ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 8 Number 1 (1983)

QUANTIFICATION MULTIDIMENSIONNELLE. III. APPLICATIONS : SUR LES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DES GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES

DỖ NGỌC ZIỆP
Institute de Mathématiques
Hanoi

O. INTRODUCTION.

Dans [9], [10], [11] nous avons proposé une construction générale des représentations holomorphiquement induites partiellement invariantes (HIPI). Cette construction est une généralisation naturelle de la construction des représentations holomorphiquement induites $\mathrm{Ind}_D^G \tilde{\sigma}$ de R. Blattner [3] au cas ou on peut agrandir en même temps le sous-groupe D et sa représentation $\tilde{\sigma}$. Pour cette raison nous avons introduit la notion de $(D, \tilde{\sigma})$—polarisation. D'autre part, nous avons aussi considéré le problème de *quantification* des systèmes classiques à l'action plate du groupe G. Dans [9] [10], [11], [12] un procédé de quantification multidimensionnelle a été construit qui donne ainsi une illustration « physique » des représentations HIPI. En réalisant ensemble les deux constructions on obtient la méthode des K-orbites généralisée [11].

Dans cet article nous donnerons quelques applications de notre méthode des K-orbites genéralisée. Dans le paragraphe 1 nous montrerons des exemples non-triviaux de notre méthode des K-orbites généralisée. Dans le paragraphe 2 nous rappellerons quelques applications classiques. Enfin, dans les paragraphes 3 et 4, nous montrerons que toutes les représentations irréductibles de dimension fonctionnelle finie dues à A.A. Kirillov des groupes de difféomorphismes peuvent être obtenues par notre méthode, tandis qu'elles ne peuvent être obtenues par la méthode des K-orbites habituelle de A. Kirillov — B. Kostant comme l'a remarqué A. Kirillov dans [6].

1. EXEMPLES NON TRIVIAUX DE $(\widetilde{\sigma}, F)$ — POLARISATIONS

Dans ce paragraphe nous montrons tout d'abord une application essentielle de la méthode des K-orbites de A. Kirillov—B. Kostant. Par cette méthode nous pouvons obtenir toutes les représentations irréductibles d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. Notons cependant notre méthode des K-orbites généralisée nous donne un moyen « plus rapide » d'obtenir les représentations irréductibles, en induisant des sous-groupes invariants.

1.1. Soient G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ l'espace dual de $\mathcal{G}$, $\mathcal{O}(G)$ l'espace des K-orbites (sous l'action coadjointe de G dans $\mathcal{G}^*$), $\Omega \in \mathcal{O}(G)$ une K-orbite entière fixée, $F \in \Omega$ un point fixé de Ω, G_F le stabilisateur de F d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_F$, $\chi_F : G_F \to T^1$ le caractère unitaire de $\mathcal{G}_F$ du différentiel $d\chi_F = 2\pi i F / \mathcal{G}_F$, $\mathcal{P}$ une polarisation (au sens de la méthode habituelle des K-orbites (voir, par exemple, A.A. Kirillov [5]) positive strictement admissible (voir L. Auslander — B. Kostant [2]) au point F, $T^{\Omega,\chi} F = \mathrm{Ind}\,(G\,;\,\mathcal{P}, \rho, \chi_F)$ la représentation irréductible de G, correspondant à la K-orbite Ω, voir [2], [5], [9], [10], [11]. Alors :

(1) La représentation T^{Ω, χ_F} ne dépend pas de choix de la polarisation $\mathcal{P}$, voir [2, Th. III. 4. 1].

(2) La représentation T^{Ω, χ_F} est irréductible [2, Th. IV. 5. 7].

(3) L'ensemble de toutes les représentations T^{Ω, χ_F} forme tout le dual $\widehat{G}$ de G [2, § 0, Th. I], [5, § 15. 4, Th. 3].

1.2. Rappelons que la méthode des K-orbites généralisée est justement la méthode des K-orbites de A. Kirillov — B. Kostant lorsque $\widetilde{\sigma} = \mathrm{Id}$ et on prend seulement les $(\widetilde{\sigma}, F)$ polarisations maximales [11] $(\mathcal{P}, \rho, \sigma_o)$, telles que $\sigma_o = \chi_F$.

1.3. Enfin, signalons que notre méthode K-orbites généralisée est plus commode, en permettant de décrire le dual $\widehat{G}$ du groupe G par l'induction des sous-groupes invariants. Cela est dû justement ou fait que nous pouvons ici appliquer les critères de compacité [13].

1.4. Soient N le nil-radical de G d'algèbre de Lie $\mathcal{N}$, $f = F|_{\mathcal{N}}$, G_f le stabilisateur de f sous l'action de G dans $\mathcal{N}^*$, ayant $(G_f)_o$ comme la composante connexe de l'élément neutre et $\mathcal{G}_f$ comme son algèbre de Lie, $M = (G_f)_o$. G_F le sous-groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{M} = \mathcal{G}_f$, $A = MN$ le produit semi-direct d'algèbre de Lie $\mathcal{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, $l = F|_{\mathcal{M}}$, $k = F|_{\mathcal{A}}$. Alors les K-orbites Ω_k, Ω_l, Ω_f des points k, l, f dans $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{M}^*$, $\mathcal{N}^*$, respectivement sont entières. Soient χ_k , χ_l , χ_f les caractères des stabilisateurs A_k , M_l , N_f des algèbres de Lie $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{M}_l$, $\mathcal{N}_f$, respectivement. Alors

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{A}_c = \mathcal{P}; \mathcal{P}_1 \overset{def}{=} \mathcal{P} \cap \mathcal{N}_c, \mathcal{P}_2 \overset{def}{=} \mathcal{P} \cap \mathcal{M}_c$$

sont les polarisations aux points k, l, f, satisfaisant aux conditions de L. Pukanszky et l'on peut construire les représentations correspondant aux K-orbites Ω_k, Ω_l , Ω_f

$$\xi_1 = T^{\Omega_f, \chi_f} = Ind\,(N; \mathcal{P}_1 , \rho, \chi_f),$$

$$\xi_2 = T^{\Omega_l, \chi_l} = Ind\,(M; \mathcal{P}_2 , \rho, \chi_l),$$

$$\xi = T^{\Omega_k, \chi_k} = Ind\,(A; \mathcal{P}, \rho, \chi_k) \cong \xi_1 \otimes \xi_2$$

1.5. On sait que (voir [2, Prop. II.1.6]) $\mathrm{Ker}\chi_l$ est un sous-groupe normal de M et le groupe quotient $M_* = M / \mathrm{Ker}\,\chi_l$ est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{M}_* = \mathcal{M} / \mathcal{H}$ qui est isomorphe à l'algèbre de Heisenberg au centre $\mathcal{M}_l / \mathcal{H}$, où $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}\,(F|_{\mathcal{M}_l})$

Soient $\pi: M \longrightarrow M_*$ la projection canonique, $d\pi: \mathcal{M}_C \longrightarrow (\mathcal{M}_*)_C$ le différentiel de π, $l_* \in \mathcal{M}_*^*$ tel que $l_* . d\pi = l$. Alors $(\mathcal{M}_*)_{l_*}$ est exactement le centre $\mathcal{M}_l / \mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_*$, $(M_*)_{l_*} = M_l / \mathrm{Ker}\,\chi_l$ et $\chi_l = \chi_{l_*} . \pi$ où χ_{l_*} est le caractère de $(M_*)_{l_*}$ du différentiel $2\pi i l_*$, donc la K-orbite Ω_{l_*} de M_* dans $\mathcal{M}_*^*$ est entière. Comme $\mathcal{M}_l \subset \mathcal{P}_2$, il existe une sous-algèbre $(\mathcal{P}_2)_*$ de $(\mathcal{M}_*)_C$ telle que $d\pi^{-1} (\mathcal{P}_2)_* = \mathcal{P}_2$ et $(\mathcal{P}_2)_*$ est une polarisation positive strictement admissible au point l_*,

D'après la proposition I.5.13 de [2], on a

$$\xi_2 = Ind\,(M; \mathcal{P}_2 , \rho, \chi_l) = Ind\,(M_*, (\mathcal{P}_2)_*, \rho, \chi_{l_*})\, \pi.$$

1.6. On peut montrer que ξ_1, ξ_2 sont les représentations irréductibles du groupe N, et du groupe M. Le théorème III.4.1 de [2] dit que Ind $(G; \mathcal{P}, \rho, \chi_F) \simeq Ind_A^G \xi$.

1.7. CONCLUSION. Nous avons effectivement construit des $(G_F, Id. \chi_F)$ — polarisations réelles non triviales $(\mathcal{P}, H, \rho, \sigma_0)$ avec $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cap \mathcal{G} = \mathcal{A}$, $H = A = MN$, $\rho = d_\xi$, $\sigma = \xi$. Alors notre méthode des K-orbites généralisée nous donne une autre réalisation des représentations irréductibles d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe arbitraire.

2. SUR QUELQUES APPLICATIONS CLASSIQUES

Nous avons deux généralisations respectives de deux constructions: Représentations HIPI, généralisant les représentations holomorphiquement induites, et méthode des K-orbites généralisée. Nous avons alors les outils nécessaires pour obtenir presque toutes les représentations irréductibles connues des groupes de Lie.

2.1. Étant une généralisation de la méthode des K-orbites de A. Kirillov — B. Kostant, notre construction donne toutes les représentations irréductibles des groupes de Lie résolubles connexes et simplement connexes [2], de groupes de Lie compacts arbitraires, voir [5, § 15.3]:

1. Soit G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. Alors :

(a) Le groupe G est de type I, si et seulement si, l'espace des K-orbites est demi-séparable (c'est-à-dire, T_1-espace) et toutes les formes de Kirillov B_Ω sont fidèles.

(b) Soit, de plus, G un groupe de type I. Alors toutes les représentations irréductibles de G peuvent être obtenues par la méthode des K-orbites. À chaque K-orbite correspond une famille des représentations indexées par les caractères du groupe fondamental $\pi_1(\Omega)$ de l'orbite considérée.

(c) Toutes les représentations associées aux K-orbites différentes ou aux caractères différents d'une même K-orbite sont inéquivalentes entre eux.

2. Soit G un groupe de Lie compact connexe et simplement connexe. Alors toutes les représentations irréductibles de G sont associées aux K-orbites entières de dimension maximale.

3. Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe et simplement connexe, non compact. Alors la méthode des K-orbites nous donne la plupart des séries connues des représentations : Les séries principales, les séries dégénérées...- voir [5, § 15.3] et [7].

De plus, notre construction des représentations HIPI dans les L^2-cohomologies nous donne un outil «presque universel» pour obtenir toutes les représentations dûes aux écoles de I. M. Gelfand — M. A. Naimark et de Harish — Chandra etc...

3. LES K-ORBITES DE DIMENSION FINIE DES GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES

Dans ce paragraphe et le suivant, nous appliquons notre méthode des K-orbites généralisée pour obtenir les représentations irréductibles des groupes de difféomorphismes. *Nous reproduisons* les représentations irréductibles de dimension fonctionnelle finie dûes à A. Kirillov [6]. Comme les résultats de A. Kirillov existent seulement sous forme d'une prépublication, nous devons rappeler dans ce paragraphe quelques notions et résultats.

3. 1. Soit M une variété lisse, de dimension finie, connexe. L'ensemble Diff M, composé de difféomorphismes avec la multiplication usuelle et la topologie de convergence uniforme de toutes les dérivées sur les compacts, est un groupe topologique. Soit K un compact dans M, nous désignerons par $\mathrm{Diff}_K M$ l'ensemble de tous les difféomorphismes qui sont identiques en dehors de K. Alors, avec la topologie induite, $\mathrm{Diff}_K M$ est un groupe de Lie, en général, de dimension infinie (voir N. Bourbaki [4]). Soit $\mathrm{Diff}_c M = \varinjlim_{K \subseteq M} \mathrm{Diff}_K M$. Alors le groupe $\mathrm{Diff}_c M$ est un groupe de Lie de dimension infinie qui consiste en des difféomorphismes identiques en dehors d'un compact. Il est clair, que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}_c M$ est $\mathrm{Vect}_c M$, composée de champs de vecteurs lisses à support compact dans M.

Remarquons que $\mathrm{Vect}_c M$ est un espace localement connexe, nucléaire.

3.2. Soit (M, ω) une *variété symplectique*. Alors sur M il existe une *orientation canonique* qui est définie par la forme différentielle de degré maximal.

$$\omega^{\frac{1}{2}\dim M} = \underbrace{\omega \wedge \cdots\cdots\cdots \wedge \omega}_{\frac{1}{2}\dim M \text{ fois}}$$

Nous désignerons par $\mathrm{Diff}_c\,(M, \omega)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_c M$ des difféomorphismes, conservant la structure symplectique c'est-à-dire, des transformations canoniques à support compact. Alors $\mathrm{Diff}_c(M, \omega)$ est un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie est celle des champs de vecteurs hamiltoniens à support compact sur M,

$$\mathrm{Vect}_c(M, \omega) = \{\xi \in \mathrm{Vect}_c M\,;\, L_\xi \omega = 0\}$$

où L_ξ est la dérivée de Lie suivant le champ de vecteurs ξ.

Rappelons que sur la variété symplectique, la correspondance $\xi \longrightarrow i(\xi)\,\omega$ établit une bijection entre les champs de vecteurs et les $1-$formes différentielles dans laquelle les champs hamiltoniens correspondent aux $1-$formes différentielles fermées. Le champ de vecteurs ξ est dit *strictement hamiltonien*, si la forme $i(\xi)\omega$ est *fidèle*, c'est-à-dire, s'il existe une fonction $f = f_\xi$ telle que $i(\xi)\omega + df = 0$. La fonction f_ξ est appelée le *potentiel* de ξ, et est définie de façon unique, à une constante additive près, par ξ. Evidemment, le quotient de l'espace $\mathrm{Vect}_c\,(M, \omega) \stackrel{\sim}{=} H\,(M)$ des champs de vecteurs hamiltoniens par l'espace $H_0(M)$ des champs de vecteurs strictement hamiltoniens est isomorphe à l'espace vectoriel $H^1(M, R)$ des cohomologies de de Rham réelles à support compact.

3.3. Soit (M, v) une *variété unimodulaire*, c'est-à-dire que M est une variété lisse, v une forme différentielle non dégénérée, de degré égal à dim M, ou même un élément de volume. Nous désignerons par $\mathrm{Diff}_c(M, v)$ le sous-groupe des difféomorphismes conservant l'élément de volume v, à support compact, de $\mathrm{Diff}_c(M)$. Alors $\mathrm{Diff}_c(M, v)$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathrm{Vect}_c\,(M, v)$ composée des champs de vecteurs sans divergence

$$\mathrm{Vect}_c\,(M, v) = \{\xi \in \mathrm{Vect}_c M,\ L_\xi\, v = \mathrm{div}\,\xi\,.\,v = 0\}.$$

Pour chaque $\xi \in \mathrm{Vect}_c\,(M, v)$ la $(n-1)$ — forme différentielle $i\,(\xi)\,v$ est fermée.

3.4. Soit (M, α) une *variété de contact*, c'est-à-dire que M est une variété de dimension impaire $2n+1$ et α une 1 — forme différentielle telle que la forme de degré maximal

$$\alpha \wedge (d\,\alpha)^n = \alpha \wedge \underbrace{d\alpha \wedge \ldots \wedge d\,\alpha}_{n \text{ fois}}$$

soit une forme fermée non dégénérée. Nous désignons par $\mathrm{Diff}_c(M, \alpha)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_c M$ composé de difféomorphismes de M transformant la forme α en la forme $\psi \, . \, \alpha$, où ψ est une fonction qui ne s'annule en aucun point de M. Alors $\mathrm{Diff}_c'(M, \alpha)$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathrm{Vect}_c\,(M, \alpha)$ composée de vecteurs de contact à support compact,

$$\mathrm{Vect}_c(M, \alpha) = \{\xi \in \mathrm{Vect}_c M \, ; \, L_\xi \alpha = \psi \, . \, \alpha \, ; \, \psi \in C^\infty(M)\}.$$

Remarquons que si ξ est un champs de vecteurs de contact, alors la fonction dérivée $f_\xi \overset{def}{=} \frac{1}{2} \alpha(\xi)$ est définie de façon unique par ξ. Dans [8], B. I. Rosenfel'd a donné une formule explicite pour ξ entermes de sa fonction dérivée f_ξ

Dans la suite nous désignerons par G l' un des groupes de Lie $\mathrm{Diff}_c\, M$, $\mathrm{Diff}_c\,(M, \omega)$, $\mathrm{Diff}_c(M, v)$, $\mathrm{Diff}_c(M, \alpha)$, et par $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie correspondante.

3.5. Nous allons étudier la structure de l'espace dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et l'action coadjointe de G.

Considérons d'abord le cas $G = \mathrm{Diff}_c M$, et donc, $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c M$. Dans les coordonnées locales chaque champ de vecteurs est de type

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Donc, chaque élément F de $\mathcal{G}^*$ est de type

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx^i \, ,$$

où f_i sont des distributions et

$$\langle F, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i \, , \xi^i \rangle$$

Soient $\varphi_t \in \mathrm{Diff}_c M$, $t \in R$, est le flot de champs de vecteurs η, $y_t = \varphi_t(x)$, $y = y_0 = \varphi_0(x)$. Alors, l'action adjointe de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est

$$\xi \longmapsto [\eta, \xi] = [\xi, -\eta] = d/dt \left(\xi(\varphi_t^{-1}(x)) \, \frac{\partial x}{\partial \varphi^{-1}(x)} \right)_{t=0}$$

et la représentation $\mathrm{Ad} = e^{ad}$ du groupe G est donnée par la formule $(\mathrm{Ad}_\varphi \xi)(x) = \xi(\varphi^{-1}(x)) \dfrac{\partial x}{\partial \varphi^{-1}(x)}$, tandis que l'action coadjointe de G dans $\mathcal{G}^*$ est donnée par

$$K_\varphi F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_j(\varphi(x)) \frac{d\varphi_i(x)}{\partial x^j} \, dx^j.$$

Comme $\mathrm{Vect}_c(M,\omega)$, $\mathrm{Vect}_c(M,v)$, $\mathrm{Vect}_c(M,\alpha)$ sont les sous — algèbres de Lie fermées de $\mathrm{Vect}_c(M)$, chaque forme linéaire sur $\mathcal{G}$, dans le cas général, peut être prolongée par le théorème de Hahn — Banach en une forme linéaire sur $\mathrm{Vect}_c M$. Donc, on peut les écrire sous la forme d'une 1 — forme différentielle aux coefficients généralisés ci-dessus, mais malheureusement pas de façon unique.

3.6. Dans le cas où $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M,v)$, soient F_1 et F_2 deux prolongements d'un élément $F \in \mathcal{G}^*$. Alors $(F_1 - F_2) / \mathrm{Vect}_c(M.v) = 0$, c'est-à-dire, $F_1 - F_2$ est nulle sur chaque champ de vecteurs sans divergence. Alors $F_1 - F_2$ est une différentielle complète, et $F_1 - F_2$ est une forme différentielle fidèle. Alors $\mathcal{G}^*$ peut être identifié à l'espace de cohomologies des 1—formes différentielles aux coefficients généralisés à support compact sur M.

3.7. Dans le cas où $\mathcal{G}=\mathrm{Vect}_c(M,\alpha)$, on peut identifier les champs de vecteurs de contact aux fonctions dérivées correspondantes. Donc on peut identifier $\mathrm{Vect}_c M, \alpha)$ à l'espace de L. Schwartz $\mathcal{D}(M) = C_0^\infty(M)$ et $\mathcal{G}^*$ à l'espace de distributions $\mathcal{D}'(M)$ sur M.

3. 8. Enfin, dans le cas où $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M,\omega)$, la restriction d'une forme F de $\mathcal{G}^*$ sur les champs de vecteurs strictement hamiltoniens est une fonction généralisée sur M. Nous avons une application

$$F \in \mathcal{G}^* \longrightarrow \Phi \neq F \in \mathcal{D}'(M)$$

Le noyau de cette application est l'espace $H_1(M, R)$ des formes linéaires qui sont nulles sur les champs de vecteurs strictement hamiltoniens : Chaque 1—cycle γ dans M définit une forme linéaire F_γ

$$\langle F_\gamma, \xi \rangle = \int_\gamma i(\xi)\, \omega.$$

Par une analyse plus détaillée, A. A. Kirillov a' obtenu une suite exacte d'espaces linéaires

$$0 \longrightarrow R^{b_1(M)} \longrightarrow \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{D}'(M) \oplus R^{l(M)-1} \longrightarrow 0$$ où $b_1(M) = \dim H_1(M.R) = \dim H^1(M, R)$ est le premier nombre de Betti et est fini, $l(M)$ est le nombre des chemins à l'infini de A. A. Kirillov [6].

Alors on peut identifier (mais pas canoniquement) $\mathcal{G}^*$ à

$$\mathcal{D}'(M) \oplus R^{b_1(M)} \oplus R^{l(M)-1} \cong \mathcal{D}'(M) \oplus R^{b_1(M)+l(M)-1}$$

3.9. Revenons au cas général. Soient F un élément de $\mathcal{G}^*$, x un point de M. Nous disons que x appartient au *support* de F si, et seulement si, dans chaque voisinage U de x, il existe un élément ξ de $\mathcal{G}$ qui est non nul en dehors de U et $\langle F, \xi \rangle \neq 0$.

Pour les algèbres de Lie $\mathrm{Vect}_c(M)$, $\mathrm{Vect}_c(M, \alpha)$ cette notion n'est pas nouvelle. Pour les algèbres $\mathrm{Vect}_c(M, v)$ et $\mathrm{Vect}_c(M, \omega)$ nous avons un phénomène nouveau. A. A. Kirillov [6] a prouvé les résultats suivants :

Chaque forme linéaire F de $\mathcal{G}^*$ à support vide est de type F_γ, où γ est un 1—cycle de degré 1 pour $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M, \omega)$ et de degré $n-1$ pour le cas $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M, v)$

L'action coadjointe du groupe de Lie G dans $\mathcal{G}^*$ nous donne des K-orbites, en général, de dimension infinie. Les K-orbites de dimension finie ont été classifiées par A. A. Kirillov [6] :

La K-orbite Ω_F de $F \in \mathcal{G}^*$ est de dimension finie si, et seulement si, $\# \operatorname{Supp} F < \infty$.

Dans la suite nous nous intéressons aux K-orbites de dimension finie. De plus, nous ne considérons que les variétés M telles que :

$H^1(M, R) = 0$, si elle est symplectique et

$H^{n-1}(M, R) = 0$, si elle est unimodulaire.

Par conséquent nous n'aurons pas de formes linéaires non nulles à support vide.

3. 10. Nous étudions maintenant la structure des K-orbites de dimension finie. Soit $M^{[k]}$ l'espace des sous-ensembles, consistant en k points distincts de M. Alors $M^{[k]}$ est une variété lisse de dimension kn, où $n = \dim M$. Nous avons une projection naturelle de Ω_F sur $M^{[k]}$:

$$\tilde{F} \in \Omega_F \longrightarrow \operatorname{Supp} \tilde{F} = \{x_1, \ldots, x_k\} \in M^{[k]}$$ On peut évidemment écrire

$$\tilde{F} = \sum_{j=1}^{k} \tilde{F}_j, \text{ où } \tilde{F}_j \in \mathcal{G}^*, \operatorname{Supp} \tilde{F}_j = \{x_j\}.$$

Nous disons que $x_i \sim x_j$ si, et seulement si, $\tilde{F}_i$ et $\tilde{F}_j$ engendrent une même K-orbite $\Omega_{\tilde{F}_i} = \Omega_{\tilde{F}_j}$

Supposons que l'ensemble $\operatorname{Supp} \tilde{F}$ peut être divisé en m classes d'équivalence $s_1, \ldots, s_m$, avec les nombres de points correspondants $|s_1| = k_1, \ldots, |s_m| = k_m$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k$.

Alors la projection $\Omega_F \longrightarrow M^{[k]}$ peut être factorisée en un diagramme commutatif comme suit :

$$\begin{tikzcd} & \Omega_F \arrow[dl] \arrow[d] \\ \prod_{j=1}^{m} M[k_j] \arrow[r] & M[k] \end{tikzcd}$$

Comme $\Omega_{\tilde{F}_{i'}} = \Omega_{\tilde{F}_i}$, $\forall x_i$ et $x_{i'} \in s_j$, les fibres des applications $\Omega_{\tilde{F}_i} \longrightarrow M^{[1]} = M$ sont isomorphes (plus précisément, homéomorphes) et nous les désignerons par S_j. Alors la fibre de l'application $p: \Omega_F \to M^{[k]}$ est $S = \prod_{j=1}^{m} (S_j)^{k_j}$. Donc, l'étude de la K-orbite est réduite à celle des variétés $M^{[k]}$ et S_j.

3. 11. Rappelons quelques résultats prouvés ou seulement mentionnés dans le travail de A. Kirillov [6].

1. Si $\pi_i (M) = 0$, $i = 0, 1, 2$, et si dim $M > 3$, alors

$$\pi_1 (M^{[k]}) = S(k).$$

où par $S(k)$ nous désignons le groupe des permutations de k éléments,

$$\pi_0 (M^{[k]}) = \pi_2 (M^{[k]}) = 1, \text{ et}$$

$$\text{alors } H^i (M^{[k]}) = H^i (S(k)); \; i = 0, 1, 2.$$

2. Les variétés S_j sont reliées aux K-orbites des groupes de Lie de dimension finie :

S_j consiste en des formes linéaires $\tilde{F}_{i'}$ à support en $x_{i'} \in s_j$ et $x_{i'} \sim x_i$; ou de façon équivalente $\Omega F_i = \Omega F_{i'}$. Autrement dit, $F_{i'}$ peut être obtenu de F_i par l'action du groupe stationnaire $G(x_i) \subseteq G$ de point x_i.

(a) Si le degré de F_i (comme une forme linéaire sur $\mathcal{G}$) est égal à 0, alors F_i ne dépend que de la valeur du champ de vecteurs au point x_i. Le groupe $G(x_i)$ agit transitivement sur $T^*_{x_i} M - \{0\}$. Alors $S_j \approx R^n - \{0\}$.

(b) Si le degré de F_i est positif, nous considérons la projection canonique $\pi: \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}(x_i)^*$ qui est duale à l'injection $\mathcal{G}(x_i) \hookrightarrow \mathcal{G}$. Soit $\pi(S_j) = \Omega_j$. Alors Ω_j est une K-orbite de $G(x_i)$, du point $\pi(F_i) \in \mathcal{G}(x_i)^*$, et $S_j = \pi^{-1}(\Omega_j)$.

3.12. Remarquons que l'orbite $\Omega_i \subset \mathcal{G}(x_i)^*$ se trouve dans le complément dans $\mathcal{G}(x_i)^*$ de la sous-algèbre $\mathcal{G}^{(s)}(x_i)$, pour $s > k = \text{ord } F_i$, des champs de vecteurs dont les jets de degré $l < k$ sont nuls. Alors on peut regarder Ω_i comme une K — orbite du groupe de Lie de dimension finie $G^k(x_i) = G(x_i)/G^{(k+1)}(x_i)$, $k = \text{ord } F_i$, où $G^{(k)}(x_i)$ est le sous-groupe de $G(x_i)$ consistant en des difféomorphismes ayant le contact de degré $\geqslant k$ à l'identité.

On peut montrer que le groupe $G^k(x_i)$ ne dépend pas du point x_i et de la structure de la variété M. Il est défini de façon unique (à un isomorphisme près) par la dimension de M.

Si $G = \text{Diff}_c M$, $G^k(x_i) \cong GL^k(R^n)$, le groupe des jets de degré k des difféomorphismes de R^n fixant l'origine.

Si $G = \text{Diff}_c(M, v)$, $G^k(x_i) \cong SL^k(R^n)$, le groupe des jets de degré k des difféomorphismes de R^n, conservant l'élément de volume et l'origine.

Si $G = \text{Diff}_c(M, \alpha)$, $G^k(x_i) \simeq Ct^k(R^{2n+1})$, le groupe des jets de degré k des difféomorphismes de contact de R^{2n+1}, fixant l'origine.

Si $G = \text{Diff}_c(M, \omega)$, $G^k(x_i) \simeq Sp^k(R^{2n})$, le groupe des transformations canoniques de R^{2n}, fixant l'origine.

4. REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DE DIMENSION FONCTIONNELLE FINIE.

Nous avons maintenant toutes les conditions nécessaires pour appliquer la construction des représentations par les K-orbites.

4.1. Comme plus haut, nous supposons que $F \in \mathcal{G}^*$, et $\text{Supp } F = \{x_{11}, \ldots, \ldots, x_{1k_1}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mk_m}\}$ divisé en m classes d'équivalence, au sens du 3.10., $s_j = \{x_{j1}, \ldots x_{jk_j}\}$, $F = \sum_{j=1}^{m} F_j$, où F_j sont des formes linéaires homogènes, c'est-à-dire, $F_j = \sum_{i=1}^{kj} F_{ji}$, et $\Omega_{F_{ji}} = \Omega_{F_{ji'}}$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant k_j$, $j = 1, \ldots m$ et $\text{Supp } F_{ji} = \{x_{ji}\}$

4.2. Nous remarquons que la décomposition

$$F = \sum_{j=1}^{m} F_j$$

est unique, et $F_j \neq F_{j'}$, si $j \neq j'$. Soient $G(F_j)$ le stabilisateur de F_j, $G(F)$ celui de F, alors $G(F) \subseteq \bigcap_{j=1}^{m} G(F_j)$. On a bien sûr $\bigcap_{j=1}^{m} G(F_j) \subseteq G(F)$.

Alors $G(F) = \bigcap_{j=1}^{m} G(F_j)$.

4.3. Supposons que ord $F = k \geqslant 1$ et $G^k(x) = R.N$ soit la décomposition du groupe des jets en parties réductives et nilpotentes. Le groupe R agit librement sur les orbites génériques de N dans $\mathcal{N}^*$, voir E. M. Andreev, E. B. Vinberg et A. G. Elasvili [1]. Alors sur chaque orbite générique de N dans $\mathcal{N}^*$ il y a seulement une orbite unique Ω de $G^k(x)$ dans $\mathcal{G}^k(x)^*$.

4.4. Supposons que toutes les formes linéaires F_{ij} se trouvent en position générique de $G^k(x_{ij})$ dans $\mathcal{G}^k(x_{ij})^*$. Alors $F_{ij}|_{\mathcal{N}^k(x_{ij})} \neq 0$. Donc, il existe, d'après la théorie classique, une polarisation $\mathcal{P}_{ij}$ au point $F|_{\mathcal{N}^k(x_{ij})}$ au sens de A. Kirillov — B. Kostant.

Posons

$$H(x_{ij}) = \{ g \in G(x_{ij}) ;\ \text{le jet de degré k de } g \text{ soit } J^k g \in \mathcal{P}_{ij} \}$$

$$H_{oj} = \bigcap_{i=1}^{k_j} H(x_{ij}) \quad H_j = H_{oi} \cdot G(F_j), \; H = \prod_{j=1}^{m} H_j .$$

Nous avons une suite exacte

$$1 \to \prod_{j=1}^{m} H_{oj} \to H \to S(k_j) \to 1$$

Pour les groupes de jets nous avons une suite exacte scindée [6]

$$1 \to \prod_{j=1}^{m} H^l_{oj} \to H^l \to \prod_{j=1}^{m} S(k_j) \to 1$$

D'après cela, les représentations irréductibles de H^l_j, dont les restrictions à H^l_{oj} sont les représentations fixées de H^l_{oj} peuvent être paramétrisées par les représentations irréductibles du groupe $S(k)$.

Soient $\pi_j \in \widehat{S(k_j)}$, $\chi_{F_{ij}}$ la représentation de $H(x_{ij})$ correspondant à la forme linéaire $F_{ij} \in \mathcal{G}^*$. La représentation du groupe H_j, qui est en réalité une représentation d'un groupe de jets H_j^1, avec $1 \geqq$ ord F_{kj}, et qui est construite par les données π_j et $\chi_{F_j} = \prod_{i=1}^{k_j} \chi_{F_{ij}}$ est désignée par $\sigma(\pi_j, F_j)$.

Soient $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m$ les algèbres de Lie (réelles) de $H_1, \ldots, H_m$, respectivement. Alors, d'après la construction, on voit que $(\prod_{j=1}^m \mathcal{H}_j, \prod_{j=1}^m H_j, F, \prod_{j=1}^m \sigma(\pi_j, F_j))$ est une $(\prod_{j=1}^m \pi_j, F)$—polarisation de la K-orbite Ω.

En appliquant la construction générale de notre méthode des K-orbites généralisée, nous avons une représentation

$$T(\pi, F) \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{Ind}(G; \mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_m, H_1 \times \ldots \times H_m, F, \pi_1 \times \ldots \times \pi_m)$$

4.5. Remarque. Le groupe fondamental de Ω_F est $\prod_{j=1}^m S(k_j)$. Alors les représentations correspondant à la K-orbite fixée Ω_F sont paramétrisées par le dual de $\pi_1(\Omega_F)$, comme dans le cas classique.

4.6. THÉORÈME. 1) *Les représentations* T(π, F) *sont justement les représentations de dimension fonctionnelle finie de A.A. Kirillov* [6]. *Par conséquent,*

2) *Les représentations* T(π, F) *ne dépendent que de la K-orbite* Ω_F *et la classe d'équivalence de la représentation* π.

3) *Toutes les représentations* T(π, F) *sont irréductibles et pour les couples distingués elles ne sont pas équivalentes entre elles.*

L'assertion 1) est évidemment vraie d'après la construction présentée plus haut. Les assertions 2) et 3) sont dues à A. Kirillov.

Received June 6, 1982

REFERENCES

1. É.M. ANDREEV, E.B. VINBERG, A.G. ELASVINI. *Les orbites de dimension maximale des groupes linéaires semi-simples*, Funktion. Anal. Priloz., t. 1, N° 4, 1967, 3—7, (en russe).

2. L. AUSLANDER, B. KOSTANT, *Polarisations and unitary representations of solvables Lie groups*, Invent. Math., vol. 14, N°4, 1971, 255 — 354.

3. P. BLATTNER, *On induced representations, I, II*, Amer. Journ. Math., vol. 83, No 1, 1961, 79 — 98, vol. 83, No 3, 1961, 499 — 512

4. N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*, Fascicule de résultats, Hermann, Paris, 1967 et 1971

5. A.A. KIRILLOV, *Elements of the theory of representations*, Sringer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1976.

6. A.A. KIRILLOV, *Représentations unitaires du groupe de difféomorphismes et de quelques sous-groupes*, Inst. Math. Appliquée, Prépublication No 2, 1974 (en russe)

7. L.LIPSMANN, *Group representations*, Lecture Notes in Math. No 388, Springer—Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1974

8. B. I. ROSENFEL'D, *Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de contact*, Funktion. Anal. Prilož. t., No 2, 1970, 91—92.

9. D. N. ZIEP, *Multidimensional quantization. I, The general construction*, Acta Math. Vietnamica, t. 5, No 2, 1981, 42 — 55.

10. D. N. ZIEP, *Multidimensional quantization. II, The covariant derivation*, Acta Mathematica Vietnamica, to appear.

11. D. N. ZIEP, *Construction des représentations unitaires par les K-orbites et quantification*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 291, 1980, série A, 295 -- 298, MR 81 j : 22017.

12. D. N. ZIEP, *Quantification des systèmes hamiltoniens à l'action plate d'un groupe de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 295, série I, 1982, 345 — 348.

13. D. N. ZIEP, *Idéaux de type compact associés aux représentations irréductibles induites par des représentations liminaires des sous-groupes invariants*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 294, série I, (1982), 189 — 192.