int_0^T |du|$ est inférieure ou égale à la longueur de l'arc de développante de cercle (du cercle de rayon 1) compris entre les cercles de rayon 1 et $\| a \|$.

Démonstration. L'existence et l'unicité est donnée par le théorème 2. L'estimation $\int_0^T |du|$ est conséquence d'un résultat de Valadier (cf. aussi Moreau [12] pour un résultat du même type) que nous mettons sous la forme d'un lemme.

LEMME (*cf. Appendice*). *Soit $C_1, C_2, \dots C_n$ une suite finie de convexes fermés d'un espace de Hilbert contenant toute la boule de centre 0 de rayon 1. Soit $a \in H$ avec $\| a \| \geqslant 1$, et soit $x_i = proj_{C_i}(x_{i-1})$ $(i = 1, \dots, x)$, $x_0 = a$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \| x_i - x_{i-1} \|$ est inférieure ou égale à la longueur de l'arc de développante de cercle (du cercle de rayon 1) compris entre les cercles de rayon 1 et $\| a \|$.*

D'après les résultats de Castaing ([2], [3]) il existe une suite de subdivisions $(S_m)_{m \geqslant 1}$ de $[0, T]$

$$0 = t_0^m < t_1^m < \ldots < t_{\nu_m}^m = T$$

telle que $\lim\limits_{m \in \infty} l(S_m) = 0$ et une suite $(u_m)_{m \geqslant 1}$ de fonctions $VBCD$ de $[0, T]$ dans H ainsi définies qui converge simplement sur $[0, T]$ vers la solution u pour la topologie faible $\sigma(H, H)$. On pose $x_0^m = a$, $x_i^m = \mathrm{proj}_{\Gamma(t_i^m)}\, x_{i-1}^m\ (i = 1 \ldots, \nu_m)$.

$u_m(t) = x_i^m$ pour $t \in [t_i^m, t_{i+1}^m[$, $u_m(t_{\nu_m}^m) = x_{\nu_m}^m$. On a, pour tout $t \in [t_i^m, t_{i+1}^m]$,

$$\frac{du_m}{|du_m|}(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t_{i+1}^m)}(u_m(t_{i+1}^m))$$

et, la suite $(du_m)_{m \geqslant 1}$ est bornée, c'est à dire, $\sup\limits_m \int |du_m| < +\infty$, d'après le lemme précédent. En vertu du théorème 3, il existe un filtre F plus fin que le filtre de Fréchet tel que

$$\lim_{\mathcal{F}} \int h\, du_m \int h\, du$$

pour toute fonction continue $h : [0, T] \to H$. Or, pour toute mesure vectorielle à variation bornée $m : \mathcal{B}([0, T]) \to H$, on a, ([7], theor. 1. p. 5)

$$|m|([0, T]) = \sup_{\|h\|_u \leqslant 1} \langle h, m \rangle$$

où $\|h\|_u$ est la norme uniforme de $h \in \mathcal{C}_H([0, T])$, ce qui implique que l'application

$$m \to |m|[0, T] = \int_{[0, T]} d|m|$$

est vaguement semi continue inférieurement sur l'espace $\mathcal{M}^{VB}([0, T])$ des mesures vectorielles à variation bornée de $\mathcal{B}([0, T])$ dans H. Comme $\sup\limits_m \int |du_m|$

$< +\infty$ et comme

$$\lim_{\mathcal{F}} du_m = du$$

vaguement, on en déduit que

$$+\infty > \sup_m \int |du_m| \geqslant \int |du|$$

Remarques.

1) Le résultat précédent reste valable si l'on suppose que Γ est à rétraction continue à droite au sens de Moreau ([10]). Dans ce cas la suite

$(u_m)_{m \geqslant 1}$ construite dans la démonstration du théorème précédent *converge uniformément* vers la solution u (cf, Moreau [10], Prop. 3b.) et il n'y a pas de changement dans la suite de la démonstration.

2) L'utilisation du résultat de Johnson ([7]) caractérisant le dual de $\mathcal{C}_H[0,T]$ semble être nouvelle dans le problème posé ici. Si H est $\mathbf{R}^l$, on peut se contenter de la remarque 2) du théorème 3 qui montre que la suite (du_m) converge vaguement vers du . D'où

$$\sup_m \int | du_m | \geqslant \liminf_m \int | du_m | \geqslant \int | du | .$$

En combinant le théorème 4 et le théorème 5, on obtient le théorème d'existence suivant qui résout le problème posé.

THÉORÈME 6. *Soit Γ une multifonction lipschitzienne de $[0, T]$ à valeurs convexes fermées non vides de H et $(w_n)_{n \geqslant l}$ une suite de fonctions lipschitziennes définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H convergeant uniformément vers $w : [0, T] \to H$ telle que $w_n(0) = w(0)$, $\forall\, n \geqslant 1$. Si, pour tout $n \geqslant 1$, tout $t \in [0, T]$, $\Gamma(t) + w_n(t)$ contient la boule unité $B\ (0,1)$, l'équation d'évolution.*

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{|du|}(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t)-w(t)}(u(t)), |du| - p.p. \\ u(0) = a \in \Gamma(0) - w(0) \text{ avec } \| a \| \geqslant 1 \end{cases}$$

admet une solution unique à variation bornée et continue sur $[0,T]$.

Démonstration. La démonstration est immédiate car elle résulte directement des théorèmes 4 et 5. En effet, pour chaque n fixé, soit u_n la solution lipschitzienne de l'équation.

$$\begin{cases} -\dfrac{du_n}{|du|_n}(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t)-w_n(t)}(u_n(t)), \qquad |du_n| - p.p. \\ u_n(0) = a \in \Gamma(0) - w(0) \end{cases}$$

D'après le théorème 5, on a $\sup_n \int |du_n| < +\infty$. Il résulte du théorème 4 que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u *VBC* de $[0,T]$ à valeur dans H, solution de l'équation d'évolution

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{|du|}(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t)-w(t)}(u(t)), \quad |du| - p.p. \\ u(0) = a \in \Gamma(0) - w(0) \end{cases}$$

L'unicité se démontre comme dans Moreau [10] ou Tanaka [13] et est laissée au lecteur.

Remarques. 1) L'hypothèse « $\Gamma(t) + w_n(t) \supset B\ (0,1)$ » pour tout $t \in [0,T]$ et tout $n \geqslant 1$ n'est pas restrictive. Plaçons nous dans le cas particulier où $\Gamma(t)$ contient la boule $B(0,1)$ et $w: [0,T] \to H$ continue. Alors il est possible de décomposer $[0,T]$ en un nombre fini d'intervalles $[0,t_1]$, $[t_1, t_2]$, ... $[t_k, T]$ tel que la restriction de $\Gamma(.) + w(.)$ à chacun de ces intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ contienne une boule $B(x_i, r_i)$ de centre x_i de rayon r_i. Ceci permet de résoudre l'équation d'évolution.

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{|du|}(t) \in \partial\psi_{\Gamma(t)-w(t)}(u(t)) \\ u(0) = a \in \Gamma(0) - w(0) \end{cases}$$

sur $[0,t_1]$, puis sur $[t_1, t_2]$ avec la condition initiale: valeur en t_1 = valeur de la solution sur $[t_0, t_1]$ en t_1, et ainsi de suite.

2) Il est possible d'obtenir une version stochastique des résultats précédents en remplaçant Γ par une multifonction séparément mesurable et séparément VBCD et w par un processus stochastique.

Pour terminer cet exposé, je tiens à remercier M. Valadier pour l'aide constante qu'il m'a apportée au cours de la rédaction de ce travail.

APPENDICE (M. VALADIER)

PROPOSITION. — *Soit $C_1, ..., C_n$ des convexes fermés d'un espace de Hilbert contenant toute la boule unité $B(0,1)$. Soit x_0 tel que $\|x_0\| \geqslant 1$ et $x_1, ..., x_n$ définis par récurrence par*

$$x_i = proj_{C_i}(x_{i-1})$$

Alors $\sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_i - 1\|$ est $\leqslant$ à la longueur de l'arc de développante de cercle (du cercle de rayon 1) compris entre les cercles de rayons $\|x_0\|$ et 1.

De plus $\|x_0\| \geqslant \|x_1\| \geqslant ... \geqslant \|x_n\| \geqslant 1$.

Cette proposition résulte du lemme suivant. On remarquera qu'en dimension 1, x_i est compris entre 0 et x_{i-1}, et que l'on a la majoration $\Sigma \|x_i - x_{i-1}\| \leqslant \|x_0\| - 1$. On fera donc la preuve en supposant la dimension $\geqslant 2$.

LEMME. — *Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert contenant la boule unité $B(0,1)$. Soit x un point et $y = proj_C\, x$. Alors*

$$\|y\| \leqslant \|x\|$$

et, du moins si $\|x\| \geqslant 1$, $\|y\|$ est $\geqslant 1$ et $\|x - y\|$ est $\leqslant$ à la longueur de l'arc de développante de cercle (du cercle de rayon 1) compris entre les cercles de rayons $\|x\|$ et $\|y\|$.

Preuve.

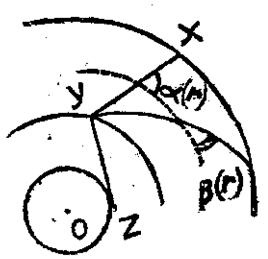
1. Comme proj_C est une contraction et que $0 = \text{proj}_C\, 0$ on a $\|y\| = \|y - 0\| \leqslant$ $\leqslant \|x - 0\| = \|x\|$.

On remarque que $\|x\| \geqslant 1 \Rightarrow \|y\| \geqslant 1$, car $y = \text{proj}_C\, x$ ne peut être intérieur à $B\,(0,1)$ que si x lui est égal.

2. Soit P un plan contenant 0, x et y.

Considérons dans ce plan un arc de développante de cercle (du cercle de rayon 1) compris entre les cercles de rayons $\|y\|$ et $\|x\|$ et passant par y. Supposons cet arc choisi tel que lui et le segment $[y, x]$ partent de y d'un même côté de la demi-droite issue de 0 passant par y.

Considérons les deux courbes $[y, x]$ et l'arc de développante comme paramétrées par r (distance à l'origine). Soit l_1 et l_2 les abscisses curvilignes de ces deux courbes, et soit $\alpha(r)$ (resp. $\beta(r)$) l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ qu'elles font avec le cercle de rayon r. La fonction β est décroissante. Soit $y\,z$ le segment tangent au cercle de rayon 1 situé encore du même côté de la demi-droite issue de 0 passant par y. Comme $z \in C$ et comme $y = \text{proj}_C\, x$, l'angle $\widehat{z\,y\,x}$ est $\geqslant \frac{\pi}{2}$. Cela a deux conséquences :



i) $\alpha\,(\|y\| \geqslant \beta\,(\|y\|)$, puisque l'angle de zy avec l'arc de développante est égal à $\frac{\pi}{2}$.

ii) α est croissante.

On a donc $\alpha\,(r) \geqslant \beta\,(r)$ sur tout l'intervalle $I = [\,\|y\|, \|x\|\,]$.

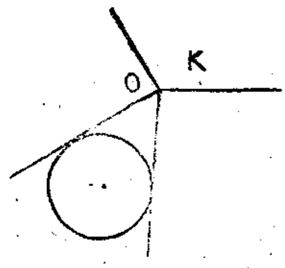
D'où

$$\|x - y\| = \int_I \frac{dl_1}{dr}\,dr = \int_I \frac{1}{\sin\alpha(r)}\,dr$$

$$\leqslant \int_I \frac{1}{\sin\beta(r)}\,dr = \int_I \frac{dl_2}{dr}\,dr = \int_I dl_2$$

Commentaires.

La proposition concerne l'algorithme de rattrapage. Pour une rafle « continument dérivable », $\dot{u}(t)$ désignant le point et $C(t)$ le convexe fermé on voit, au moins intuitivement, que dès que $\forall\ t, 0 \in C(t)$, la vitesse $\dot{u}(t)$ a une composante radiale, éventuellement nulle, dirigée vers 0. Dès que $\forall\ t$, $B(0, 1) \subset C(t)$, le rapport entre vitesse radiale et vitesse tangentielle est $\geqslant$ à ce qu'il est pour l'arc de développante de cercle (cela pour $\| u(0) \| \geqslant 1$) : en effet le cône normal $N_{C(t)}(u(t))$ est contenu dans le cône K polaire du cône de sommet 0 engendré par $B(-u(t), 1)$, d'où $\dot{u}(t) \in -K$.



B(− u (t), 1)

Une majoration équivalente, mais qui ne fait pas la comparaison avec la développante de cercle est donnée par Moreau ([12]), ccf. Remarque 2, p. 144).

Received February, 15, 1984

RÉFÉRENCES

[1] C., CASTAING, *Solutions continues à droite d'une équation différentielle multivoque avec contrainte sur l'état*, C. R. Acad. Sci. 288, 1980.

[2] C., CASTAING, *Rafle par un convexe aléatoire à variation continue à droite*, C.R. Acad. Sci., Ser. A 282 (1976).

[3] C., CASTAING, *Solutions continues à droite d'un problème d'évolution dans $\mathscr{E}(X)$ et dans les espaces hilbertiens*, Seminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1981, Exposé N⁰ 12 (à paraître dans Acta Vietnamica Vol. 7, N⁰ 1, 1982).

[4] C., CASTAING, et VALADIER, M., *Convex Analysis and Measurable multifunctions*, Lectures Notes, Springer-Verlag 1977, N⁰ 580.

[5] C., CASTAING, *Un résultat d'existence de sélection mesurable et compacité forte de l'intégrale d'une multi-application dans un espace de Banach non nécessairement séparable*, Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier 1982, Exposé n⁰ 16 (11 pages).

[6] A.M., GAMAL, *Perturbation non convexe d'une équation d'évolution dans un espace de Banach*, Séminaire d'Analyse Convexe 1982, Exposé n⁰ 7.

[7] G. W., JOHNSON, *The dual of $\mathscr{E}$ (S, E)*, Math. Ann. 187 (1970), 1-8.

[8] P., KREE, *Généralisation de l'équation de Fokker–Plank aux équations différentielles stochastiques multivoques*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I-75, 1982.

[9] J. J., MOREAU, *Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1975), Exposé n⁰ 7.

[10] J. J., MOREAU, *Evolation problem associated with a moving convex set in Hilbert space*, J. Diff. Equ. 26 (1977), 347-374.

[11] J. J., MOREAU, *Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution*, C. R. Acad. Sci.. Ser. A. 282 (1976), p. 837.

[12] J. J., MOREAU, *Un cas de convergence des itérées d'une contraction d'un espace hilbertien*. C. R. Acad. Sci. Ser. A, 286 (1978) p. 143.

[13] H., TANAKA, *Stochastic differential equation with reflecting boundary condition in convex regions*, Mathematical Journal, Vol. 9, N° 1, 1980, p. 163-177.

[14] M., VALADIER, *Une propriété de l'ensemble des sélections à variation bornée d'une multi-application à rétraction bornée*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1977, Exposé N° 13.