ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 7 N$_0$2 (1982)

PERTURBATION NON CONVEXE D'UN PROBLÈME D'EVOLUTION DANS UN ESPACE HILBERTIEN

AHMED GAMAL MOHAMED
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Montpellier
FRANCE

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous étudions l'existence des solutions d'un problème d'évolution du type

$$(P)\begin{cases}-\dot{X}(t)\in N_{\Gamma(t)}(X(t))+F(t,X(t)) \quad , \quad t\in[0,1]\\ X(0)=a\in\Gamma(0).\end{cases}$$

où Γ est une multi-application de $[0,1]$ à valeurs convexes fermées non vides dans un espace hilbertien séparable H, F une multi-application uniformément continue sur le graphe de Γ à valeurs compactes non vides de H. Il s'agit là d'un problème d'évolution avec perturbation continue. Il est bon de noter ici que la perturbation F n'est pas à valeurs convexes de sorte que le problème étudié ici peut être considéré comme une généralisation des résultats de *Moreau* ([13]) et *Castaing* ([2]) relatifs à ce problème d'évolution, car ici la perturbation multivoque F dépend de l'état $x\in H$. Dans le cas où F est une application ds-intégrable de $[0,1]$ dans H, Γ est une multi-application lipschitzienne, il résulte banalement des résultats de *Moreau* ([13]) ou *Castaing* ([2]) que le problème d'évolution

$$\begin{cases}-\dot{X}(t)\in N_{\Gamma(t)}(X(t))+F(t) \quad ; \quad t\in[0,1]\\ X(0)=a\in\Gamma(0)\end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue. Mais ici le problème étudié est bien plus difficile car la perturbation F est multivoque et F n'est pas nécessairement à valeurs convexes. Dans le cas où F est à valeurs convexes, j'ai démontré dans ([1]) l'existence des solutions du problème (P) sous des hypothèses plus faibles portant sur F : F est séparément mesurable sur $[0,1]$ et séparément semi-continue supérieurement sur H. Afin de situer le résultat présenté ici par rapport aux résultats d'existence dans la littérature, signalons qu'en dimension finie *Olech* ([11]) ; *Hermes* et *Van-Vleck* ([10]) et *Kaczinski* et *Olech* ([12]) ont établi l'existence des solutions des équations différentielles multivoques de la forme

$$\begin{cases} \dot{X}(t) \in F(t, X(t)) \quad ; \quad t \in [0,1] \\ X(0) = a \end{cases}$$

dont le second membre F n'est pas nécessairement convexe, en se basant sur une construction initialement introduite par *Filippov* ([8]). Ainsi le problème que nous considérons ici peut être une généralisation des résultats des auteurs précédents à cause de la présence du terme $N_{\Gamma(t)}(X(t))$ dans le second membre et du fait que l'espace des états que nous considérons est de dimension infinie. Les méthodes de démonstration reposent sur une modification des techniques de discretisation utilisées par *Filippov* ([8]), *Hermes* et *Van Vleck* ([10]) *Moreau* ([13]) et *Castaing* ([12]), un récent résultat de semi-continuité inférieure des fonctionnelles intégrales dû à *Castaing* et *Clauzure* ([6]) et un récent résultat de compacité forte dans $L^1_E(\mathbf{R}^p, \lambda^p)$ dû à Castaing ([5]) où E est un espace de Banach séparable, λ^p est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^p$, généralisant le théorème de compacité forte de *Riesz* qui correspond au cas où E est de dimension finie. Les difficultés auxquelles on doit faire face ne sont jamais triviales car il n'est pas possible d'utiliser ici des méthodes classiquement connues pour résoudre ce problème, même dans le cas où l'espace des états H est de dimension finie. L'application du résultat de semi-continuité inférieure des fonctionnelles intégrales de *Castaing* et *Clazure* ([6]) et de compacité forte dans $L^1_E(\mathbf{R}^p, \lambda^p)$ de *Castaing* ([5]) est nouvelle et et l'utilisation de ces résultats nécessite des vérifications non triviales. Bref, des difficultés rencontrées dans le problème présenté ici proviennent du fait que F n'est pas à valeurs convexes et de la présence du cône normal $N_{\Gamma(t)}(X(t)$ en $X(t)$ du convexe mobile Γ.

Notations et rappels. L'intervalle $[0,1]$ est muni de la mesure de Lebesgue ds, H est un espace hilbertien séparable. Si C est un convexe fermé de H,

$N_C(x)$ est le cône normal de C au point $x \in H$. On désigne par $\psi_C(\,)$ la fonction indicatrice de C,

$$\psi_C(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in C \\ +\infty & si\ x \notin C \end{cases}$$

et par $\delta^*(.,C)$ la fonction d'appui de C. Enfin h désigne la distance de Hausdorff des compacts non vides de H. Si E est un espace de Banach, λ^p la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^p$, un ensemble $\mathcal{H}$ dans $L^1_B(\mathbf{R}^p\ \lambda^p)$ est équi-intégrable si $\mathcal{H}$ vérifie :

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout ensemble intégrable A de mesure $\lambda^p(A) \leqslant \eta$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait

$$\int_A |f|\, d\lambda^p \leqslant \varepsilon$$

(*ii*) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset \mathbf{R}^p$ telle que pour tout f dans $\mathcal{H}$, on ait

$$\int_{\mathbf{R}^p/K} |f|\, d\lambda^p \leqslant \varepsilon$$

Soit $(K_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante de compacts dans $\mathbf{R}^p$ de réunion $\mathbf{R}^p$ et pour t fixé dans $\mathbf{R}^p$ soit T_t l'opérateur de translation de $L^1_E(\mathbf{R}^p, \lambda^p)$ dans $L^1_E(\mathbf{R}^p, \lambda^p)$ défini par

$$T_t(f)(x) = f(x+t), \qquad x \in \mathbf{R}^p.$$

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *(en rappel [5], th. 5). Soient E un espace de Banach, $\mathcal{H}$ un ensemble borné équi-intégrable dans $L^1_E(\mathbf{R}^p, \lambda^p)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Pour tout compact $A \subset \mathbf{R}^p$, $\mathcal{H}_A = \{\int_A f d\lambda^p \mid f \in \mathcal{H}\}$ est relativement compact.

(2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ et un entier N tel que, pour tout t dans la boule de centre 0 de rayon r, tout entier $n \geqslant N$, et tout $f \in \mathcal{H}$, on ait

$$\int |T_t(\chi_{K_n} f) - f|\, d\lambda^p \leqslant \varepsilon$$

Alors $\mathscr{H}$ est relativement fortement compact dans $L^{l}_{E}(\mathbf{R}^{p}, \lambda^{p})$.

Le corollaire suivant est conséquence facile du théorème précédent s'applique directement à la démonstration des résultats en vue. Pour $p = 1$, notons ds la mesure de Lebesgue (au lieu de λ).

COROLLAIRE. *Soient* E *un espace de Banach,* $\mathscr{H}$ *un ensemble d'applications s-mesurables de* $[0,1]$ *dans la boule unité de* E *vérifiant les conditions suivantes*

(1) *Pour tout compact* $A \subset [0,1]$, $\mathscr{H}_A = \{\int_A f(s)\, ds \mid f \in \mathscr{H}\}$ *est relativenent compact,*

(2) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un nombre* $\alpha_\varepsilon \in]0,1[$ *tel que pour tout* $\sigma \in [0, \alpha_\varepsilon]$ *et tout* $f \in \mathscr{H}$, *on ait*

$$\int_0^{1-\sigma} \| f(s+\delta) - f(s) \| \, ds \leqslant \varepsilon$$

Alors $\mathscr{H}$ *est relativement compact dans* $L^1_E([0,1], ds)$.

Démonstration. Pour tout $f \in \mathscr{H}$ soit f' le prolongement de f hors l'intervalle $[0,1]$, défini par $f'(t) = 0$ pour $t \in \mathbf{R} \setminus [0,1]$. Nous allons démontrer que l'ensemble $\mathscr{H}' = \{f' \mid f \in \mathscr{H}\}$ est relativement compact dans $L^1_E(\mathbf{R}, ds)$. D'après le théorème précédent il suffit de démontrer que, pour toute $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que pour tout $\sigma \in [-r, r]$ et tout $f \in \mathscr{H}'$, on ait

$$\int_{\mathbf{R}} \| f'(s+\sigma) - f(s) \| \, ds \leqslant \varepsilon,$$

Soit $\varepsilon > 0$. En vertu de la condition (2) il existe $\alpha^E_\varepsilon \in]0, 1[$ tel que, pour tout $\sigma \in [0, \alpha_\varepsilon]$ et tout $f \in \mathscr{H}$, on ait

$$\int_0^{1-\sigma} \| f(s+\sigma) - f(s) \| \, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Choisissons r tel que $0 < r < \min\left(\frac{\varepsilon}{4}, \alpha_\varepsilon\right)$. Alors pour tout $\sigma \in [0,r]$ et tout $f' \in \mathscr{H}'$, on a

$$\int_{\mathbf{R}} \| f'(s+\sigma) - f'(s) \| \, ds = \int_{-\infty}^{-\sigma} \| f'(s+\sigma) - f'(s) \| \, ds + \int_{-\sigma}^{-0} \| f'(s+\sigma) - f'(s) \| \, ds$$

$$+ \int_0^{1-\sigma} \| f'(s+\sigma) - f'(s) \| \, ds + \int_{1-\sigma}^{1} \| f'(s+\sigma) - f'(s) \| \, ds +$$

$$+\int_1^{\infty} \|f'(s+\sigma)-f'(s)\|\,ds$$

$$= 0 + \int_{-\sigma}^{0} \|f(s+\sigma)\|\,ds + \int_0^{1-\sigma} \|f(s+\sigma)-f(s)\|\,ds$$

$$+ \int_{1-\sigma}^{1} \|f(s)\|\,ds + 0$$

$$\leqslant \sigma + \frac{\varepsilon}{2} + \sigma \leqslant 2\sigma + \ < \varepsilon.$$

Pour tout $\sigma \in [-r,0]$ et tout f' $\in \mathscr{H}'$, on a la même estimation que précédemment. En effet si $\sigma = -\lambda$, $\lambda \in [0, r]$ on a

$$\int_{\mathbf{R}} \|f'(s+\sigma - f'(s)\|\,ds = \int_{\mathbf{R}} \|f'(s-\lambda) - f'(s)\|\,ds$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \|f'(s) - f(u+\lambda)\|\,du$$

puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation.

Donc $\mathscr{H}'$ est relativement compact pas L^1_E $(\mathbf{R}, ds)$. Comme l'application $g \to /[0,1]$ est linéar ie et continue de $L^1_E(\mathbf{R}, ds)$ dans $L^1_E([0, 1], ds)$ on déduit que $\mathscr{H}$ est relativement compact dans $L^1_E([0,1], sd)$.

Le théorème suivant dû à *Castaing* ([4]') donne des conditions suffisantes assurant la compacité forte des ensembles $\mathscr{H}_A$ de l'énoncé précédent.

THÉORÈME 1. (*en rapel*). *Sointe* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace messuré avec* μ *positivé finie E un espace de Banach séparable et* $\mathscr{H}$ *un ensemble borné uniformément intégrable dans* L^1_E $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *vérifiant la condition suivante ; pour tout* $\mu > 0$, *il existe*$A_\eta \in \mathscr{A}$ *avec* $\mu(\Omega \setminus A_\eta) \leqslant \eta$ *et une multi-application* Γ_η *de* A_η *à valeurs compactes non vides E telle que* $f(\omega) \in \Gamma_\eta(\omega)$ *pour tout* $f \in \mathscr{H}$ *et tout* $\omega \in A_\eta$. *Alors l'ensemble* $M = \{\int f dn / f \in \mathscr{H}\}$ *est relativement compact dans E.*

Voici un résultat récent de semi-continuité inférieure des fonctionnelles intégrales dû à *Castaing et Claurzure* ([6]) qui intervient dans la démonstration de l'existence des solutions broblème (P). En fait, nous reproduisons ici une version particulière du résultat de *Castaing* et *Clauzure* ([6]) qui s'applique directement dans la démonstration que nous avons en vue.

THÉORÈME 3. (*en rappel* [6], *th.* 5) *Soient* F *un espace de Banach séparable,* F_σ *l'espace vectorial* F *muni de la topologie* $\sigma(F, F')$, K *un convexe équilibré compact de* F_σ , $f : K \times [0,1] \to]-\infty, +\infty]$ *un intégrande semi-continu inférieurement sur* $K \times [0,1]$ *tel que* $f(.,t)$ *soit convexe sur* K *pour tout* t *fixé dans* $[0,1]$. *Soient* $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite dans* $S_K = \{u \in L^1_F([0,1], ds)/u(t) \in K \;\; p.p\}$ *convergeant faiblement dans* $L^1_E([0,1], ds)$ *vers* $u_0 \in S_K$ *et* $(\theta_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite d'applications boreliennes de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$ *convergeant simplement dans* $[0,1]$ *vers une application boretienne* θ_0 *de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$. *On suppose :*

(*i*) *Il existe* $\overline{u} \in S_K$ *tel que* $t \to f(\overline{u}(t), \theta_0(t))$ *soit ds-intégrable sur* $[0,1]$.

ii) *Il existe une suite uniformément intégrable* $(\beta_n)_{n \geqslant 1}$ *dans* $L^1_{\mathbf{R}}([0,1], ds)$ *telle que*

$$\forall n \geqslant 1, \forall t \ni [0,1], f(u_n(t), \theta_n(t)) \geqslant \beta_n(t)$$

Alors on a

$$\liminf_{n \to \infty} \int_0^1 f(u_n, (t), \theta_n(t))\, dt \leqslant \int_0^1 f(u_0(t), \theta_0(t))\, dt.$$

Existence des solutions du problème d'évolution

$$\begin{cases} -\dot{X}(t) \in N_{\Gamma(t)}(X(t) + F(t, X(t)), \; t \in [0,1] \\ X(0) = a \in \Gamma(0) \end{cases}$$

avec perturbation non convexe F.

Voici d'abord une remarque facile mise sous la forme d'un lemme qui intervient dans la suite.

LEMME 1: *Soit* f *une application uniformement continue d'un espace métrique* (X,d) *dans un espace métrique* (Y,δ). *Alors pour toute suite de nombres réels positifs* $(\varepsilon_m)_{m \geqslant 1}$, *il existe une suite strictement décroissante de nombres réels positifs* $(\rho_m)_{m \geqslant 1}$ *tendant vers* 0 *lorsque* m *tend vers* $+\infty$ *et vérifiant*

(1) *Pour tout entier* $m \geqslant 2$, $\dfrac{1}{\rho_{m-1}}$ *et* $\dfrac{\rho_{m-1}}{\rho_m}$ *sont des entiers* $\geqslant 2$.

(2) *Pour tout entier* $m \geqslant 1$, *et tout* $(x_1, x_2) \in X \times X$, *on a*

$$d(x_1, x_2) \leqslant \rho \Rightarrow \delta(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \varepsilon_m$$

Démonstration. Du fait que f est uniformément continue, il existe pour tout m, un nombre $r_m > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in X \times X$

$$d(x_1, x_2) \leqslant r_m \Rightarrow \delta(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \varepsilon_m$$

Soit n_1 un entier $\geqslant 2$ tel que $n_1 \; r_1 > 1$. Posons $\rho_1 = \frac{1}{n_1}$.

Pour tout $(x_1, x_2) \in X \times X$

$$d(x_1, x_2) \leqslant \rho_1 \rightarrow d(x_1, x_2) < r_1 \rightarrow \delta(f(x_1, x_2)) \leqslant \varepsilon_1.$$

Définissons par récurrence une suite $(\rho_m)_{m \geqslant 2}$ vérifiant (1) et $0 < \rho_m < r_m$ pour tout $m \geqslant 2$. Comme $r_2 < 0$, il existe un entier $n_2 \geqslant 2$ tel que $r_1 < n_2 r_2$.

Posons $\rho_2 = \frac{\rho_1}{n_2}$. On a $\frac{\rho_1}{\rho_2} = n_2 \geqslant 2$, $\frac{1}{\rho_2} = n_1 \; n_2$ et

$$0 < \rho_2 = \frac{\rho_1}{n_2} \leqslant \frac{r_1}{n_2} < r_2.$$

On suppose que pour tout $m = 2, 3, \ldots s$, ρ_m a été choisi de sorte que

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_{m-1}} \text{ et } \frac{\rho_{m-1}}{\rho_m} \text{ soient entiers } \geqslant 2 & \text{pour tout } m = 2, 3, \ldots s \\ 0 < \rho_m < r_m & \text{pour tout } m = 2, 3, \ldots, s \end{cases}$$

Nous allons définir ρ_{s+1}. Comme $r_{s+1} > 0$, il existe un entier $n_{s+1} \geqslant 2$ tel que $r_s < n_{s+1} r_{s+1}$. Posons $\rho_{s+1} = \frac{\rho_s}{n_{s+1}}$. On a $\frac{1}{\rho_{s+1}} = \left(\frac{1}{\rho_s}\right)(n_{s+1})$ et $\frac{\rho_s}{\rho_{s+1}} = n_{s+1}$. Donc $\frac{1}{\rho_{s+1}}$ et $\frac{\rho_s}{\rho_{s+1}}$ sont entiers $\geqslant 2$. De plus on a $0 < \rho_{s+1} = \frac{\rho_s}{n_{s+1}} < \frac{r_s}{n_{s+1}} < r_{s+1}$. Du fait que $\rho_m < r_m$ pour tout $m = 1, 2, \ldots$ on a : pour tout $(x_1, x_2) \in X \times X$, tout $m = 1, 2, \ldots$

$$d(x_1, x_2) \leqslant \rho_m \Rightarrow \partial(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \varepsilon_m.$$

Comme $2 \leqslant \frac{\rho_{m-1}}{\rho_{m-1}} < +\infty$ pour tout $m = 2, \ldots$, on déduit que $\lim_{m \to \infty} \rho_m = 0$.

THÉORÈME 4. *Soient Γ une multi-application de l'intervalle $[0,1]$ à valeurs convexes fermées non vides de H, F une multi-application définite sur le graphe G de Γ à valeurs compactes non vides de H. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) *Pour tout $(t, x) \in G$ et tout $\tau \in [0,1]$, on a*

$$(x - \underset{\Gamma(\tau)}{Proj}\, x) \in |t-\tau|\, \beta$$

où B est la boule unité de H :

(2) $F(G)$ *est contenu dans un borné K de H.*

(3) F *est uniformément continue sur G.*

Alors pour tout $a \in \Gamma(0)$, il existe deux suites d'applications étagées $(\theta_m)_{m \geq 1}$ et $(\delta_m)_{m \geq 1}$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ une suite $(X_m)_{m \geq 1}$ d'application absolument continues de $[0,1]$ dans H avec $X_m(0) = a$, $\forall\, m \geq 1$ et une suite d'applications étagées $(Z_m)_{m \geq 1}$ de $[0,1]$ à valeurs dans F(G) telles que

(i) $\lim\limits_{m \to \infty} \theta_m(t) = \lim\limits_{m \to \infty} \delta_m(t) = t, \qquad \forall\, t \in [0,1]$

(ii) $(\dot{X}_m)_{m \geq 1}$ *est uniformément bornée,*

(iii) $X_m(\theta_m(t)) \in \Gamma(\theta_m(t))$, $X_m(\delta_m(t)) \in \Gamma(\delta_m(t))$, $\forall\, m \geq 1$, $\forall\, t \in [0,1]$

(iv) $-\dot{X}_m(t) \in N_{\Gamma(\theta_m(t))}(X_m(\theta_m(t)) + Z_m(t)$ *avec* $Z_m(t) \in F(\delta_m(t), X_m(\delta_m(t)))$,

$\forall\, m \geq 1$, $\forall\, t \in [0,1]$,

(v) $(Z_m)_{m \geq 1}$ *est uniformément bornée et satisfait à la condition suivante : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 > 0$ et un nombre $\alpha_\varepsilon \in [0,1]$ tel que pour tout $m > n_0$, et tout $\sigma \in [0, \alpha_\varepsilon]$, on ait,*

$$\int_0^{1-\sigma} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \|\, dt \leq \varepsilon$$

Démonstration. Soit $\varepsilon_m = 2^{-m}$ $(m \geq 1)$. Comme F est uniformément continue il existe, d'après le lemme 1, une suite strictement décroissante e_m) de nombres réels positifs, tendant vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l} \text{Pour tout } m \geqslant 2, \dfrac{1}{e_{m-1}} \text{ et } \dfrac{e_{m-1}}{e_m} \text{ sont entiers et } \dfrac{e_{m-1}}{e_m} \geqslant 2 \\ \text{Pour tout } m \geqslant 1, \text{ tout } ((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \in G \times G \\ \|(t_1, x_1)-(t_2, x_2)\|_{\mathbf{R}\times H} \leqslant 4e_m \Rightarrow h(F(t_1, x_1), F(t_2, x_2)) \leqslant \varepsilon_m \end{array}\right. \qquad (1)$$

où $\|(t, x)\|_{\mathbf{R}\times H} = |t|_{\mathbf{R}} + \|x\|_H$. Pour simplifier les notations, on peut supposer que K est contenu dans la boule unité de H. Pour tout entier m positif, considérons la subdivision S_m de [0,1]

$$0 = t_0^m \geqslant t > \dots, > t_i^m > \dots > t_{v_m}^m = 1.$$

où $t_i^m = ie_m$, $0 \leqslant$ i $\leqslant \dots$ $0 \leqslant v_m = \dfrac{1}{e_m}$ et soit $P_m =$

$$= \{ t_i^m = ie_m \mid 0 \leqslant i \leqslant v_m = \frac{1}{e_m} \}.$$

Explicitons d'abord quelques propriétés de la suite $(P_m)_{m\geqslant 1}$ qui interviennent dans la suite de la démonstration

(a) Pour tout entier $m \geqslant 1$, $P_m \subset P_{m+1}$. En effet, soit $t_i^m \in P_m$.

On a $0 \leqslant t_i^m = ie_m \leqslant 1$. Or $e_m = se_{m+1}$ où s est un entier $\geqslant 2$.

Donc $0 \leqslant t_i^m = i s e_{m+1} \leqslant 1$. Donc $t_i^m \in P_{m+1}$.

b) Pour tout $m \geqslant 2$ et tout $t_i^m \in P_m \setminus P_1$, il existe un couple unique d'entiers positifs (n, r) (dépendant de t_i^m) tel que

$$\left|\begin{array}{ll} n < m & \\ t_i^m \notin P_s & \text{pour } s = 1, 2, \dots \\ t_i^m \in P_s & \text{pour } s \geqslant n+1 \\ 0 < r < v_{n-1} & \\ t_r^n < t_i^m < t_{r+1}^n & \end{array}\right.$$

Nous allons d'abord déterminer n. Il y a deux cas distincts :

(i) $t_i^m \notin P_k$ pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant m-1$. On prend $n = m-1$.

Alors $t_i^m \notin P_s$ pour $s = 1, 2, \ldots m - 1 = n$ et $t_i^m \in P_s$ pour $s \geqslant m = n + 1$, cas

$P_m \subset P_{m+1}, \forall\, m \geqslant 1$.

(ii) Il existe un entier k, $2 \leqslant k \leqslant m - 1$ tel que $t_i^m \in P_k$. Soit λ le premier des entiers k, $2 \leqslant k \leqslant m - 1$ tels que $t_i^m \in P_k$. On prend $n = \lambda - 1$. Donc on a

$$t_i^m \notin P_s \qquad \text{pour } s = 1, 2, \ldots, \lambda - 1 = n$$

et

$$t_i^m \in P_s \qquad \text{pour } s \geqslant \lambda = n + 1$$

Comme $t_i^m \notin P_n$ et $0 < t_i^m < 1$, il existe un entier unique r, $0 \leqslant r \leqslant \nu_n - 1$ (dépendant de t_i^m) tel que

$$t_r^n < t_i^m < t_{r+1}^n$$

A chaque subdivision S_m $(m \geqslant 1)$, nous allons associer une application absolument continue $X_m : [0, 1] \rightarrow H$ et une application étagée mesurable Z_m de $[0, 1]$ à valeurs dans $F(G)$ telles que pour tout $m \geqslant 1$ les relations suivantes soient vérifiées :

(2) $\quad X_m(t_i^m) = y_i^m \in \Gamma(t_i^m) \qquad$ *pour tout* $i = 0, 1, \ldots, \nu_m$

(3) $\quad \| X_m(t_i^m) - X_m(t_{i-1}^m) \| \leqslant 3 e_m \qquad$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, \nu_m$

(4) $\quad \| X_m(t) \| \leqslant 3 \qquad$ *pour tout* $t \in [0, 1]$

(5) $\quad$ Pour $i = 1, 2, \ldots, \nu_m$ et tout $t \in [t_{i-1}^m, t_i^m]$

$$\dot{X}_m(t) \in - N_{\Gamma(t_i^m)}(X_m(t_i^m)) - Z_m(t)$$

et $Z_m(t) \in F(t_{i-1}^m, X_m(t_{i-1}^m))$.

(6) $\quad$ Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant \nu_m - 1$

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t_i^m + t) - Z_m(t_{i-1}^m + t) \| \, dt \leqslant e_m \varepsilon_m \quad si \quad t_i^m \in P_1$$

$$\text{et} \quad \int_0^{e_m} \| Z_m(t_i^m + t) - Z_m(t_r^n + t) \| \, dt \leqslant e_m \varepsilon_n \quad si \quad t_i^m \notin P_1$$

ou (n, r) est le couple unique d'entiers indiqué dans la propriété (b) et qui dépend de t_i^m.

Soit donc m un entier $\geqslant 1$. Soit z_0^m un point de $F(t_0^m, a)$. Posons

$$y_1^m = \underset{\Gamma(t_1^m)}{Proj} \, (a - e_m z_0^m).$$

Pour $t \in [t_0^m, t_1^m]$, on pose

$$Z_m(t) = z_0^m$$

$$X_m(t) = \frac{t_1^m - t}{t_1^m - t_0^m} a + \frac{t - t_0^m}{t_1^m - t_0^m} y_1^m$$

On a, pour tout $r \in [t_o^m, t_l^m]$.

$$\dot{X}_m(t) = \frac{y_1^m - a}{t_1^m - t_0^m} \in - N_{\Gamma(t_1^m)}(y_1^m) - z_0^m$$

$$= - N_{\Gamma(t_1^m)}(y_1^m), - Z_m(t).$$

Soit $y = proj_{\Gamma(t_1^m)}(a)$. Grâce à la condition (l), on a

$\| a - y \| \leqslant (t_l^m - t_0^m) = e_m$. Etant donné la définition de y_1^m, on a

$$\| y_1^m - a \| \leqslant \| y - a + e_m z_0^m \| + e_m \| z_0^m \|$$

$$\leqslant \| y - a \| + 2e_m \| z_0^m \|$$

$$\leqslant e_m + 2e_m \| z_0^m \|$$

$$\leqslant 3\, e_m .$$

Il en résulte que $\| X_m (t_1^m) - X_m (t_0^m) \| \leqslant 3e_m$ et $\| X_m (t) \| \leqslant 3$ pour tout $t \in [t_0^m, t_1^m]$. Alors la relation (2) est vérifiée pour $i = 0,1$, la relation 3 pour $i = 1$ et la relation (4) est vérifiée pour $t \in [t_0^m, t_1^m]$. Nous allons définir X_m et Z_m sur l'intervalle $[t_1^m, t_2^m]$. Soit z_1^m un point de $F(t_1^m, X_m (t_1^m))$ tel que

$$\| z_0^m - z_1^m \| \leqslant h(F(t_0^m, X_m (t_0^m)), F(t_1^m, X_m (t_1^m))).$$

Posons $y_2^m = Proj_{\Gamma(t_1^m)} (y_1^m - e_m z_1^m)$

Pour tout $t \in]t_1^m, t_2^m]$, on pose

$$Z_m (t) = z_1^m$$

et

$$X_m (t) = \frac{t_2^m - t}{t_2^m - t_1^m} \, y_1^m + \frac{t - t_1^m}{t_2^m - t_1^m} \, y_2^m$$

On a pour tout $t \in]t_1^m, t_2^m$,

$$\dot{X}_m (t) = \frac{y_2^m - y_1^m}{t_2^m - t_1^m} \in - N_{\Gamma(t_2^m)} (y_2^m) - z_1^m = - N_{\Gamma(t_2^m)} (X_m (t_2^m)) - Z_m (t)$$

Par les raisonnements utilisés plus haut, on vérifie facilement que

$$\| y_2^m - y_1^m \| \leqslant 3 e_m.$$

Donc, on a la relation (3) pour $i = 2$ et la relation (4) pour $t \in]t_1^m, t_2^m]$ et la relation (2) pour $i = 2$.

Nous allons vérifier (6) pour $i = 1$. Puisque $\| X_m (t_1^m) - X_m (t_0^m) \| \leqslant 3e_m$, on a, d'après l'inégalité (1)

$$h(F(t_1^m, X_m (t_1^m)), F(t_0^m, X_m (t_0^m))) \leqslant \varepsilon_m$$

D' après le choix de z_1^m on a $\| z_0^m - z_1^m \| \leqslant \varepsilon_m$. Donc on a

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t_1^m + t) - Z_m(t_0^m + t) \| dt \leqslant \varepsilon_m e_m$$

Si $t_1^m \notin P_1$. Soit (n,r) le couple d'entiers unique, indiqué dans la propriété (b) et qui dépend de t_1^m. On a

$$t_r^n = re_n < t_1^m = e_m < (r+1)\, e_n ,\ n < m.$$

Comme $e_m < e_n$, on a nécessairement $r = 0$. Donc $t_0^m = t_0^n = t_r^u$.

Du fait que $\varepsilon_m < \varepsilon_n$ on obtient (6) por $i = 1$. On suppose que X_m et Z_m ont été définies sur l'intervalle $[t_0^m, t_s^m = se_m]$ telles que:

(7) $X_m(t_i^m) = y_i^m \in \Gamma(t_i^m)$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, s$

(8) $\| X_m(t_i^m) - X_m(t_{i-}^m) \| \leqslant 3e_m$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$

(9) $\| \dot{X}_m(t) \| \leqslant 3$ pour $t \in [t_0^m, t_s^m]$

(10) pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, tout $t \in]t_{i-1}^m, t_i^m]$

$$\dot{X}_m(t) \in -N_{\Gamma(t_i^m)}(X_m(t_i^m)) - Z_m(t)$$

$$Z_m(t) \in F(t_{i-1}^m, X_m(t_{i-1}^m))$$

(11) Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant s-1$,

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t_i^m + t) - Z_m(t_{i-1}^m + t) \| dt \leqslant e_m \varepsilon_m \cdot \text{ si } t_m \in P_1$$

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t_i^m + t) - Z_m(t_r^n + t) \| dt \leqslant e_m \varepsilon_n \text{ si } t_i^m \notin P_1$$

où (n, r) est le couple unique d'entiers, indiqué dans la propriété (b) et qui dépend de t_i^m.

Pour tout $i = 1, \ldots, s$, notons $z_{i-1}^m \in F(t_{i-1}^m, X_m(t_{i-1}^m))$ la valeur de Z_m sur l'intervalle $[t^m_{i-1}, t^m_i]$. Définissons Z_m sur l' intervalle $[t^m_s, t^m_{s+1}]$ comme suit. Il y a deux cas à distinguer :

(1) $t^m_s \in P_1$. Dans ce cas, soit z^m_s un point de $F(t^m_s, X_m(t^m_s))$ tel que

$$\| z^m_{s-1} - z^m_s \| \leqslant h(F(t^m_{s-1}, X_m(t^m_{s-1})), F(t^m_s, X_m(t^m_s)))$$

et posons $Z_m(t) = z^m_s$, pour $t \in]t^m_s, t^m_{s+1}]$.

(2) $t^m_s \notin P_1$. D'après la propriété (b), il existe un couple unique (n, r) et dépendant de t^m_s tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} t^m_s \in P_\lambda & \text{pour } \lambda = 1, 2, \dots, n \\ t^m_s \in P\lambda & \text{pour } \lambda \geqslant n+1 \\ n < m & \\ 0 \leqslant r \leqslant \nu_n - 1 & \\ t^n_r < t^m_{r+1} < t^n_{r+1} & \end{array}\right.$$

Comme $n < m$ on a $t^n_r \in P_m$. Donc il existe un entier unique δ, $0 \leqslant \delta < s$ tel que $t^n_r = t^m_\delta$. On a

$$(s - \delta)\, e_m = t^m_s - t^m_\delta < e_n$$

De l' inégalité (8) on obtient

$$\begin{aligned} & \| X_m(t^m_\delta) - X_m(t^m_s) \| \\ & \leqslant \| X_m(t^m_\delta) - X_m(t^m_{\delta+1}) \| + \| X(t^m_{\delta+1}) - X_m(t^m_{\delta+2}) \| \\ & + \dots + \| X_m(t^m_{s-1}) - X_m(t^m_s) \| \\ & \leqslant 3\,(s - \delta)\, e_m < 3 e_n. \end{aligned}$$

D'après (1) il résulte que

$$h(F(t^m_\delta, X_m(t^m_\delta)), F(t^m_s, X_m(t^m_s))) \leqslant \varepsilon_n.$$

Soit z_s^m un point de $F(t_s^m, X_m\ (t_s^m))$ tel que

$$\| z_s^m - z_\delta^m \| \leqslant h(F(t_s^m, X_m\ (t_s^m)), F(t_\delta^m, X_m\ (t_\delta^m)))$$

et posons $Z_m(t) = z_s^m$ pour $t \in]t_s^m, t_{s+1}^m]$.

Soit $y_{s+1}^m = \mathrm{Proj}_{\Gamma(t_{s+1}^m)}\ (y_s^m - e_m\ z_s^m)$, et pour tout $t \in]t_s^m, t_{s+1}^m]$,

on définit

$$X_m(t) = \frac{t_{s+1}^m - t}{t_{s+1}^m - t_s^m}\, y_s^m + \frac{t - t_s^m}{t_{s+1}^m - t_s^m}\, y_{s+1}^m$$

Comme plus haut, on vérifie facilement que $\| y_{s+1}^m - y_s^m \| \leqslant 3e_m$.

Pour tout $t \in [t_s^m, t_{s+1}^m]$, on a clairement

$$\begin{cases} \| \dot{X}_m(t) \| \leqslant 3 \\ \dot{X}_m(t) \in -N_{\Gamma\ (t_{s+1}^m)}(X_m(t_{s+1}^m)) - Z_m(t) \end{cases}$$

Donc, X_m et Z_m vérifient (2), (3), (5) pour $i = s+1$.

Nous allons vérifier la propriété (6) pour $i = s$. Si $t_s^m \in P_1$, on a

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t_s^m + t) - Z_m(t_{s-1}^m + t) \|\, dt$$

$$= \int_0^{e_m} \| z_s^m - z_{s-1}^m \|\, dt \leqslant h(F(t_s^m, X_m(t_s^m)), F(t_{s-1}^m, X_m(t_{s-1}^m)))\, e_m$$

$$\leqslant \varepsilon_m\, e_m .$$

Si $t_s^m \notin P_1$, on a

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t_s^m + t) - Z_m(t_r^n + t) \|\, dt = \int_0^{e_m} \| Z_m(t_s^m + t) - Z_m(t_\delta^m + t) \|\, dt$$

$$= \int_0^{e_m} \| z_s^m - z_\delta^m \|\, dt \leqslant h(F(t_s^m, X_m(t_s^m)), F(t_\delta^m, X_m\ (t_\delta^m)))\, e_m$$

$$\leqslant \varepsilon_n\, e_m .$$

Pour tout $m \geqslant 1$, soit $f_m(t)$ la valeur de $i\,(1 \leqslant i \leqslant v_m)$ tel que $t \in [t^m_{j_m(t)-1}, t^m_{j_m(t)}]$ et posons $\theta_m(t) = t^m_{j_m(t)}$, $\delta_m(t) = t^m_{j_m(t)-1}$ pour $t \in]0,1]$, $\theta_m(0) =$ et $\delta_m(0) = 0$.

D'après la relation (2), pour tout $m \geqslant 1$, tout $t \in [0,1]$ on a

$$X_m(\theta_m(t)) \in \Gamma(\theta_m(t)), X_m(\delta_m(t)) \in \Gamma(\delta_m(t)).$$

Ainsi, on obtient de la relation (5)

$-\dot{X}_m(t) \in N_{\Gamma(\theta_m(t))}(X_m(\theta_m(t)) + Z_m(t)$ pour tout $m \geqslant 1$ et tout $t \in [0,1]$

et $Z_m(t) \in F(\delta_m(t), X_m(\delta_m(t)))$.

Comme $F(G) \subseteq K$, la suite (Z_m) est équi-intégrable. Démontrons que la suite (Z_m) vérifie la condition (v) du théorème. Il est facile de voir que cette condition est réalisée si la suite (Z_m) vérifie la propriété suivante (*). Soit n_0 un entier positif et soit α_0 un nombre réel $< \frac{e_{n_0}}{2}$. Alors pour tout entier $m > n_0$ et tout $\sigma \in [0, \alpha_0]$, on a

$$\int_0^{1-\sigma} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt \leqslant 6\varepsilon_{n_0} + 4\sigma\left(\frac{1}{e_{n_0}}\right). \tag{12}$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Choisissons n_0 un entier positif tel que $6\varepsilon_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ et choisissons α_ε tel que $\alpha_\varepsilon < \min\left(\frac{e_{n_0}}{2}, \frac{\varepsilon}{8} e_{n_0}\right)$. Alors la propriété (*) montre que pour tout $m > n_0$ et tout $\sigma \in [0, \alpha_\varepsilon]$, on a

$$\int_0^{1-\sigma} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt \leqslant \varepsilon$$

Pour démontrer la propriété (A) il suffit de montrer que : pour tout $m > n_0$, tout j, $0 \leqslant j \leqslant v_{n_0} - 2$ et tout $\sigma \in [0, \alpha_0]$, on a

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{t_j^{n_0}}^{t_{j+1}^{n_0}} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt \leqslant 6\, e_{n_0}\, \varepsilon_{n_0} + 4\sigma \\
\text{et } &\int_{t_{v_{n_0}-1}^{n_0}}^{1-\sigma} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt \leqslant 6\, e_{n_0}\, \varepsilon_{n_0} + 2\sigma
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

puisque,

$$\| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt = \sum_{j=0}^{v_{n_0}-2} \int_{t_j^{n_0}}^{t_{j+1}^{n_0}} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt$$

$$+ \int_{t_{v_0-1}}^{1-\sigma} \| Z_m(t+\sigma - Z_m(t) \, dt$$

$$\leqslant (6_{e_0}\, \varepsilon_{n_0} + 4\sigma)\, (v_{n_0})$$

$$= 6\, e_{n_0}\, \varepsilon_n + 4\sigma) \left(\frac{1}{e_{n_0}}\right)$$

$$= 6\, \varepsilon_{n_0} + 4\sigma \left(\frac{1}{e_{n_0}}\right)$$

Pour tout $m > n_0$, tout j, $0 \leqslant j \leqslant v_{n_0} - 2$ et tout $\sigma \in [0, \sigma_0]$,

soit

$$L = \int_{t_j^{n_0}}^{t_{j+1}^{n_0} - \sigma} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt$$

Examinons la valeur de L. Puisque $m > n_0$, $t_j^{n_0}$ et $t_{j+1}^{n_0}$ appartiennent à P_m. Donc, il existe deux entiers λ, μ, $0 \leqslant \lambda < \mu$ tels que

$$t_j^{n_0} = t_\gamma^m\,, \quad t_{j+1}^{n_0} = t_\mu^m\,.$$

Comme $m > n_0$, on a $\lambda > \mu^{-1}$. Donc, il existe au mois un point t_s^m de P_m tel que

$$t_j^{n_0} = t_\lambda^m < t_s^m < t_\mu^m = t_{j+1}^{n_0}\,.$$

n a

$$t^m_{\lambda+1} \leqslant t^{n_0}_{j+1} - \sigma \leqslant t^m_{\mu} .$$

ar $0 \leqslant \sigma \leqslant \alpha_0 < \frac{e_{n_0}}{2}$. Il existe donc un entier unique $\beta > 1$ avec $\lambda > \beta \leqslant \mu^{-1}$ el que $t^{n_0}_{j+1} - \sigma \in [t^m_\beta, t^m_{\beta+1}]$. Ceci étant, nous allons démontrer les inégalités uivantes:

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t^m_s +) - Z_m(t^{n_0}_j + t) \| \, dt \leqslant 2\, e_m\, \varepsilon_{n_0} \tag{14}$$

pour tout entier s, $\lambda + 1 \leqslant s \leqslant \mu^{-1}$

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t^m_s + \sigma + t) - (t^{n_0}_j + t) \| \, dt \leqslant 4 e_m\, \varepsilon_{n_0} \tag{15}$$

pour tout entier s, $\lambda \leqslant s \leqslant \beta^{-1}$

$$\int_{t^m_\beta}^{t^{n_0}_{j+1} - \sigma} \| Z_m(t + \sigma) - Z_m(t) \| \, dt \leqslant 2\sigma$$

Ceci permet de vérifier (13). En effet supposons provisoirement que les inégalités (14), (15) et (16) soient vérifiées. On a

$$L = \| \int_{t^{r_0}_j = t^m_\lambda}^{t^{n_0}_{j+1} - \sigma} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt$$

$$\leqslant \int_{t^{n_0}_j = t^m_\lambda}^{t^m_{\lambda+1}} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt + \int_{t^m_{\lambda+1}}^{t^m_{\lambda+2}} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt$$

$$+ \ldots\ldots + \int_{t^m_{\beta-1}}^{t^m_\beta} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt + \int_{t^m_\beta}^{t^{n_0}_{j+1} - \sigma} \| Z_m(t+\sigma) - Z_m(t) \| \, dt$$

$$= \int_0^{e_m} \| Z_m(t^m_\lambda + t) - Z_m(t^m_\lambda + t) \| \, dt + \int_0^{e_m} \| Z_m(t^m_{\lambda+1} + \sigma + t) - Z_m(t^m_{\lambda+1} + t) \| d$$

$$+\dots\dots+\int_0^{e_m}\|Z_m(t^m_{\beta-1}+\sigma+t)-Z_m(t^m_{\beta-1}+t)\|\,dt+$$

$$+\int_{t^m_\beta}^{t^{n_0}_{j+1}-\sigma}\|Z_m(t+\sigma)-Z_m(t)\|\,dt$$

$$\leqslant\int_0^{e_m}\|Z_m(t^m_\lambda+\sigma+t)-Z_m(t^{n_0}_j+t)\|\,dt$$

$$+\int_0^{e_m}\|Z_m(t^m_{\lambda+1}+\sigma+t)-Z_m(t^{n_0}_j+t)\|\,dt+\int_0^{e_m}\|Z_m(t^m_{\lambda+1}+t)-Z_m(t^{n_0}_j+t)\|\,dt$$

$$+\dots\dots\dots$$

$$+\int_0^{e_m}\|Z_m(t^m_{\beta-1}+\sigma+t)-Z_m(t^{n_0}_j+t)\|\,dt+\int_0^{e_m}\|Z_m(t^m_{\beta-1}+t)-Z_m(t^{n_0}_j+t)\|\,dt$$

$$+\int_{t^m_\beta}^{t^{n_0}_{j+1}-\sigma}\|Z_m(t+\sigma)-Z_m(t)\|\,dt$$

$$\leqslant(\beta-\lambda)4e_m\,\varepsilon_{n_0}+(\beta-\lambda)2e_m\,\varepsilon_{n_0}+2\sigma\leqslant 6\,(\mu-\lambda)\,e_m\,\varepsilon_{n_0}+2\sigma=6e_{n_0}\,\varepsilon_{n_0}+2\sigma$$

Donc, pour tout j, $0\leqslant j\leqslant\nu_{n_0}-2$ on a .

$$\int_{t_j^{n_0}}^{t_j^{n_0}+1}\|Z_m(t+\sigma)-Z_m(t)\|\,dt\leqslant 6e_{n_0}\,\varepsilon_{n_0}+2\sigma+$$

$$+\int_{t_j^{n_0-\sigma}}^{t_j^{n_0}+1}\|Z_m(t+\sigma)-Z_m(t)\|\,dt$$

$$\leqslant 6e_{n_0}\,\varepsilon_{n_0}+4\sigma$$

Nous allons démontrer (14). Soit t^m_s un point de P_m tel que $\lambda+1\leqslant s\leqslant\mu-1$.

On a

$$t_j^{n_0} = t_\lambda^m < t_{\lambda+1}^m \leqslant t_s^m < t_\mu^m = t_{j+1}^{n_0}$$

Donc, $t_s^m \notin P_{n_0}$ et par conséquent $t_s^m \notin P_1$ car $P_1 \subset P_{n_0}$. D'après la propriété (b), il existe un couple unique (n_1, r_1) dépendant de t_s^m et tel que

$$\begin{cases} n_1 < m & \\ t_s^m \notin P_\rho & \text{pour } \rho = 1,2,\dots n_1 \\ t_s^m \in P_\rho & \text{pour } \rho \geqslant n_1 + 1 \\ t_{r_1}^{n_1} < t_s^m < t_{r_1+1}^{n_1} & \end{cases}$$

En vertu de l'inégalité (6), on a

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t_s^m + t) - Z_m(t_{r_1}^{n_1} + t) \| \, dt \leqslant \varepsilon_{n_1} e_m . \tag{17}$$

Démontrons que $t_j^{n_0} < t_{r_1}^{n_1}$. Supposons que $t_{r_1}^{n_1} < t_j^{n_0}$. Comme $t_s^m \notin P_{n_0}$, on a d'après le choix de n_1, $n_0 \leqslant n_1$. Il existe, donc, un entier positif γ tel que $t_j^{n_0} = t_\gamma^{n_1}$. On a $t_{r_1}^{n_1} < t_j^{n_0} = t_\gamma^{n_1}$.

Donc $t_{r_1+1}^{n_2} < t_\gamma^{n_1}$. Donc, on a $t_s^m < t_{r_1+1}^{n_1} \leqslant t_\gamma^{n_1} = t_j^{n_0}$, ce qui est impossible. Alors $t_j^{n_0} \leqslant t_{r_1}^{n_1}$.

Si $t_{r_1}^{n_1} = t_j^{n_0}$, on obtient l'inégalité (14). Si $t_j^{n_0} < t_{r_1}^{n_1}$, alors on a $t_{r_1}^{n_1} \notin P_{n_0}$, car $t_{r_1}^{n_1} < t_{j+1}^{n_0}$, et par conséquent $t_{r_1}^{n_1} \notin P_{n_1} \setminus P_1$.

Il existe, donc, d'après la propriété (b) un couple unique (n_2, r_2) dépendant de $t_{r_2}^{n_1}$ et tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} n_2 < n_1 & \\ t_{r_1}^{n_1} \notin P_\rho & \text{pour } \rho = 1,\ldots n_2 \\ t_{r_1}^{n_1} \in P_\rho & \text{pour } \rho = n_2 + 1 \\ t_{r_2}^{n_2} < t_{r_1}^{n_1} < t_{r_2+1}^{n_2} & \end{array}\right.$$

En vertu de l'inégalité (6) on a

$$\int_0^{e_m} \| Z_m (t_{r_1}^{n_1} + t) - Z_m (t_{r_2}^{n_2} + t) \| \, dt \leqslant \varepsilon_{n_2} e_m, \tag{18}$$

car $t_{r_1}^{n_1} \in P_{n_1} \subset P_m$. A l'aide des raisonnements utilisés pour montrer que $t_j^{n_0} \leqslant t_{r_1}^{n_1}$, on vérifie facilement que $t_j^{n_0} \leqslant t_{r_2}^{n_2}$. Si $t_j^{n_2} = t_{r_2}^{n_0}$, on fait la somme de (17) et (18) on obtient (14). Si $t_j^{n_0} < t_{r_2}^{n_2}$, on procède comme précédemment. Bref, il existe une suite finie de couples d'entiers $(n_i, r_i)_{i = 1,\ldots k}$ telles que

$$n_0 \leqslant n_k < n_{k-1} < \ldots\ldots < n_1 < m,$$

$$t_{r_k}^{n_k} = t_j^{n_0}, \quad t_{r_i}^{n_i} \in P_{n_i} \subset P_m \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, k,$$

et $$\int_0^{e_m} \| Z_m (t_{r_i}^{n_i} + t) - Z_m (t_{r_{i+1}}^{n_{i+1}} + t) \| \, dt \leqslant \varepsilon_{r_{i+1}} e_m \qquad \forall\, i = 1, \ldots k.$$

Donc, on a l'inégalité (14) car on a

$$\int_0^{e_m} \| Z_m (t_s^m + t) - Z_m (t_j^{n_0} + t) \| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{e_m} \| Z_m(t_s^m + t) - Z_m(t_{r_1}^{n_1} + t) \| dt + \int_0^{e_m} \| Z_m(t_{r_1}^{n_1} + t) - Z_m(t_{r_2}^{n_2} + t) \| dt$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \int_0^{e_m} \| Z_m(t_{r_{k-1}}^{n_{k-1}} + t) - Z_m(t_j^{n_0} + t) \| dt$$

$$\leqslant e_m (\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \ldots \varepsilon_{n_k})$$

$$\leqslant e_m \left(\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n_k}} \right)$$

$$= e_m \frac{1}{2^{n_k}} \left((1 + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{-(n_j - n_k)}) \right)$$

$$< e_m \cdot \frac{1}{2^{n_0}} \left((\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}) \right) \leqslant e_m \frac{2}{2^{n_0}} = 2e_m \varepsilon_{n_0}$$

Maintenant, démontrons l'inégalité (15). Soit s un entier tel que $\lambda \leqslant s \leqslant \beta - 1$. On peut supposer $\sigma > 0$ car si σ est nul, l'inégalité (15) se réduit à l'inégalité (14). Ceci étant, on a

$$t_\lambda^m < t_\lambda^m + \sigma \leqslant t_s^m + \sigma \leqslant t_{\beta-1}^m + \sigma$$

Puisque $t_{\beta-1}^m + \sigma = (t_\beta^m + \sigma) - e_m \leqslant t_{j+1}^{n_0} - e_m = t_{\mu-1}^m$, on obtient

$t_\lambda^m < t_s^m + \sigma \leqslant t_{\mu-1}^m$. Donc, il existe un entier unique $k = k(s)$ avec

$\lambda \leqslant k \leqslant \mu - 2$ tel que $t_s^m = \sigma \in [t_k^m, t_{k+1}^m]$.

Si $t_s^m + \sigma = t_k^m$, alors $k \neq \lambda$. Donc $\lambda + 1 \leqslant k \leqslant \mu - 2$.

D'après l'inégalité (14) on a,

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t_s^m + \sigma + t) - Z_m(t_j^{n_0}) \| dt$$

$$= \int_0^{e_m} \| Z_m(t_k^m + t) - Z_m(t_j^{n_0} + t) \| dt \leqslant 2 e_m \varepsilon_{n_0}.$$

De même (15) est vérifiée si $t_s^m + \sigma = t_{k+l}^m$. Supposons $t_k^m < t_s^m + \sigma < t_{k+l}^m$.

Soit $\rho = t_{k+l}^m - (t_s^m + \sigma)$. Alors $0 < \rho < e_m$ et pour tout $t \in]\, 0, \rho]$,

$$t_k^m < t_s^m + \sigma + t \leqslant t_{k+l}^m$$

$$\text{et} \quad t_k^m < t_k^m + t < t_{k+l}^m$$

Donc, d'après la définition de Z_m on a

$$Z_m\,(t_k^m + \sigma + t) = Z_m\,(t_k^m + t) \quad , \; t \in]\, 0, \rho].$$

Pour tout $t \in]\, \sigma, e_m\,]$, on a

$$t_{k+l}^m < t_s^m + \sigma + t \leqslant t_{k+2}^m$$

$$t_{k+l}^m < t_{k+1}^m + t \leqslant t_{k+2}^m.$$

Donc, d'après la définition de Z_m on a,

$$Z_m\,(t_s^m + \sigma + t) = Z_m\,(t_{k+l}^m + t),\; t \in]\, \rho,\, e_m\,].$$

On a

$$\int_0^{e_m} \| Z_m\,(t_s^m + \sigma + t) - Z_m\,(t_j^{n_0} + t) \|\, dt$$

$$= \int_0^{\rho} \| Z_m\,(t_s^m + \sigma + t) + Z_m\,(t_j^{n_0} + t) \|\, dt +$$

$$+ \int_{\rho}^{e_m} \| Z_m\,(t_s^m + \sigma + t) - Z_m\,(t_j^{n_0} + t) \|\, dt$$

$$= \int_0^{\rho} \| Z_m(t_k^m + t) - Z_m\,(t_j^{n_0} + t) \|\, dt +$$

$$\int_{a}^{e_m} \| Z_m\,(t_{k+l}^m + t) - Z_m\,(t_j^{n_0} + t) \|\, dt$$

$$\leqslant \int_0^{e_m} \| Z_m\,(t_k^m + t) - Z_m\,(t_j^{n_0} + t) \|\, dt +$$

$$+ \int_0^{e_m} \| Z_m\,(t_{k+l}^m + t) - Z_m\,(t_j^{n_0} + t) \|\, dt$$

Donc, grâce à l'inégalité (14) on obtient l'inégalité (15),

$$\int_0^{e_m} \| Z_m(t_s^m+\sigma+t)-Z_m(t_j^{n_0}+t)\| \, dt \leqslant 4\, e_m \varepsilon_{n_0}$$

Démontrons l'inégalité (16). On a deux cas à distinguer :

Soit $0<\sigma<e_m$. Dans ce cas $t_{\mu-1}^m < t_\mu^m - \sigma = t_{j+1}^{n_0} - \sigma < t_\mu^m$. Vu la définition de β on a nécessairement $\beta=\mu-1$ et par conséquent $t_{\beta+1}^m = t_\mu^m = t_{j+1}^{n_0}$. Pour tout $t\in[t_\beta^m, t_{j+1}^{n_0}-\sigma]$, on a $t+\sigma\in[t_\beta^m+\sigma, t_{j+1}^{n_0}=t_{\beta+1}^m]$. Comme Z_m est constante sur l'intervalle $[t_\beta^m, t_{\beta+1}^m]$, on a

$$\int_{t_\beta^m}^{t_{j+1}^{n_0}-\sigma} \| Z_m(t+\sigma)-Z_m(t)\| \, dt = 0$$

Soit $\sigma \geqslant e_m$. Du fait que $t_{j+1}^{n_0}-\sigma\in[t_\beta^m, t_{\beta+1}^m]$, on déduit que $(t_{j+1}^{n_0}-\sigma)-t_\beta^m \leqslant e_m$ et par conséquent

$$\int_{t_\beta^m}^{t_{j+1}^{n_0}} \| Z_m(t+\sigma)-Z_m(t)\| \, dt \leqslant 2\, e_m \leqslant 2\sigma,$$

d'où (16). Donc la suite $(Z_m)_{m\geqslant 1}$ vérifie la condition (v) du théorème.

Désignons par B_σ la boule unité de H munie de la topologie faible $\sigma(H,H)$. On a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. *Avec les hypothèses et notations du théorème 4, si*

(1) G est fermé dans $[0,1]\times H$,

(2) Pour tout $t\in[0,1]$, les suites $(X_m(\theta_m(t))_{m\geqslant 1}$ et $(X_m(\delta_m(t))_{m\geqslant 1}$ sont relativement fortement compacts dans H.

(3) L'application $(t,x)\to\delta^*(x,\Gamma(t))$ est semi-continue inférieurement sur $[0,1]\times B_\sigma$.

Alors le problème (P) admet une solution absolument continue X qui vérifie

$$\begin{cases} -\dot X(t)\in N_{\Gamma(t)}(X(t)) + F(t,X(t)) \quad \text{p.p.} \\ X(0)=a\in\Gamma(0) ; \end{cases}$$

Démonstration. Comme $(X_m)_{m \geqslant 1}$ est uniformément bornée, on peut supposer que la suite $(\dot{X}_m)_{m \geqslant 1}$ converge pour la topologie $\sigma(L^1_H([0,1], ds), L^\infty_H([0,1], ds))$ vers une application $\dot{X}$ et par conséquent la suite $(X_m(\delta_m(t)))_{m \geqslant 1}$ converge vers $X(t)$ pour $\sigma(H, H)$, pour tout $t \in [0,1]$ avec $X(t) = a + \int_0^t \dot{X}(s)\,ds$. En vertu de la condition (2), on peût supposer que les suites $(X_m(\delta_m(t)))_{m \geqslant 1}$ et $(X_m(\theta_m(t))$ convergent fortement vers $X(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Du fait que G est fermé, on a d'après la relation (iii) du théorème 4 que $X(t) \in \Gamma(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Démontrons que la suite (Z_m) est relativement compacte dans $L^1_H([0,1], ds)$. D'après le corollaire du théorème 1 en rappel et la relation (v) du théorème 4, il suffit de démontrer que, pour tout ensemble A ds-mesurable dans $[0,1]$, l'ensemble

$\{\int_0^1 X_A Z_m(t)\,dt \mid m \geqslant 1\}$ est relativement compact dans H. Pour tout $m \geqslant 1$ et tout $t \in [0,1]$ posons

$$\phi_m(t) = F(\delta_m(t), X_m(\delta_m(t)) \qquad \text{et} \qquad \phi(t) = F(t, X(t))$$

Comme F est continue sur G, on a $\lim_{m \to \infty} h(\phi_m(t), \phi(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et par conséquent $\lim_{m \to \infty} h(\overline{co}\,\phi_m(t), \overline{co}\,\phi(t)) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, où $\overline{co}(.)$ désigne l' enveloppe convexe fermée. Du fait que l'ensemble F(G) est borné, on déduit que ϕ_m, $m \geqslant 1$ et ϕ sont intégrables. Donc on a

$$\lim_{m \to \infty} h\left(\int_0^1 \chi_A(t)\,\overline{co}\,\phi_m(t)\,dt,\ \int_0^1 \chi_A(t)\,\overline{co}\,\phi(t)\,dt\right) = 0$$

et il en résulte que

$$\lim_{m \to \infty} d\left(\int_0^1 \chi_A(t)\,Z_m(t)\,dt,\ \int_0^1 \chi_A(t)\,\overline{co}\,\phi(t)\,dt\right) = 0$$

or, l'ensemble $\{\int_0^1 \chi_A(t)\,\overline{co}\,\phi(t)\,dt\}$ est compact (cf. théorème 2 en rappel), donc l'ensemble $\{\int_0^1 \chi_A(t) Z_m(t)\,dt\}$ est relativement compact dans H. Donc la suite (Z_m) est relativement compacte dans $L^1_H([0,1], ds)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(Z_m)_{m\geqslant 1}$ converge fortement et presque partout vers une application $Z \in L^1_H([0,1], ds)$. Comme $Z_m(t) \in F(\delta_m(t)),\ X_m(\delta_m(t))$ pour tout $m \geqslant 1$ et pour $t \in [0,1]$ et comme F est continue sur G on a

$$Z(t) \in F(t, X(t)) \quad \text{p.p.} \tag{19}$$

En vertu de la relation (iv) du théorème 4, pour tout $m \geqslant 1$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$-\dot{X}_m(t) - Z_m(t) \in N_{\Gamma(\theta_m(t))}(X_m(\theta_m(t)),$$

cette relation est équivalente à

$$\delta^*(-\dot{X}_m(t) - Z_m(t), \Gamma(\theta_m(t)) + < \dot{X}_m(t) + Z_m(t), X_m(\theta_m(t) > \leqslant 0,$$

Cette inégalité s'écrit

$$\delta^*(-\dot{X}_m(t) - Z_m(t), \Gamma(\theta_m(t)) + < \dot{X}_m(t) + Z_m(t), X_m(t) >$$
$$\leqslant < \dot{X}_m(t) + Z_m(t), X_m(t) - X_m(\theta_m(t))>$$

Il en résulte que

$$\liminf_m \int_0^1 \delta^*(-\dot{X}_m(t) - Z_m(t)\, r(\theta_m(t))\,dt + \liminf_m \int_0^1 < \dot{X}_m(t), X_m(t) > dt$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \int_0^1 < -Z_m(t), X_m(t) > + 4 \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \left(\int_t^{\theta_m(t)} \| \dot{X}_m(s) \|\,ds \right) dt.$$

Puisque $\lim_{m\to\infty} \theta_m(t) =$ et puisque $(\dot{X}_m)_{m\geqslant 1}$ est uniformément bornée par 3 le deuxième terme du second membre est nul, tandis que le premier terme est égal à $\int_0^1 < - Z(t), X(t) >$ dt. Examinons chacun des termes du premier membre. Comme la fonction $(t,x) \to \delta^*(x, \Gamma(t))$ est semicontinue inférieurement sur $[0,1] \times B_\delta$ et comme la suite $(\dot{X}_m)_{m \geqslant 1}$ est uniformément bornée et converge vers $\dot{X}$ pour σ $(L^1_H([0,1], dt), L^\infty_H(0,1], ds))$ et la suite $(\theta_m(t))$ converge simplement vers t pour $t \in [0,1]$, il résulte du théorème 3 qu'on a

$$\liminf_m \int_0^1 \delta^*(-\dot{X}_m(t) - Z_m(t), \Gamma(\theta_m(t))dt \geqslant \int_0^1 \delta^*(-\dot{X}(t) - Z(t), \Gamma(t)\, dt$$

En vertu d'un résultat dans *Castaing-Valadier* ([7] p. 123) on a

$$\liminf_m \int_0^1 < \dot{X}_m(t), X_m(t) > dt \geqslant \int_0^1 < \dot{X}(t), X(t) > dt$$

D'où, finalement,

$$\int_0^1 \delta^*(-\dot{X}(t) - Z(t), \Gamma(t))\, dt + \int_0^1 < \dot{X}(t), X(t) > dt + \int_0^1 < Z(t), X(t) > dt \leqslant 0,$$

Ceci équivaut à

$$-\dot{X}(t) - Z(t) \in N_{\Gamma(t)}(X(t)) \qquad \text{p.p.}$$

car $X(t) \in \Gamma(t), \forall t \in [0,1]$. D'où d'après (19), on a

$$-\dot{X}(t) \in N_{\Gamma(t)}(X(t)) + F(t, X(t)) \qquad \text{p.p.}$$

L'application X est alors solution du problème (P).

Remarque. En particulier, si H est de dimension finie, alors le problème (P) admet une solution absolument continue.

Dans le cas où H est de dimension infinie, nous donnons le corollaire suivant qui est conséquence du corollaire 1.

COROLLAIRE 2. *Avec les hypothèses et notations du théorème 4, si l'on remplace les conditions (2) et (3) par les conditions suivantes :*

(i) Le graphe G de Γ est fortement compact,

(ii) F est continue sur G

(iii) L'application $(t,x) \to \delta^*(x, \Gamma(t))$ est semi-continue inférieurement sur $[0,1] \times B_\sigma$.

Alors le problème (P) admet une solution absolument continue X qui vérifie

$$-\dot{X}(t) \in N_{\Gamma(t)}(X(t)) + F(t, X(t)) \qquad p.p.$$
$$X(0) = a \in \Gamma(0).$$

Démonstration. D'abord, on remarque que les conditions (i) et (ii) impliquent les conditions (2) et (3) du théorème 4. Comme G est fortement compact, l'ensemble $\Gamma([0,1]) = proj_H G$ est fortement compact. Donc, pour tout $t \in [0,1]$, les suites $(X_m(\delta_m(t)))$ et $(X_m(\theta_m(t)))$ demeurent dans l'ensemble fortement compact $\Gamma([0,1])$. On est ainsi ramené au corollaire 1. Donc le problème (P) admet une solution absolument continue X qui vérifie

$$-\dot{X}(t) \in N_{\Gamma(t)}(X(t)) + F(t, X(t)) \qquad p.p.$$
$$X(0) = a \in \Gamma(0).$$

Remarque. La condition (iii) du corollaire 2 est vérifiée si l'on suppose que, pour tout x fixé dans H, la fonction $t \to d(x, \Gamma(t))$ est semi-continue supérieurement sur $[0,1]$. En effet, posons $f(t,x) = d(x, \Gamma(t)), (t,x) \in [0,1] \times H$. Alors la polaire f^* de f est égale à

$$f^*(t,y) = \sup_{x \in H} [< x, y > - f(t,x)] \quad (t,y) \in [0,1] \times H$$
$$= \psi_B(y) + \delta^*(y, \Gamma(t))$$

Comme $t \to f_t(x)$ est semi-continue supérieurement sur $[0,1]$ pour tout x fixé dans H, la fonction $(t,y) \to f^*(t,y)$ est semi-continue inférieurement sur $[0,1] \times H_\sigma$, donc f^* est semi-continue inférieurement sur $[0,1] \times B_\sigma$ et par conséquent l'application $(t,y) \to \delta^*(y, \Gamma(t))$ est semi-continue inférieurement sur $[0,1] \times B_\sigma$.

Commentaires : 1) En dimension finie l'idée d'utiliser le théorème de *Riesz* dans la construction de la suite $(Z_m)_{m \geqslant 1}$ est due à *Hermes et Van-Vleck F.S.* ([0,1]). La construction de la suite $(Z_m)_{m \geqslant 1}$ est inspirée de celle donnée par *Filippov* ([8]) et par ces auteurs, mais ici, on ne peut pas procéder exactement comme ces auteurs car la construction et la convergence des suites $(Z_m)_{m \geqslant 1}$ et $(X_m)_{m \geqslant 1}$ nécessitent ici des démonstrations plus compliquées.

2) Il semble difficile d'étendre les résultats précédents dans le cas où F est séparément *mesurable* et séparément *continue* en utilisant les théorème de

sélections mesurables afin de construire comme dans le théorème 4 une suite d'applications (pas forcément étagées) relativement compacte dans $L^1_H([0, 1)],ds)$. Dans le cas particulier des équations différentielles multivoques (sans contrainte sur l'état) de la forme

$$\dot{X}(t) \in F(t, X(t)) \quad , \quad t \in [0, 1]$$
$$X(0) = a,$$

avec $F(t,.)$ *continue*, la construction d'une telle suite se fait soit directement (sans utiliser le théorème de *Riesz* (cf. *Olech* ([11])), soit en se basant sur le théorème de *Riesz* classique (cf. [10]).

3. Signalons que le théorème 4 est valable en supposant que F vérifie la condition suivante:

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout

$((t, x), (\tau, y)) \in G \times G$ vérifant $0 \leqslant t - \tau \leqslant \eta$ et

$\| x - y \| \leqslant \eta$ on a $h(F(t, x), F(\tau, y)) \leqslant \varepsilon$.

4. Pour terminer signalons que nos méthodes présentées ici permettent de démontrer l'existence des solutions absolument continues pour les équations différentielles multivoques avec second membre non nécessairement convexe de la forme

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad , \quad t \in [0, 1]$$
$$x(0) = a$$

dans les espaces de Banach séparables. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de supposer que la multi-application F prenne ses valeurs dans un *compact fixe* grâce aux théorèmes de compacité cités en rappel, ceci en contraste avec le résultat d'existence du Corollaire 2 du Théorème 4.

Received August 24, 1982

REFERENCES

[1] Ahmed-Gamal, *Perturbations semi-continues supérieurement de certaines équations d'évolution*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1981, Exposé n^0 14.

[2] Castaing C. *Rafle par un convexe aléatoire à variation continue à droite*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1975, Exposé n^0 15.

[3] Castaing C. *Equation différentielle multivoque avec contrainte sur l'état dans les espaces de Banach*. Séminaire d' Analyse Convexe. Montpellier 1978, Exposé n^0 13 et C.R. Acad. Sc. Paris, t. 288 (5 mars 1979) Série A-507.

[4] Castaing C. *Un résultat de compacité lié à la propriété des ensembles Dunford-Pettis dans* $L'_F(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Séminaire d' Analyse Convexe, Montpellier 1979. Exposé n^0 17.

[5] Castaing C. *Quelques aperçus des résultats de compacité dans* $L^p_E(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$. Séminaire d' Analyse Convexe. Montpellier 1980, Exposé n^0 16.

[6] Castaing C, et Clauzure. *Semi-continuité des fonctionnelles intégrales*. Séminaire d' Analyse Convexe, Montpellier 1981, Exposé n$^?$ 15. et Acta Math. Viet., Vol. 7, No 2.

[7] Castaing C. et Valadier M. *Convex analysis and measurable multifunctions*. Lectures Notes, n^0 580, Springer-Verlag, 1977.

[8] Filippov A. – F. *On existence of solution of multivalued differential equations* (in Russian) Mat. Zametki, 10 (1971), pp. 307 – 313.

[9] Hermes H. *The generalized differential equation*. $X \in R(t, X)$. Advances in Math., 4, 140-169 (1970).

[10] Hermes H. et Van-Vleck F. S. *The existence of solutions of generalized differential equations satisfying Caratheodory conditions*. 1972, Note polycopiée.

[11] Olech C. *Existence of solutions of non-convex orientor fields*. Summer school on ordinary differential equations, Stara Lesna, High Tatra, Czeschoslovakia, 1974.

[11] Kaczynski H. et Olech C., *Existence of solution of orientor fields with non convex right-hand side*, Annal. Pol. Math. 29, 61-66, 1974.

[13] Morfau J. J., *Râfle par un convexe variable*, Séminaire d' Analyse Convexe. Montpellier, Exposé n^0 3, 1972 et *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Diff. Equations, vol. 26, n^0 3, 347 – 374, 1977.