ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 7 №2 (1982)

SEMI CONTINUITÉ DES FONCTIONNELLES INTÉGRALES

CHARLES CASTAING ET PAULETTE CLAUZURE
Université des Sciences et Techniques du Languedoc
Montpellier
FRANCE

INTRODUCTION

Il existe dans la littérature plusieurs articles consacrés à la semi continuité inférieure des fonctionnelles intégrales. Nous renvoyons le lecteur aux articles de *Berkowitz* ([1]), *Cesari* ([10]), *Cesari-Surynarayana* ([11]), *Olech* ([15]), *Ioffe* ([12]), qui contiennent de nombreuses références et l'historique du sujet. A notre connaissance, aucun auteur n'a abordé l'étude de la semi continuité inférieure présentée ici en dimension infinie ; excepté quelques cas particuliers rencontrés dans les problèmes d'évolution étudiés par *Moreau* ([13], [14]) et *Castaing* ([4], [5]) où il est possible de traiter le problème considéré soit directement (cf. *Moreau* [13[, [14], soit en utilisant (cf. *Castaing* [4], [5]) la dualité des fonctionnelles intégrales convexes définies sur un couple d'espaces décomposables ([9], th. VII. 7). En fait, l'étude de la semi continuité des fonctionnelles intégrales présentée ici se ramène justement à la dualité des fonctionnelles intégrales convexes en dualité grâce aux nouveaux résultats d'approximation des intégrandes convexes normaux (th. 1, th. 2, th. 3), ce qui permet d'obtenir des résultats très généraux dont les démonstrations ne sont pas conséquence directe des résultats classiques à savoir : le théorème de Mazur, lemme de Fatou et le théorème de Carathéodory traditionnellement utilisés, soit en dimension finie, soit dans quelques cas particuliers en dimension infinie, parce que ces résultats classiques ne s'appliquent pas aux démonstrations des résultats présentés ici. Nos méthodes de démonstration s'apparentent à celles adoptées par *Olech* ([1 15]) ; cet auteur n'utilise ni la dualité des fonctionnelles intégrales convexes, ni les théorèmes classiques précédemment cités. Cependant, la démonstration de cet auteur ne permet pas d'étendre son résultat aux espaces décomposables considérés en dimension infinie. Ainsi notre étude complète et généralise des résultats existant dans la littérature. Les applications qui seront présentées ultérieurement illustrent bien cette étude; notamment l'existence des solutions pour certaines inéquations fonctionnelles intégrales, avec contrainte sur l'état permettant de retrouver comme cas particulier, l'existence des solutions continues à droite d'une classe d'équations d'évolution: équations différentielles multivoques avec contrainte sur l'état, dont le second membre est un sous-différentiel (cf. *Castaing* [7]) et des nouveaux théorèmes de minimisation qui sont, de fait, liés à ces types d'équation d'évolution.

Notations et définitions. Dans ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré avec μ positive finie, $\mathcal{A}$ μ-complète. Soit E un espace topologique séparé On désigne par $\mathcal{B}(E)$ sa tribu borélienne. Pour un espace compact muni d'une mesure de Radon positive ν, T, on désigne par $\mathcal{C}_\nu$ la tribu des parties ν-mesurables de T. Toute application ν-mesurable, v, de T dans E est prise au sens de Lusin, i. e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\nu(T \setminus T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et tel que la restriction de v à T_ε soit continue. Soit F un espace localement convexe souslinien. On supposera qu'il existe sur son dual F' une topologie localement convexe souslienne compatible avec la dualité. On désigne par $\mathcal{L}^\infty_F$ (resp. $\mathcal{L}^\infty_{F'}$) l'espace vectoriel des applications f de Ω dans F (resp. F'), $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(F))$ — (resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(F'))$ — mesurables telles que $f(\Omega)$ soit relativement compact dans F (resp. F'). On désigne par $(\mathcal{L}_F, \mathcal{L}_{F'})$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(F))$ — (resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(F'))$ — mesurables, scalairement μ-intégrables, tels que

$\forall u \in \mathcal{L}_F, \forall v \in \mathcal{L}_{F'}$, $\omega \to \langle u(\omega), v(\omega) \rangle$ est μ-intégrable sur Ω, $\mathcal{L}^\infty_F \subset \mathcal{L}_F$ (resp. $\mathcal{L}^\infty_{F'} \subset \mathcal{L}_{F'}$)

$\forall A \in \mathcal{A}, \forall u \in \mathcal{L}_F$ (resp. $\mathcal{L}_{F'}$), on a $\chi_A u \in \mathcal{L}_F$ (resp. $\mathcal{L}_{F'}$)

Les quotients des espaces $\mathcal{L}_F$, $\mathcal{L}_{F'}$, $\mathcal{L}^\infty_{F'}$, $\mathcal{L}^\infty_F$, pour la relation " égalité μ-p.p."

sont notés respetivement L_F, $L_{F'}$, L^∞_F, $L^\infty_{F'}$.

On rappelle que les espaces L_F et $L_{F'}$ sont en dualité séparante par la forme bilinéaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \langle u(\omega), v(\omega) \rangle \mu(d\omega)$$

pour tout $(u, v) \in L_F \times L_{F'}$ (cfi *Castaing — Valadier* [9], Ch. VII). En ce qui concerne la mesurabilité des multi-applications, nous renvoyons également à *Castaing — Valadier* ([9]).

Si T est un espace compact muni d'une mesure de Radon μ, G un espace topologique, $f: T \times G \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction numérique, on dira que f est approximativement semi continue inférieurement (resp. borélienne) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T/T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et tel que la restriction de f à $T_\varepsilon \times G$ soit semicontinue inférieurement (resp. borélienne).

§1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES ET THÉOREMES D'APPROXIMATION DES INTÉGRANDES CONVEXES NORMAUX

THÉORÈME 1. *Soient C un convexe compact équilibré d'un espace localement convexe souslinien, $\mathcal{B}(C)$ la tribu borélienne de C et*

$g: \Omega \times C \to]-\infty, +\infty]$ un intégrande $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(C)$ mesurable vérifiant :

(i) il existe un intégrande $\alpha: \Omega \times C \to \mathbf{R}$, continu sur C tel que $g(\omega, x)$ pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times C$

(ii) $g(\omega, .)$ est convexe propre semi continue inférieurement sur C pour tout $\omega \in \Omega$

Alors il existe une suite croissante d'intégrandes $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(C)$-mesurables, $(g_k)_{k \geqslant 1}$, de $\Omega \times C$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

(1) $\forall (\omega, x) \in \Omega \times C$, $\lim\limits_{k \to \infty} \uparrow g_k(\omega, x) = g(\omega, x)$

(2) $\forall \omega \in \Omega$, $\forall k \geqslant 1$, $g_k(\omega, .)$ est convexe continue sur C.

Démonstration. Il est classiquement connu qu'il existe dans F' une suite (e'_n) séparant les points de F. Pour tout $x \in C$, posons

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\langle e'_n, x \rangle|}{1 + \sup\limits_{y \in C} \langle e'_n, y \rangle}$$

Alors φ est une applicatication de C dans $\mathbf{R}$ telle que $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in C \setminus \{0\}$. Il est facile de vérifier que φ est sous additive, convexe et continue sur C. Pour tout entier $k \geqslant 1$, tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in C$, posons

$$g_k(\omega, x) = \inf_{y \in C} \left[k\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) + g(\omega, y) \right]$$

Alors on a

$\forall k \geqslant 1, \forall \omega \in \Omega, \forall x \in C, 0 \leqslant g_k(\omega, x) \leqslant g_{k+1}(\omega, x) \leqslant g(\omega, x)$.

D'où $\sup g_k(\omega, x) \leqslant g(\omega, x)$ pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times C$. Montrons l'inégalité inverse. Soit (ω, x) fixé dans $\Omega \times C$. Soit $r \in \mathbf{R}$ tel que $g(\omega, x) > r$. Montrons qu'il existe un entier k_o tel que $g_{k_0}(\omega, x) \geqslant r$. Comme $g(\omega, .)$ est semi continue inférieurement sur C, il existe un voisinage ouvert $V(x)$ de x tel que $g(\omega, y) > r$ pour tout $y \in V(x) \cap C$, ce qui implique

$$k\varphi\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2}\right) + g(\omega, y) > r$$

pour tout entier k, tout $y \in V(x) \cap C$. Or g est minoré par l'intégrande α qui est continu sur C, il suffit de montrer qu'il existe un entier k_o tel que $k_o\varphi\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2}\right) \geqslant \mathrm{r} - \min \alpha(\omega, y)$ pour tout $y \in C \setminus V(x)$. En raison de la continuité de φ et de l'application $y \to \frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2}$ de C dans C et du fait que $x \in C \setminus V(x)$, on a

$$\mathrm{m} = \min_{y \in C \setminus V(x)} \varphi\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2}\right) > 0$$

Il suffit alors de choisir k_0 tel que $k_0 m \geqslant r - \min_{y \in C \setminus V(x)} \alpha(\omega, y)$

D'où

$$g(\omega, x) = \lim_{k \to \infty} \uparrow g_k(\omega, x) \quad , \quad \forall (\omega, x) \in \Omega \times C .$$

Pour tout entier k, on a, grâce à la sous-additivité de φ,

$$| g_k(\omega, x) - g_k(\omega, y) | \leqslant k\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

pour tout $(\omega, x, y) \in \Omega \times C \times C$. D'où la continuité de $g_k(\omega, .)$ sur C pour tout $\omega \in \Omega$. Pour tout x fixé dans C et tout entier k, $g_k(., x)$ est $(\mathcal{A}, \mathfrak{B}(\mathbf{R}))$ — mesurable en appliquant un théorème de projection ([9], th. III.23) comme dans *Castaing* ([6]). Enfin, chacun des g_k est $(\mathcal{A} \otimes \mathfrak{B}(C), \mathfrak{B}(\mathbf{R}))$ — mesurable en vertu de ([9], lemme III.14) car C est un compact métrisable. Reste à vérifier que chacun des g_k est convexe sur C. Pour tout entier k et tout ω fixé dans Ω, soit $(x_1, x_2, \lambda) \in C \times C \times [0, 1]$. Vérifions que

$$g_k(\omega, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leqslant \lambda g_k(\omega, x_1) + (1-\lambda) g_k(\omega, x_2).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il résulte de la définition de g_k qu'il existe $(y_1, y_2) \in C \times C$ tel que

$$g_k(\omega, x_1) + \varepsilon \geqslant k\varphi\left(\frac{x_1 - y_1}{2}\right) + g(\omega, y_1)$$

$$g_k(\omega, x_2) + \varepsilon \geqslant k\varphi\left(\frac{x_2 - y_2}{2}\right) + g(\omega, y_2)$$

D'où

$$\lambda g_k(\omega, x_1) + (1-\lambda) g_k(\omega, x_2) + \varepsilon \geqslant k\left[\lambda\varphi\left(\frac{x_1 - y_1}{2}\right) + (1-\lambda)\varphi\left(\frac{x_2 - y_2}{2}\right)\right]$$
$$+ \lambda g(\omega, y_1) + (1-\lambda) g(\omega, y_2)$$

Comme C est convexe et les fonctions $g(\omega,.)$ et φ sont convexes sur C, on a

$$\lambda\, g_k(\omega, x_1) + (1-\lambda)\, g_k(\omega, x_2) + \varepsilon \geqslant k\,\varphi\left[\lambda\left(\frac{x_1 - y_1}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + (1-\lambda)\left(\frac{x_2 - y_2}{2}\right)\right] + g(\omega, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)$$

En raison de définition de $g_k(\omega, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$, on obtient $\lambda\, g_k(\omega, x_1) + (1-\lambda)\, g_k(\omega, x_2) + \varepsilon \geqslant g_k(\omega, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $g_k(\omega,.)$ est convexe sur C, ce qui termine la **démonstration.**

Remarque. Il y aura peut être des démonstrations plus élégantes que celle présentée dans le théorème précédent. En particulier, *M. Valadier* nous a fait remarquer que la convexité de g_k peut résulter de la propriété d'inf-convolution de deux fonctions convexes, car φ peut être prolongée à l'espace E entier et g_k peut être défini comme l'inf-convolution de $k\varphi$ et $\bar{g}$ (où $\overline{g(\varepsilon,.)}$ est $g(\omega,.)$ prolongée par $+\infty$ en dehors de C). Mais la démonstration du théorème 1 est élémentaire et permet d'obtenir une variante dans laquelle C est une multi-application de Ω à valeurs convexes compactes équilibrées de F, scalairement mesurable ([9]), c'est à dire, pour tout $x' \in F'$, la fonction d'appui $\delta^*(x', C(.))$ est $\mathcal{A}$-mesurable sur Ω.

Voici une variante du théorème 1 et son corollaire.

THÉORÈME 2. *Soient T un espace topologique séparé de type K_o (i.e. réunion dénombrable de compacts), F un espace localement convexe souslinien de type K_o Γ, une multi-application semi-continue supérieurement de T à valeurs convexes compactes équilibrées de F et $g: T \times F \to]-\infty, +\infty]$ un intégrande semi continu inférieurement sur $T \times F$, tel que:*

(i) il existe un intégrande $\alpha: T \times F \to \mathbf{R}$, continu sur F tel que $g(t, x) \geqslant \alpha(t, x)$ pour tout $(t,x) \in T \times F$,

(ii) $g(t,.)$ est convexe sur F pour tout t et $g_{t/\Gamma(t)}$ est $\not\equiv +\infty$

Alors il existe une suite croissante d'intégrandes $(g_k)_{k \geqslant 1}$ de $T \times F$ dans $[-\infty, +\infty]$ vérifiant:

(1) $\forall k \geqslant 1, \forall r \in \mathbf{R}, [(t,x) \in T \times F \mid g_k(t,x) \leqslant r]$ est de type K_0,

(2) $\forall x \in \Gamma(t), \forall t \in T, g(t,x) = \lim\limits_{k \to \infty} \uparrow g_k(t,x)$

(3) $\forall k \geqslant 1, \forall t \in T, g_k(t,.)$ est convexe continue sur $\Gamma(t)$.

Démonstration. Comme Γ est semi continue supérieurement, il est classiquement connu que sa fonction d'appui $\delta^*(x', \Gamma(.))$ est semi continue supérieurement sur T, pour tout $x' \in F'$. F étant souslinien il existe une suite $(e)_n$ dans F' séparant les points de F. Comme dans la démonstration précédente, posons

$$\varphi (t,x)= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \dfrac{|< e'_n , x >|}{1+\delta^* (l'_n \Gamma(+)} & si\ x \in \Gamma(t) \\ +\infty & si\ x \notin \Gamma(t) \end{cases}$$

Comme la fonction $t \to \dfrac{1}{1+\delta^* (e'_n , \Gamma(+)}$ est strictement positive et semi-continue inférieurement sur T la fonction φ est semi continue inférieur-ement sur $T \times F$ car Γ est de graphe fermé. Pour tout entier $k \geqslant 1$ posons

$$g_k (t,x)= \begin{cases} \inf_{y \in \Gamma(t)} \left[k\varphi \left(t, \dfrac{x-y}{2}\right) + g(t,y) \right] & si\ x \in \Gamma(t) \\ +\infty & si\ x \notin \Gamma(t) \end{cases}$$

En repétant les arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 1 on voit très facilement que la suite $(g_k)_{k \geq l}$ vérifie les propriétés (2) et (3) de l' énoncé, tandis que la propriété (1) résulte de la semi-continuité des fonctions φ et g et du fait que Γ est de graphe fermé. En effet, soit $\delta(., \Gamma(t))$ la fonction indicatrice de $\Gamma(t)$,

$$\delta (y, \Gamma(t))= \begin{cases} 0\ si\ y \in \Gamma(t) \\ +\infty\ si\ y \notin \Gamma(t) \end{cases}$$

alors, pour tout entier $k \geqslant 1$, la fonction

$$(t, x, y) \to \psi_k (t,x,y)= k\varphi \left(t, \frac{x-y}{2}\right) + g(t, y) + \delta(y, \Gamma(t))$$

est semi continue inférieurement sur $T \times F \times F$. L'ensemble $[(t, x) \in T \times F \mid g_k (t,x) \leqslant r]$ est un K_0 car égal à l'intersection du graphe de Γ, avec la projection de l'ensemble fermé (donc du type K_0),

$[(t, x, y) \in T \times F \times F \mid \psi_k (t,x,y) \leqslant r]$

sur $T \times F$ puisque l'inf. dans la formule définissant g_k est atteint.

COROLLAIRE. F *étant comme précédemment, soient* (T, μ) *un espace compact muni d'une mesure de Radon positive* μ, $g: T \times F \to]-\infty, +\infty]$ *un intégrande tel que*

(i) *il existe un intégrande* $\alpha : T \times F \to \mathbf{R}$ *continu sur F tet que* $g(t, x) \geqslant \alpha(t, x)$ *pour tout* $(t,x) \in T \times F$,

(ii) g *est approximativement semi continnu inférieurement et convexe sur* F.

Soit Γ *une multi-application scalairement* μ*-mesurable de* T *à valeurs convexes compactes équilibrées de* F *telle que* $g_{t/r(t)}$ *soit* $\not\equiv +\infty$. *Alors il existe une suite croissante d'intégrandes,* $(g_k)_{k \geqslant 1}$, *de* $T \times F$ *dans* $[-\infty, +\infty]$ *vérifiant*

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall k \geqslant 1$, *il existe un compact* $T_\varepsilon \subset T$ *tel que* $\mu(T/T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *et tel que* $[(t, x) \in T_\varepsilon \times F \mid g_k(t, x) \leqslant r]$ *soit de type* K_0 *pour tout* $r \in \mathbf{R}$,

(2) $(\forall)\, t \in T$, $\forall x \in \Gamma(t)$, $g(t, x) = \lim\limits_{k \to \infty} \uparrow g_k(t, x)$,

(3) $\forall k \geqslant 1$, $\forall t \in T$, $g_k(t, .)$ *est convexe continue sur* $\Gamma(t)$.

La démonstration est laissée au lecteur. Il suffit de remarquer qu'on a

$$x \in \Gamma(t) \Leftrightarrow \langle e'_n, x \rangle \leqslant \delta^*(e'_n, \Gamma(t)), \forall t, \forall n \geqslant 1$$

et d'appliquer le théorème de Lusin à la suite des fonctions μ-mesurables $(\delta^*(e'_n, \Gamma(.)))_{n \geqslant 1}$, de sorte qu'on se ramène au théorème précédent, compte tenu de l'hypothèse portant sur g.

Remarques. 1) La propriété 1) du corollaire précédent montre que les intégrandes g_k sont approximativement boréliens selon la terminologie introduite, en particulier, si T est compact métrisable, les polaires des g_k, g_k^*,

$$g_k^*(t, x') = \sup_{x \in F} [\langle x', x \rangle - g_k(t, x)], (t, x') \in T \times F'$$

sont aussi approximativement boréliens si F' est muni d'une topologie localement convexe souslinienne compatible avec la dualité ([3)], de sorte qu'on puisse appliquer le théorème de dualité des fonctionnelles intégrales convexes sur le couple $(L_F, L_{F'})$ ([9], th. VII. 7).

2) Le théorème 1 a l'avantage de s'appliquer au cas où $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré sous réserve que C soit un convexe fixe, en contraste avec le théorème 2 où $\Gamma(t)$ est un convexe dépendant du paramètre $t \in T$ sous réserve que T soit un espace topologique séparé du type K_0. Nous ignorons s'il est possible de démontrer la validité du théorème 1 dans le cas où C dépend du paramètre ω.

3) Si $g : T \times F \to [0, +\infty]$ où T est un espace compact muni d'une mesure de Radon μ, F un espace polonais, est $\mathcal{T}_\mu \otimes \mathcal{B}(F)$ mesurable et semi continu inférieurement sur F, alors g est approximativement semi continu inférieurement (cf. *Castaing*[6]). En fait *Castaing* ([6]) a établi le résultat d'approximation d'intégrandes normaux positifs suivant. Si $g : \Omega \times F \to [0, +\infty]$ est un intégrande$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(F))$-mesurable, F étant polonais, g est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante d'intégrandes, $(g_k)_{k \geqslant 1}$, séparément $\mathcal{A}$-mesurable sur Ω et séparément lipschitzien sur F.

Dans le cas où F est un espace Banach séparable, on a le résultat d'approximation suivant qui peut avoir son intérêt pratique et est remarqué par *Olech* dans sa démonstration d'un théorème de semi continuité inférieure ([15]).

THÉORÈME 3. *Soient F un espace de Banach séparable,*
$g : \Omega \times F \to [-\infty, +\infty]$ un intégrande $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(F))$ — mesurable tel que, $\forall a \in \Omega$, $g(\omega,.)$ soit convexe propre semi continue inférieurement sur F. On suppose qu'il existe une application $h : \Omega \times F \to R$ vérifiant la condition de Lipschitz suivante:

$$| h(\omega,x) - h(\omega,y) | \leqslant \lambda \| x - y \|_F$$

pour tout $(\omega, x, y) \in \Omega \times F \times F$, λ étant une constante > 0, et telle que $h(\omega, x) \leqslant g(\omega,x)$ pour tout $(\omega,x) \in \Omega \times F$.

Alors il existe suite croissante d'intégrandes $(g_k)_{k \geqslant l}$ définis sur $\Omega \times F$ à valeurs réelles telle que
(1) $\forall \omega \in \Omega$, $\forall k \geqslant 1$, $g_k(\omega,.)$ est convexe sur F, et lipschitzienne sur F de rapport k,
(2) $\forall (\omega,x) \in \Omega \times F$, $\lim_{k \to \infty} \uparrow g_k(\omega,x) = g(\omega,x)$

(3) $\forall (\omega,x) \in \Omega \times F$, $G_k(\omega,x) \geqslant h(\omega,x)$ pour tou entier $k \geqslant \lambda$.

Démonstration. Pour tout $\omega \in \Omega$, tout $x \in F$ et tout entier $k \geqslant 1$ on pose

$$g_k(\omega,x) = \inf_{y \in F} [k \| x \| - y + g(\omega,y)]$$

A partir de cette formule, on voit facilement que $g_k(\omega,.)$ vérifie la propriété (1). De façon évidente, on a pour tout $\omega \in \Omega$, $\forall x \in F$, tout $k \geqslant 1$

$$g_k(\omega, x) \leqslant g_{k+1}(\omega, x) \leqslant g(\omega,x)$$

D'où $\sup_k g_k \leqslant g$. L'inégalité inverse se démontre classiquement. Pour la commodité du lecteur, la démonstration de cette inégalité est reproduite ici. Soit (ω, x) fixé dans $\Omega \times F$. Soit r tel que $g(\omega, x) > r$. Par semi continuité inférieure de $g(\omega,.)$, il existe $d > 0$ tel que $g(\omega, y) > r$ pour tout $y \in F$ vérifiant $\| y - x \| \leqslant d$. Pour tout $k \geqslant 1$, tout $\| y \in F$ avec $y - \| x \| \leqslant d$, on a $k \| x - y + g(\omega, g) > r$. Il suffit de prouver qu'il existe un entier k_o tel que $k_o \| x - y \| + g(\omega,y) > r$ pour $y \in F$ vérifiant $\| y - x \| > d$. Or on a pour tout $y \in F$, $g(\omega,y) \geqslant h(\omega,y) \geqslant h(\omega,x) - \lambda \| x - y \|$. D'où
$k \| x - y \| + g(\omega,y) \geqslant h(\omega,x) + (k - \lambda) \| x - y \|$, $\forall k \geqslant 1$, $\forall y \in F$
Alors pour tout entier $k \geqslant \lambda$ tel que $k \geqslant \lambda$ et pour tout $y \in F$ tel que $\| y - x \| \, d >$ on a

$$k \| x - y \| + g(\omega,y) \geqslant h(\omega,x) + (k - \lambda) d.$$

Il suffit de prendre $k_o \in N^*$ tel que $k_o > \lambda$ et $(k_o - \lambda) d + h(\omega,x) > r$.

Ceci prouve la propriété (3). La propriété (3) est évidente car, pour tout entier $k \in N^*$ tel que $k \geqslant \lambda$, on a $(k - \lambda) \| x - y \| \geqslant 0$ pour tout $y \in F$. D'où, pour $k \geqslant \lambda$, on a

$$\inf_{y\in F} [k \| x-y \| + g(\omega,y)] \geqslant h(\omega,x)$$

c' est à dire, $g_k(\omega,x) \geqslant h(\omega.x)$.

Enfin $g_k(.,x)$ est $\mathcal{A}$ — mesurable en vertu d'un théorème de projection ([9], Th. III. 23).

Le lemme suivant est crucial dans l'étude de la semi continuité. Il est inspiré des arguments utilisés par *Olech* ([15]) dans sa démonstration de la condition suffisante de semi continuité inférieure. Mais ici on se place dans un cadre plus général, ce qui demande des démonstrations plus détaillées. Par ailleurs, ce lemme est directement lié aux théorèmes 1 et 2. Signalons dès maintenant aux lecteurs que la semi continuité inférieure des fonctionnelles présentées ici résulte des théorèmes précédents, du lemme suivant et du théorème de dualité des fonctionnelles intégrales convexes ([9], th. VII. 7).

LEMME 1. *Soient F un espace souslinien, Γ une multi-application à valeurs compactes non vides de F telle que son graphe appartienne à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(F)$, E un espace topologique séparé, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'applications $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$—mesurables de Ω dans E convergeant simplement vers une application $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$—mesurable $v_0 : \Omega \to E$.*

Soit $f : \Omega \times F \times E \to [-\infty, +\infty]$ un intégrande $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(F) \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(\mathbf{R}))$—mesurable tel que $f(\omega,.,.)$ soit semi-continue inférieurement sur $F \times E$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tel que $f(\omega,., v_0(\omega))$ soit finie et continue sur $\Gamma(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu[\omega \in \Omega \mid \inf_{x\in\Gamma(\omega)} [f(\omega, x, v_n(\omega)) - f(\omega, x, v_0(\omega))] \leqslant -\varepsilon] = 0$$

Démonstration. Pour tout ω fixé dans Ω et tout entier n, la fonction $x \to f(\omega, x, v_n(\omega)) - f(\omega, x, v_0(\omega))$ est définie et semi continue inférieurement sur $\Gamma(\omega)$ à cause des hypothèses sur f, donc atteint son minimum sur $\Gamma(\omega)$. Par suite, il existe $\sigma_n(\omega) \in \Gamma(\omega)$ tel que

$$\inf_{x\in\Gamma(\omega)} [f(\omega, x, v_n(\omega)) - f(\omega, x, v_0(\omega)] = f(\omega,\sigma_n(\omega), v_n(\omega)) - f(\omega,\sigma_n(\omega), v_0(\omega))$$

Remarquons que la fonction

$$r_n : \omega \to \inf_{x\in\Gamma(\omega)} [f(\omega, x, v_n(\omega)) - f(\omega, x, v_0(\omega))]$$

est $\mathcal{A}$—mesurable sur Ω en vertu d'un résultat de projection mesurable ([9], lemme III.39). Ceci étant, montrons d'abord

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \liminf_n r_n(\omega) \geqslant 0.$$

Fixons $\omega \in \Omega$. Il existe une suite extraite de $(r_n(\omega))_n$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} r_{\varphi(n)}(\omega) =$ $\liminf\limits_n r_n(\omega)$. Comme $\Gamma(\omega)$ est compact, il existe une sous suite $(\sigma(\omega))_{\psi_0\varphi(n)(n)\geqslant 1}$ extraite de $(\sigma_{\varphi(n)}(\omega))_{n\geqslant 1}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\psi_0\varphi(n)}(\omega) = \eta(\omega) \in \Gamma(\omega)$.

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} (\sigma_{\psi_0\varphi(n)}(\omega), v_{\psi_0\varphi(n)}(\omega)) = (\eta(\omega), v_0(\omega))$

Puisque $f(\omega,.,.)$ est semi continue inférieurement sur $F \times E$ et $f(\omega,., v_0(\omega))$ est finie et continue sur $\Gamma(\omega)$, on a

$$\liminf_n [f(\omega, \sigma_{\psi_0\varphi(n)}(\omega), v_{\psi_0\varphi(n)}(\omega)) - f(\omega, \sigma_{\psi_0\varphi(n)}(\omega), v_0(\omega))] \geqslant 0$$

Or on a

$$\liminf_n r(\omega)_{\psi_0\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} r_{\psi_0\varphi(n)}(\omega) = \lim_{n\to\infty} r_{\varphi(n)}(\omega) = \liminf_n r_n(\omega)$$

D'où $\liminf\limits_n r_n(\omega) \geqslant 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega$. *Par suite*

$$\Omega = [\omega\in\Omega \mid \liminf_n r_n(\omega) \geqslant 0] = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n\in \mathbf{N}^*} \bigcap_{m\geqslant n} [\omega \in \Omega \mid r_m(\omega) > -\varepsilon]$$

Ceci implique que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu[\bigcap_{n\in \mathbf{N}^*} \bigcup_{m\geqslant n} [\omega \in \Omega \mid r_m(\omega) \leqslant -\varepsilon]] = 0$$

Comme μ est finie, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu[\bigcup_{m\geqslant n} [\omega \in \Omega \mid r_m(\omega) \leqslant -\varepsilon]] = 0$$

et *a foriori*,

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu[\omega \in \Omega \mid r_n(\omega) \leqslant -\varepsilon] = 0$$

Remarques. 1) La mesurabilité des fonctions r_n a besoin d'être justifiée. Le reste de la démonstration est standard mais nécessite des vérifications.

2) Le lemme 1 est valable dans cas où $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est l'espace compact métrisable, $(T,\mathcal{T}_\mu,\mu)$ avec μ positive, de Radon, E es séparé, F est localement convexe *sous-linien* $f : T \times F \times E \to [-\infty, +\infty]$ un intégrande *approximativement borélien* et Γ une multi-application scalairement μ-mesurasle de T à valeurs convexes compactes non vides de F, les applications $v_n (n \geqslant 0)$ sont μ-mesurables sur T. En effet, comme il a été dit à la remarque 1), seule la mesurabilité des $r_n (n \geqslant 1)$ a besoin d'être vérifiée. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T\setminus T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et tel que $f_{|T_\varepsilon \times E \times E}$ soit borélien, $\Gamma_{|T_\varepsilon}$ soit de graphe fermé, $v_{n|T_\varepsilon}$ soit continue pour tout $n \geqslant 0$. Donc chacune des

$\varphi_n : (t,x) \to f(t,x,v_n(t)) - f(t,x,v_0(t))$ est borélienne sur $T_\varepsilon \times F$. Soit $r \in \mathbf{R}$. Alors l'ensemble $[t \in T_\varepsilon \mid \inf_{x \in \Gamma(t)} \psi_n(t,x) \leqslant r]$ appartient à $\mathscr{C}_\mu$ car égal à projection sur T_ε de l'intersection du graphe de $\Gamma_{\mid T_\varepsilon}$ et de l'ensemble borélien $[(t,x) \in T_\varepsilon \times F \mid \varphi_n(t,x) \leqslant r]$. Donc chacune des r_n est μ-mesurable.

Pour la commodité du lecteur, nous présentons un lemme portant sur la mesurabilité et un lemme portant sur la semi continuité inférieure. Ces lemmes interviennent dans la démonstration de semi continuité inférieure des fonctionnelles intégrales.

LEMME 2. *Soient $(\Omega, \mathscr{A})$, $(X_1, \mathscr{X}_2)$, $(X_1, \mathscr{X}_2)$ trois espaces mesurables, Γ_i $(i = 1, 2)$ une multi-application de Ω à valeurs non vides de X_i, dont le graphe appartient à $\mathscr{A} \otimes \mathscr{X}_i$, h_i $(i = 1, 2, 3)$ une application$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{X}_1 \otimes \mathscr{X}, \mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))$ — mesurable de $\Omega \times X_1 \times X_2$ dans $\overline{\mathbf{R}}$. Alors l'application $f : \Omega \times X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbf{R}}$ définie par*

$$f(\omega, x_1, x_2) = \begin{cases} h_1(\omega, x_1, x_2) \text{ si } (x_1, x_2) \in X_1 \times \Gamma_2(\omega) \\ h_2(\omega, x_1, x_2) \text{ si } (x_1, x_2') \in \Gamma_1(\omega) \times (X_2 \setminus \Gamma_2(\omega)) \\ h_3(\omega, x_1, x_2) \text{ si } (x_1, x_2) \in (X_1 \Gamma_1 \setminus (\omega)) \times (X_2 \setminus \Gamma_2(\omega)) \end{cases}$$

est $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{X}_1 \otimes \mathscr{X}_2, \mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))$ — mesurable

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. L'ensemble

$$[(\omega, x_1, x_2) \in \Omega \times X_1 \times X_2 \mid f(\omega, x_1, x_2) \leqslant \lambda]$$

est la réunion des ensembles suivants :

$$A_1 = \text{graphe } (X_1 \times \Gamma_2) \cap [(\omega, x_1, x_2) \in \Omega \times X_1 \times X_2 \mid h_1(\omega, x_1, x_2) \leqslant \lambda]$$

$$A_2 = \text{graphe}(\Gamma_1 \times (X_2 \setminus \Gamma_2)) \cap [(\omega, x_1, x_2) \in \Omega \times X_1 \times X_2 \mid h_2(\omega, x_1 . x_2) \leqslant \lambda]$$

$$A_3 = \text{graphe}((X_1 / \Gamma_1) \times (X_2 / \Gamma_2)) \cap [(\omega, x_1, x_2) \in \Omega \times X_1 \times X_2 \mid h_3(\omega, x_1, x_2) \leqslant \lambda]$$

Or les graphes de $X_1 \times \Gamma_2$, $\Gamma_1 \times (X_2 \setminus \Gamma_2)$, $(X_1 \setminus \Gamma_1) \times X_2 / \Gamma_2)$ appartiennent à $\mathscr{A} \otimes \mathscr{X}_2 \otimes \mathscr{X}_2$ ([9], lemme IV, 10). Compte tenu de la mesurabilité des h_i $(i = 1,2,3)$, il est évident que les ensembles
A_i $(i = 1, 2,2)$ appartiennent à $\mathscr{A} \otimes \mathscr{X}_1 \otimes \mathscr{X}_2$.

LEMME 3. *Soient* F *et* E *deux espaces topologiques séparés, $h_1 : F \to]-\infty, +\infty]$ une fonction semi continue inférieurement et*
$h_2 : F \times E \to]-\infty, +\infty]$ une fonction semi-continue inférieurement. On suppose

qu'il existe $e_0 \in D$ tel que $h_1(x) \leqslant h_2(x, e_0)$ pour tout $x \in E$. Alors la fonction $h : F \times E \to]-\infty, +\infty]$ définie par

$$h(x,e) = \begin{cases} h_1(x) \text{ pour } x \in F \text{ et } e = e_0 \\ h_2(x,e) \text{ pour } (x,e) \in E \times (E / \{e_0\}) \end{cases}$$

est semi continue inférieurement sur $F \times E$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbf{R}$. Alors l'ensemble

$$[(x, e) \in F \times E \mid h(x, e) \leqslant r]$$

est réunion des ensembles suivants

$$A_1 = [x \in F \mid h_1(x) \leqslant r] \times \{e_0\}$$

$$A_2 = [(x, e) \in F \times F \mid h_2(x, e) \leqslant r] \cap F \times E \setminus \{e_0\}$$

Comme h_1 est semi continue inférieurement sur E, A_1 est fermé dans $F \times E$, de même la semi continuité de h_2 sur $F \times E$ implique que $A_3 = [(x, e) \in F \times E \mid h_2(x,e) \leqslant r]$ est fermé. Or $h_1(x) \leqslant h_2(x, e_0)$ pour tout $x \in E$. D'où

$$A_4 = [x \in F \mid h_2(x,e_0) \leqslant r] \times \{e_0\} \subset A_1$$

On en déduit que

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_3$$

car $A_3 = A_2 \cup A_4$. Donc $A_1 \cup A_2$ est fermé.

Voici maintenant un résultat technique permettant de ramener l'étude de la semi continuité inférieure des fonctionnelles intégrales au cas où ces fonctionnelles proviennent d'intégrandes positifs. Ceci a été remarqué par *Ioffé* ([12]). Nous reproduisons ici ce résultat dans un cadre abstrait sous la forme d'un lemme.

LEMME 4. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ positive finie, $(X, \mathcal{X})$ un espace mesurable, $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'applications $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ — mesurables de Ω dans X. Soit $\mathcal{J}$ un ensemble d'intégrandes $\mathcal{A} \otimes \mathcal{X}$ — mesurables de $\Omega \times X$ dans $[-\infty, +\infty]$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) Pour tout $r \in \mathbf{R}$ et tout $f \in \mathcal{J}$, $\sup(f, r) \in \mathcal{J}$

(ii) Tout intégrande $f \in \mathcal{J}$ minoré par une constante vérifie

$$\liminf_n \int_\Omega f(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) \geqslant \int_\Omega f(\omega, u_0(\omega))\, \mu(d\omega)$$

Alors, tout intégrande $h \in \mathcal{J}$ pour lequel il existe une suite uniformément intégrable $(\beta_n)_{n \geqslant 1}$ dans $L^1_{\mathbf{R}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que

$$h(\omega, u_n(\omega)) \geqslant \beta_n(\omega), \forall \omega \in \Omega, \forall n \geqslant 1$$

vérifie

$$\liminf_{n} \int_{\Omega} h(\omega, u_n(\omega))\mu(d\omega) \geqslant \int_{\Omega} h(\omega, u_0(\omega))\mu(d\omega)$$

Démonstration. Quitte à extraire une sous suite, on peut sans nuire à la généralité, supposer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} h(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) = a \in \mathbf{R}$$

Il s'agit de vérifier qu'on a $\int_{\Omega} h(\omega, u_0(\omega))\, \mu(d\omega) \leqslant a$. Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in X$, posons

$$h_p(\omega, x) = \max(-p, h(\omega, x))$$

On a $h_p \in \mathcal{T}$ pour tout p d'après (i). En vertu de (ii), on a $\forall\, p \in \mathbf{N}^*$,
$\liminf_{n} \int_{\Omega} h_p(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) \geqslant \int_{\Omega} h_p(\omega, u_0(\omega))\, \mu(d\omega)$

Pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, posons

$$\Omega_{n,p} = [\, \omega \in \Omega \mid h(\omega, u_n(\omega)) \leqslant -p]$$

Alors on a

$$-p\, \mu(\Omega_{n,p}) \geqslant \int_{\Omega_{n,p}} h(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega).$$

pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Posons

$$h' = \inf(0, h) \text{ et } \beta'_n = \inf(0, \beta_n),\ \forall n \geqslant 1$$

Alors on a

$$-p\, \mu(\Omega_{n,p}) \geqslant \int_{\Omega_{n,p}} h(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) \geqslant \int_{\Omega} h'(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) \geqslant \int_{\Omega} \beta'_n(\omega)\mu(d\omega)$$

Comme $(\beta_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée dans $L^1_{\mathbf{R}}(\Omega, \mathcal{Q}, \mu)$, $(\beta'_n)_{n \geqslant 1}$ l'est aussi.
Donc il existe $\alpha \in \mathbf{R}^+$ tel que $\int_{\Omega} \beta'_n(\omega)\, \mu(d\omega) \geqslant -\alpha$. D'où

$$\mu(\Omega_{n,p}) \leqslant \frac{\alpha}{p}$$

pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Donc

$$\lim_{p\to\infty} [\sup_{n \in \mathbf{N}^*} \mu(\Omega_{n,p})] = 0$$

Compte tenu des définitions de h_p et $\Omega_{n,p}$ on a

$$\int_{\Omega} h_p(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) \leqslant \int_{\Omega \setminus \Omega_{n,p}} h(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega)$$

pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \int_{\Omega} h(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ et tout $p \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\int_\Omega h_p\ (\omega,\ u_n(\omega))\ \mu(d\omega) \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_{n,\ p}} h(\omega,\ u_n(\omega))\ \mu(d\omega)$$

$$\leqslant a + \frac{\varepsilon}{2} - \int_{\Omega_{n,\ p}} \beta_n\ (\omega)\ \mu(d\omega)$$

Comme $(\beta_n)_{n \geqslant 1}$ est uniformément intégrable et comme $\mu(\Omega_{n,\ p})$ tend vers 0 uniformément par rapport à $n \in \mathbf{N}^*$, lorsque $p \to +\infty$, il existe un entier $P_\varepsilon > 0$ tel que

$$p \geqslant P_\varepsilon \Rightarrow - \int_{\Omega_{n,\ p}} \beta_n\ (\omega)\ \mu(d\omega) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*$$

D'où, pour $n \geqslant N_\varepsilon$ et $p \geqslant P_\varepsilon$, on a

$$\int_\Omega h_p(\omega,\ u_h(\omega))\ \mu(d\omega) \leqslant a + \varepsilon$$

Compte tenu de (ii), pour tout $p \geqslant p_\varepsilon$, on a

$$\int_\Omega h_p\ (\omega,\ u_o(\omega))\ \mu(d\omega) \leqslant \liminf_n \int_\Omega h_p(\omega,\ u_n(\omega))\ \mu(d\omega) \leqslant a + \varepsilon$$

D'où, finalement, $\int_\Omega h(\omega,\ u_o(\omega))\ \mu(d\omega) \leqslant a + \varepsilon$

Comme ε est arbitrairement petit, on $\int_\Omega h(\omega,\ u_o(\omega))\ \mu(d\omega) \leqslant a$, ce qui achève la démonstration.

Pour terminer ce paragraphe nous allons présenter deux lemmes techniques qui interviennent dans l'étude de la semi continuité inférieure de certaines fonctionnelles intégrales particulières.

LEMME 5. *Soient $(T,\ \mu)$ un espace compact métrisable muni d'une mesure de Radon positive μ, $(Y,\ d)$ un espace polonais, $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ deux suites d'applications $(\mathcal{T}_\mu,\ \mathcal{B}(Y))$ — mesurables de T dans Y, $f : T \times Y \to \mathbf{R}$ un intégrande de Carathéodory. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε dans Y tel que

$$\mu\ [t \in T \mid (u_n(t),\ v_n(t)) \notin K_\varepsilon \times K_\varepsilon] \leqslant \varepsilon$$

pour tout n,

(ii) la suite $(d\ (u_n(.),\ v_n\ (.)))_{n \geqslant 1}$ converge vers 0 en mesure.

Alors la suite $(f(.,\ u_n(.)) - f(.,\ v_n(.)))_{n \geqslant 1}$ converge vers 0 en mesure sur T.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons les notations de l'énoncé: En vertu du théorème de Dragoni — Scorza (cf. *Castaing* [2], th.1), il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu\ (T/T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et tel que la restriction de f à

$T_\varepsilon \times K_\varepsilon$ soit continue, donc uniformément continue. Par suite, il suffit de vérifier que la suite

$$(f(., u_n(.)) - f(., v_n(.)))_n$$

converge vers 0 en mesure sur T_ε. Soit $\beta > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour $(x, y) \in K_\varepsilon \times K_\varepsilon$, avec $d(x, y) < \delta$, on ait,

$$| f(t, x) - f(t,y) | < \beta \text{ pour tout } t \in T_\varepsilon$$

Soit $\bar{T}_n = [t \in T_\varepsilon \mid d(u_n(t), v_n(t)) \geqslant \delta]$, $\forall\, n \geqslant 1$. Il existe un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, on ait $\mu\,(T_n) \leqslant \varepsilon$. Donc, pour $n \geqslant N_\varepsilon$ et pour $t \in [t \in T_\varepsilon | (u_n(t), v_n(t)) \in K_\varepsilon \times K_\varepsilon] \setminus T_n$, on a

$$| f(t, u_n(t)) - f(t, v_n(t)) | < \beta$$

D'où, pour $n \geqslant N_\varepsilon$,

$$\mu\,[t \in T_\varepsilon || f(t, u_n(t) - f(t, v_n(t) | \geqslant \beta] \leqslant 2\varepsilon.$$

Remarque pratique. Le lemme est valable si l'on suppose que f est $\mathcal{C}_\mu \otimes \mathcal{B}(Y)$ — mesurable et $f_{T \times K}$ est de Carathéodory.

LEMME 6. *Soit (T, μ) un espace compact métrisable muni d'une mesure de Radon positive μ, G un espace de Banach séparable, (u_n) et $(v)_n$ deux suites d'applications $(\mathcal{C}_\mu, \mathcal{B}(G))$ — mesurables de T dans G, $f : T \times G \to \mathbf{R}$ un intégrande $\mathcal{C}_\mu \otimes \mathcal{B}(G)$ — mesurable. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un convexe $\sigma(G,G')$ compact équilibré K_ε dans G tel que

$$\mu[t \in T \mid (u_n(t), v_n(t) \notin K_\varepsilon \times K_\varepsilon] \leqslant \varepsilon$$

pour tout $n \geqslant 1$ et tel que $f(t,.)$ soit $\sigma(G, G')$ continue sur K_ε.

(ii) Pour tout voisinage $\sigma(G, G')$ ouvert convexe de l'origine dans G, V, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu[t \in T \mid u_n(t) - v_n(t) \notin V] = 0$$

Alors la suite $(f(., u_n(.)) - f(., v_n(.)))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 en mesure sur T.

Démonstration. Il existe dans G' une suite $(e'_k)_{k\geqslant 1}$ séparant les points de G. Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons les notations de l'énoncé. Comme K_ε est convexe $\sigma(G'G)$ compact équilibré, on introduit comme dans la démonstration du théorème 1, la fonction réelle continue et convexe φ définie sur K_ε en posant

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{| < e'_k , x > |}{1 + \delta^*(e'_k, K_\varepsilon)}, \quad \forall\, x \in K_\varepsilon .$$

On pose $d(x, y) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$, $\forall (x, y) \in K_\varepsilon \times K_\varepsilon$.

Alors d est une distance sur K_ε et la topologie induite par cette distance est moins fine que la topologie faible $\sigma(G, G')$. Comme K_ε est $\sigma(G, G')$ compact, ces topologies coïncident sur K_ε . C'est un argument classique, mais ici on a besoin de la formule explicite de la distance d'introduite. Ceci nous permet de procéder comme dans le lemme 5. Tout d'abord, on peut appliquer le théorème de *Dragoni-Scorza* à $f_{|T \times K\varepsilon}$, K_ε étant muni de la distance d, en vertu de (i) et du fait que $(K_\varepsilon$, d) est un espace compact métrique. Soit T_ε un compact de T tel que $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et $f_{|T_\varepsilon \times K_\varepsilon}$ soit continue. Il suffit de vérifier que la suite $(f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, v_n(\cdot)))_{n \geqslant 1}$ converge vers 0 en mesure sur T_ε . Soit $\beta > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour $(x, y) \in K_\varepsilon \times K_\varepsilon$, avec $d(x, y) < \delta$, on ait

$$| f(t, x) - f(t, y) | < \beta \text{ pour tout } t \in T_\varepsilon$$

Vu la continuité de φ sur K_ε, il existe un voisinage $\sigma(G, G')$ ouvert convexe de l'origine 0, V, tel que

$$u \in K_\varepsilon \cap V \Rightarrow \varphi(u) < \delta$$

Donc pour tout $(x, y) \in K_\varepsilon \times K_\varepsilon$ tel que $\frac{x-y}{2} \in V$, on a

$\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = d(x, y) < \delta$. Soit $T_n = [t \in T_\varepsilon \mid u_n(t) - v_n(t) \notin 2V]$, $\forall\ n \geqslant 1$.

En vertu de (ii), il existe un entier N_ε tel que, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, on ait $\mu(T_n) \leqslant \varepsilon$. Donc pour $n \geqslant N_\varepsilon$ et pour

$$t \in [t \in T_\varepsilon \mid (u_u(t), v_n(t)) \in K_\varepsilon \times K_\varepsilon] \setminus T_n \text{, on a}$$

$$| f(t, u_n(t)) - f(t, v_n(t)) | < \beta$$

D'ou

$\mu\,[t \in T_\varepsilon \,\|\, D'où\ f(t, u_n(t)) - f(t, v_n(t)) | \geqslant \beta] \leqslant 2\varepsilon$

Avant d'aborder la semi continuité inférieure des fonctionnelles intégrales, indiquons les deux remarques suivantes.

Remarque 1. En vertu de la définition des espaces décomposables en dualité $(L_F, L_{F'})$, si (A_n) est une suite dans $\mathcal{A}$ telle que $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$ et si (u_n) est une suite $\sigma(L_F, L_{F'})$ convergente, la suite $(\chi_{A_n} u_n)$ converge vers 0 pour $\sigma(L_F, L_{F'})$.

Ce fait se démontre en utilisant un résultat général dû à *Castaing* ([8], prop. 1) : Si (v_n) est une suite bornée dans $L^\infty_{G'_s}(\Omega, \mathcal{A}, \widehat{\mu})$ convergeant vers 0 en mesure, alors (v_n) converge vers 0 uniformément sur toute partie uniformément intégrable de $L^1_G(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, G étant un espace de Banach séparable, et l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ n'étant pas nécessairement σ – fini. Bien entendu, dans le cas des espaces $(L_T, L_{F'})$, le fait précédent peut être démontré directement, en remarquant que toute suite faiblement convergente dans $L^1_{\mathbf{R}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est uniformément intégrable.

Remarque 2. En vertu du lemme 4, l'étude la semi-continuité des fonctionnelles intégrales se ramène à celle où ces fonctionnelles proviennent d'intégrandes positifs.

§ 2. THEOREMES DE SEMI – CONTINUITE INFERIEURE DES FONCTIONNELLES INTEGRALES.

THÉORÈME 4. *Soient (T, μ) un espace compact métrisable muni d'une mesure de Radon positive, F un espace localement convexe souslinien du type K_0, tel qu'il existe sur son dual une topologie localement convexe souslinienne compatible avec la dualité. Soit Γ une multi- application scalairement μ-mesurable de T à valeurs convexes compactes équilibrées non vides de F. Soient E un espace souslinien et $f : T \times F \times E \to [0, +\infty]$ un intégrande approximativement semi-continu inférieurement tel que $f(t,.,e)$ soit convexe sur F pour tout $(t, e) \in T \times E$ et $f(t,.,.)$ soit semi-continue inférieurement sur $F \times E$ pour tout $t \in T$. Soient $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dans L_F telle que $u_n(t) \in \Gamma(t)$ pour tout $t \in T$ et tout $n \geqslant 1$, et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'applications μ-mesurables de T dans E.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) (u_n) converge vers $u_0 \in L_F$ pour la topologie $\sigma(L_{F'}, L_F)$,

(ii) (v_n) converge simplement sur T vers une application μ-mesurable v_0 de T dans E,

(iii) il existe $\overline{u} \in L_F$ tel que $\overline{u}(t) \in \Gamma(t)$ $\forall\, t \in T$ et tel que l'application $t \to f(t, \overline{u}(t), v_0(t))$ soit μ-intégrable sur T. Alors on a

$$\liminf \int_T f(t, u_n(t), v_n(t))\, \mu(dt) \geqslant \int_T f(t, u_0(t), v_0(t))\, \mu(dt)$$

■

Démonstration. Le principe de la démonstration consiste dans une première étape à particulariser f en supposant que pour tout $t \in T$, la fonction $f(t,.,v_0(t))$ soit finie et continue sur $\Gamma(t)$ et en utilisant un théorème de dualité des fonctionnelles intégrales convexes sur le couple $(L_F, L_{F'})$. On passe ensuite dans la deuxième étape au cas général en utilisant le corollaire du théorème 2. En dimension finie, la situation est plus simple. Ainsi *Olech* ([15]) a procédé de la sorte pour le cas où le couple $(L_F, L_{F'})$ est $(L^1_{\mathbf{R}^n}, L^\infty_{\mathbf{R}^n})$ en supposant d'abord que $f(t,.,e)$ soit lipschitzienne sur $\mathbf{R}^n$ et en passant directement au cas général par un résultat d'approximation classique pour les intégrandes convexes normaux en utilisant une formule analogue à celle présentée par *Castaing* ([6]) (voir aussi le théorème 3).

Signalons que certains points de la démonstration dans l'article de *Olech* ([15]) méritent d'être explicités. Mais il n'est guère possible de procéder exactement comme *Olech* dans le cas considéré ici car F est un espace localement convexe et le couple $(L_F, L_{F'})$ est un couple d'espaces décomposables en dualité. Par ailleurs, même dans le cas particulier où le couple $(L_F, L_{F'})$ est le couple $(L^\infty_{G'_s}(T,\mu),\ L^1_G(T,\mu))$ où G est un espace de Banach séparable et G'_s son dual faible, le théorème précédent ne résulte pas de modifications des démonstrations classiques traditionnellement utilisées en dimension finie dans la littérature. Ces commentaires étant faits. Nous allons passer à la démonstration proprement dite du théorème de semi continuité.

Première étape. Dans cette étape on suppose que la condition (j) suivante est satisfaite.

(j) Pour tout $t \in T$, $f(t,.,v_0(t))$ est finie et continue sur $\Gamma(t)$.

Comme il a été dit au début de la démonstration du lemme 4, on peut supposer que $\lim_{n\to\infty} \int_T f(t, u_n(t), v_n(t))\, \mu(dt) = a \in \mathbf{R}$. Il s'agit de prouver l'inégalité $\int_T f(t, u_0(t), v_0(t))\, \mu(dt) \leqslant a$.

Pour tout $(n, \varepsilon) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}^*_+$, posons

$$\begin{cases} T_{n,\varepsilon} = \{ t \in T \mid \inf\limits_{x \in \Gamma(t)} [f(t,x,v_n(t)) - f(t,x,v_0(t))] \leqslant \varepsilon \} \\ u_{n,\varepsilon} = \chi_{T_{n,\varepsilon}}\, \bar{u} + \chi_{T \setminus T_{n,\varepsilon}}\, u_n \end{cases}$$

D'après le lemme 1, on a $\lim_{n\to\infty} \mu(T_{n,\varepsilon}) = 0$ pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$

Donc, d'après la remarque préliminaire $(u_{n,\varepsilon} - u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $0 \in L_F$ pour $\sigma(L_F, L_{F'})$ par suite $(u_{n,\varepsilon})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $u_0 \in L_F$ pour $\sigma(L_F, L_{F'})$ pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Nous allons prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_n \sup \int_T f(t, u_{n,\varepsilon}(t), v_0(t))\mu(dt) \leqslant a + 2\varepsilon + \varepsilon\mu(T)$$

Fixons $\varepsilon > 0$. On a

$$\int_T f(t,u_{n,\varepsilon}(t), v_o(t))\mu(dt) = \int_{T_{n,\varepsilon}} f(t, \dot{u}(t), x_o(t))\mu(dt) + $$
$$+ \int_{T\setminus T_{n,\varepsilon}} f(t,u_n(t), v_o(t))\mu(dt)$$

D' après (iii), il existe un entier $N_\varepsilon \in N$ tel que, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, on ait

$$\int_T f(t,u_{n,\varepsilon}(t), v_o(t))\mu(dt) \leqslant \varepsilon + \int_{T/T_{n,\varepsilon}} f(t,u_n(t), v_o(t))\mu(dt)$$

Donc, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, on a, puisque f est positif,

$$\int_T f(t,u_{n,\varepsilon}(t), v_o(t))\cdot\mu(dt) \leqslant \varepsilon + \int_{T/T_{n,\varepsilon}} [f(t,u_n(t), v_o(t)) - f(t,u_n(t),$$
$$v_n(t))]\mu(dt) + \int_T f(t,u_n(t), v_n(t))\mu(dt)$$
$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon\mu(T) + \int_T f(t,u_n(t), v_n(t))\mu(dt)$$

Il existe un entier $N'_\varepsilon > N_\varepsilon$ tel que, pour $n \geqslant N'_\varepsilon$, on ait

$$\int_T f(t,u_{n,\varepsilon}(t), v_o(t))\mu(dt) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon\mu(T) + a$$

Et par suite, $\lim_n \sup \int_T f(t,u_{n,\varepsilon}(t), v_o(t))\mu(dt) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon\mu(T) + a$.

A partir de cette inégalité, nous allons établir l' inégalité $\int_T f(t,u_o(t), v_o(t))\mu(dt) \leqslant a$, grâce à un résultat de dualité des fonctionnelles intégrales convexes ([9], th. VII. 7). Posons

$$g(t,x) = \begin{cases} f(t,x,v_o(t)) & si\ x \in \Gamma(t) \\ +\infty & si\ x \notin \Gamma(t) \end{cases}$$

Alors l'intégrande g est approximativement semi continu inférieurement. Soit g_t^* la fonction duale de g_t,

$$g^*(t,x') = \sup_{X\in F} [\langle x', x\rangle \quad g(t,x)], (t,x') \in T \times F'$$

Comme F' est souslinien, il résulte de ([3], prop. 2) que g^* est approximativement borélienne. Comme $g(t,x)$ est $\geqslant 0$ pour tout $(t,x) \in T \times F$, on a $g^*(t,0) \leqslant 0$. D' où $\int_T g^*(t,0)\, \mu\,(dt) < +\infty$.

Posons

$$I_g(u) = \int_T g(t,u(t))\, \mu\,(dt) \qquad u \in L_F$$
$$I_g{}^*(w) = \int_T g(t, w(t))\, \mu\,(dt), \qquad w \in L_{F'}$$

En reprenant la démonstration du théorème de dualité ([9], th. VII. 7) et en utilisant les propriétés de g et g^* évoquées plus haut, on vérifie facilement que I_g et $I_g{}^*$ sont duales l'une de l'autre. En particulier, I_g est semi-continue inférieurement sur L_F pour la topologie $\sigma\,(L_F, L_{F'})$. Comme $(u_{n,\varepsilon})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers u_o pour cette topologie, on a

$$I_g(u_o) \leqslant \liminf_n I_g(u_{n,\varepsilon})$$

c' est à dire,

$$\int_T f(t,u_o(t), v_o(t))\, \mu\,(dt) \leqslant \liminf_n \int_T f(t,u_{n,\varepsilon}(t), v_o(t))\, \mu\,(dt)$$

Compte tenu de l' inégalité,

$$\limsup_n \int_T f(t,u_{n,\varepsilon}(t), v_o(t))\, \mu\,(dt) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon\mu\,(T) + a,$$

on obtient

$$\int_T f(t,u_o(t), v_o(t))\, \mu\,(dt) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon\mu\,(T) + a$$

pour tout $\varepsilon > 0$. D' où

$$\int_T f(t,u_o(t), v_o(t))\, \mu\,(dt) \leqslant a$$

Avant de passer à la deuxième étape, il est bon de noter ici que le résultat obtenu dans cette étape reste valable lorsqu'on suppose f approximativement borélien au lieu de « approximativement semi-continu inférieurement ». Mais cette dernière hypothèse est nécessaire pour la suite de la démonstration.

Deuxième étape. Dans cette étape on supprime la condition (j)

(j) Pour tout $t \in T$, $f(t,., v_o(t))$ est finie et continue sur $\Gamma(t)$.

On va se ramener à la situation envisagée dans la fin de la première étape, signalée plus haut, en appliquant le corollaire du théorème 2. Avec les notations introduites dans la fin de la démonstration de la première étape l'intégrande

$$g(t,x) = \begin{cases} f(t,x,v_o(t)) & si \quad x \in \Gamma(t) \\ +\infty & si \quad x \notin \Gamma(t) \end{cases}$$

satisfait aux conditions d'application du corollaire du théorème 2.

Ceci est évident en vertu des propriétés de mesurabilité de v_0 et Γ et de semi-continuite inférieure de f. Il existe alors une suite croissante d'intégrandes positifs, $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}f$, définis sur $T \times F$ vérifiant

(1) $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$, *il existe un compact* $T_\varepsilon \subset T$ *tel que* $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et $[(t, x) \in T_\varepsilon \times F \mid g_k(t, x) \leqslant r]$ *est de type* K_σ *pour tout* $r \in \overline{\mathbf{R}}$,

(2) $g(t, x) = \lim_{k\to\infty} \uparrow g_k(t, x)$ *pour* $x \in \Gamma(t)$, $t \in T$

(3) $\forall\ k \in \mathbf{N}$, $\forall\ t \in T$, $g_k(t,.)$ *est convexe continue sur* $\Gamma(t)$

Posons

$$f'(t, x, e) = \begin{cases} f(t, x, e) & \text{pour } e \in E \text{ et } x \in \Gamma(t) \\ +\infty & \text{pour } e \in E \text{ et } x \notin \Gamma(t) \end{cases}$$

$$f_k(t, x, e) = \begin{cases} g_k(t, x) & \text{pour } e = v_0(t) \\ f'(t, x, e) & \text{pour } e \neq v_0(t) \end{cases}$$

Alors on a

$$\forall (t, x, e) \in T \times F \times E,\ f'(t, x, e) = \lim_{k\to\infty} \uparrow f_k(t, x, e)$$

$$f_k(t, x, v_0(t)) = g_k(t, x) \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma(t)$$

$$f_k(t, u_n(t), v_n(t)) \leqslant f'(t, u_n(t), v_n(t)) = f(t, u_n(t), v_n(t))$$

De plus la restriction de $f_k(t,., v_0(t))$ à $\Gamma(t)$ est finie et continue car égale à la restriction de $g_k(t,.)$ à $\Gamma(t)$. La convexité de $f_k(t,., e)$ sur F pour tout $(t, e) \in T \times E$ est évidente. La semi-continuité de f(t,.,.) sur $F \times E$ résulte du lemme 3 car $g_k(t,.)$ est semi-continue inférieurement sur F, $f'(t,.,.)$ est semi-continue inférieurement sur $F \times E$ et $g_k(t, x,) \leqslant f'(t, x, v_0(t))$ pour tout $x \in F$.

Comme $\overline{u}(t) \in \Gamma(t)$ on a pour tout $t \in T$ et tour entier k : $0 \leqslant g_k(t, \overline{u}(t)) \leqslant g(t, \overline{u}(t)) = f(t, u(t), v_0(t))$ pour tout entier k.

Vérifions que f_k est approximativement borélienne. Par construction, on a

$$f_k(t,x,e) = \begin{cases} g_k(t,x) & si \quad (x,e) \in F \times \{v_0(t)\} \\ f(t,x,e) & si \quad (x,e) \in \Gamma(t) \times E \setminus \{v_0(t)\} \\ +\infty & si \quad (x,e) \in (F \setminus \Gamma(t)) \times E \setminus \{v_0(t)\} \end{cases}$$

La mesurabilité de v_0 et Γ et le corollaire 2 du théorème 2 permettent d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ avec $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ tel que

$v_0 \mid T_\varepsilon$ soit continue, $\Gamma \mid T_\varepsilon$ soit de graphe fermé, $g_k \mid T_\varepsilon \times E$ soit borélien, $\forall_{k\in\mathbf{N}}$, et $f \mid T_\varepsilon \times F \times E$ soit borélien. Appliquons le lemme 2 en prenant $\Gamma_2(t) = \{v_0(t)\}$, $\Gamma_1(t) = \Gamma(t)$ pour tout $t \in T_\varepsilon$ et en posant, pour tout $(t, x, e) \in T_\varepsilon \times E \times E$,

$$f_k(t,x,e) = \begin{cases} g_k(t,x) & si \quad (x,e) \in F \times \Gamma_2(t) \\ f(t,x,e) & si \quad (x,e) \in \Gamma_1(t) \times \Gamma_2(t)^c \\ +\infty & si \quad (x,e) \in \Gamma_1(t)^c \times \Gamma_2(t)^c \end{cases}$$

Alors f_k est borélienne sur $T_\varepsilon \times F \times E$. donc approximativement borélienne. Enfin, pour tout $t \in T$ et tout entier $n \in \mathbf{N}$ et tout entier $k \in \mathbf{N}$, on a

$$f_k(t,u_n(t), v_n(t)) \leqslant f^{\cdot}(t,u_n(t), v_n(t)) = f(t,u_n(t), v_n(t))$$

D'où

$$\liminf_n \int_T f_k(t,u_n(t),v_n(t))\, \mu(dt) \leqslant a, \forall\, k \in \mathbf{N}$$

Comme $u_0(t) \in \Gamma(t)$ $\mu.p.p.$ et

$$\lim_{k\to\infty} \uparrow f_k(t,u_0(t), v_0(t)) = f(t,u_0(t), v_0(t), v_0(t)), \mu.p.p.$$

on en déduit que $\int_T f(t,u_0(t),v_0(t))\, \mu(dt) \leqslant a$

Remarque. La condition « $u_n(t) \in \Gamma(t)$ pour tout $t \in T$ et tout n » est restrictive dans notre énoncé, en comparaison avec les conditions exigées dans le cas des espaces de dimension fini ([1], [10, [11], [12], [15]). Dans le cas où F est un espace de Banach séparable, les conditions introduites dans le théorème précédent peuvent être affaiblies. Ceci provient du fait que les espaces considéré ici sont très généraux d'une part, et pour le cas d'espaces de *Banach séparables F*, il est possible, d'autre part, d'approximer un intégrande convexe normal positif, g, par une suite croissante (g_k) d'intégrandes positifs, convexes, lipschitziens, sur F *entier*. En effet, soit $g : \Omega \times F \to [0,+\infty]$ un intégrande convexe normal. Posons, pour tout entier $k > 0$, et tout $(\omega,x) \in \Omega \times F$,

$$g_k(\omega, x) = \inf_{y\in F} [k \| x-y \| + g(\omega, y)]$$

Alors le théorème 3 montre que la suite (g_k) possède les propriétés requises. Cette approximation globale perment d'affaiblir l'hypothèse portant sur la suite faiblement convergente (u_n). Bref, il est possible d'obtenir des variantes d'énoncés en utilisant les résultats préliminaires et les théorèmes d'approximation présentés dans le paragraphe 1. Signalons maintenant ces variantes dont les démonstrations sont parfois plus simples que celle du théorème 4.

THÉORÈME 5. *Soit F un espace localement convexe souslinien tel qu'il existe sur son dual une topologie localement convexe souslinienne compatible avec la dualité, K un convexe compact équilibré de F, E un espace topologique séparé, $f : \Omega \times K \times E \to [0, +\infty]$ un intégrande $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(K) \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$-mesurable tel que $f(\omega,.,.)$ soit semi-continue inférieurement sur $K \times E$ pour tout $\omega \in \Omega$ et $f(\omega,., e)$ soit convexe sur K pour tout $(\omega, e) \in \Omega \times E$. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite dans L_F telle que $u_n(\omega) \in K$ pour tout $n \geq 1$, et $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite d'applications $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$-mesurable de Ω dans E.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $u_0 \in L_F$ pour la topologie $\sigma(L_F, L_{F'})$,

(ii) $(v_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur Ω vers une application $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$-mesurable v_0 de Ω dans E,

(iii) il existe $\overline{u} \in L_F$ avec $\overline{u}(\omega) \in K$ pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \to f(\omega, \overline{u}(\omega), v_0(\omega))$ soit μ-intégrable sur Ω.

Alors on a

$$\liminf_n \int_\Omega f(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega))\mu(d\omega) \geq \int_\Omega f(\omega, u_0(\omega), v_0(\omega))\mu(d\omega)$$

La démonstration est laissée au lecteur. Dans la première étape on suppose que $f(\omega,., v_0(\omega))$ est finie et continue sur K pour tout $\omega \in \Omega$. Cette étape se démontre comme dans celle du théorème 4.

La deuxième étape est plus simple. On utilise ici le théorème 1 qui est valable pour l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Voici un cas particulier de la situation envisagée dans la variante précédente. *Soient X un espace compact métrisable, E un espace souslinien métrisable, F est l'espace de Banach séparable $\mathcal{C}(X)$ des fonctions réelles continues sur X muni de la convergence uniforme, $\mathcal{M}^1_+(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité de Radon sur X ($\mathcal{M}^1_+(X)$ est un convexe compact métrisable de F'_s). Soient (λ_n) une suite d'applications dans $L^\infty_{F'_s}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ avec $\lambda^n(\omega) \in \mathcal{M}^1_+(X)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \geq 1$, convergeant pour $\sigma(L^\infty_{F'_s}(\Omega, \mathcal{A}, \mu), L^1_F(\Omega, \mathcal{A}, \mu))$ vers $\lambda^0 \in L^\infty_{F'_s}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et (v_n) une suite d'applications $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$-mesurables de Ω dans F convergeant simplement vers une application $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E)$-mesurable $v_0 : \Omega \to E$. Soit $h : \Omega \times X \times E \to [0, +\infty]$ un intégrande $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$-mesurable tel que $h(\omega,.,.)$ soit* *semi continue inférieurement sur* $X \times E$ *On suppose qu'il existe* $\overline{\lambda} \in L^{\infty}_{F'}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

avec $\overline{\lambda}(\omega) \in \mathcal{M}^1_+(X)$, $\forall \omega \in \Omega$ *tel que*

$$\int_\Omega [\int_X h(\omega, x, v_0(\omega))\overline{\lambda}_\omega(dx)]\, \mu(d\omega) < \infty$$

Alors on a

$$\liminf_n \int_\Omega [\int_X h(\omega, x, v_n(\omega))\, \lambda^n_\omega(dx)]\, \mu(d\omega) \geqslant \int_\Omega [\int_X h(\omega, x, v_0(\omega))\, \lambda^0_\omega(dx)]\, \mu(d\omega)$$

La démonstration consiste à se ramener au cas où $h(\omega,.,.)$ est lipschitzienne sur l'espace métrique $(X \times E, d)$ pour tout $\omega \in \Omega$, avec un rapport de lipschitz indépendant de ω. En effet on a $h(\omega, x, e) = \sup_{k \in \mathbf{N}} h_k(\omega, x, e)$ où pour tout

$(k, \omega, x, e) \in \mathbf{N} \times \Omega \times X \times E$,

$\mathbf{h}_k(\omega, x, e) = \inf_{(y,z) \in X \times E} [kd((x,e),(y,z)) + h(\omega,y,z)]$ et il est facile de vérifier que si le résultat annoncé est vrai pour chaque h_k, il est vrai pour h. Pour un intégrande h tel que $h(\omega,.,.)$ soit lipschitzienne sur $X \times E$ avec un rapport de lipschitz indépendant de $\omega \in \Omega$, l'intégrande f de $\Omega \times \mathcal{M}^1_+(X) \times E$ dans $[0, +\infty]$ associé à h par $f(\omega, \nu, e) = \int_X h(\omega, x, e)\, \nu(dx)$ est convexe sur $\mathcal{M}^1_+(X)$, continu sur $\mathcal{M}^1_+(X) \times E$, $\mathcal{A}$ — mesurable sur Ω, donc $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{M}^1_+(X)) \otimes \mathcal{B}(E)$ — mesurable. Alors avec cet intégrande f on est ramené aux conditions de la 1ère étape de la démonstration du théorème 4, étape dans laquelle il n'est pas nécessaire de supposer que les compacts soient équilibrés et on obtient le résultat annoncé en procédant comme dans cette étape.

THÉORÈME 6. *Soient* F *et* E *des espaces de Banach séparables,* $f : \Omega \times F \times E \to [0, +\infty]$ *un intégrande* $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(F) \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$ — *mesurable tel que* $f(\omega,.,.)$ *soit convexe propre semi-continue inférieurement sur* $F \times E$ *pour tout* $\omega \in \Omega$. *Soient* (u_n) *une suite dans* L_F *convergeant vers* $u_0 \in L_F$ *pour la topologie* $\sigma(L_F, L_{F'})$ *et* (v_n) *une suite d'applications* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$ — *mesurables de* Ω *dans* E *convergeant en mesure vers une application* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$ — *mesurable* $v_0 : \Omega \to E$. *On suppose qu'il existe* $\overline{u} \in L_F$ *tel que* $\omega \to f(\omega, \overline{u}(\omega), v_0(\omega))$ *soit* μ — *intégrable sur* Ω.

Alors on a

$$\liminf_n \int_\Omega f(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega))\, \mu(d\omega) \geqslant \int_\Omega f(\omega, u_0(\omega), v_0(\omega))\, \mu(d\omega)$$

Démonstration. On peut supposer que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega))\, \mu(d\omega) = a$

avec $a \in \mathbf{R}$.

Première étape. On suppose que $f(\omega,.,.)$ est lipschizienne sur le produit $F \times E$, c'est à dire, f vérifie la condition :

(j) $|f(\omega, x_1, e_1) - f(\omega, x_2, e_2)| \leqslant k \|(x_1, e_1) - (x_2, e_2)\|_{F \times E}$

où $\|(x, e)\|_{F \times E} = \|x\|_F + \|e\|_E$, $\forall (x, e) \in F \times E$ et k est une constante > 0.

Comme $(v_n)_{n > 1}$ converge vers v_0 en mesure, la condition (j) implique que la suite

$$(f(., u_n(.), v_n(.)) - f(., u_n(.), v_0(.)))_{n \geqslant 1}$$

converge vers 0 en mesure. Posons, pour tout $(n, \varepsilon) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}^+_*$,

$$\Omega_{n, \varepsilon} = \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega)) - f(\omega, u_n(\omega)), v_0(\omega))| > \varepsilon\}$$

Alors on a $\lim_{n \to \infty} \mu(\Omega_{n, \varepsilon}) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Posons, pour tout $(n, \varepsilon) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}^*_+$,

$$u_{n, \varepsilon} = \chi_{\Omega_{n, \varepsilon}} \bar{u} + \chi_{\Omega \setminus \Omega_{n, \varepsilon}} u_n$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on vérifie comme dans le théorème 4 que

$$\limsup_n \int_\Omega (f(\omega, u_{n, \varepsilon}(\omega), v_0(\omega)) \mu(d\omega) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon\mu(\Omega) + a$$

et en utilisant la dualité des fonctionnelles intégrales convexes, on obtient

$$\int_\Omega f(\omega, u_0(\omega), v_0(\omega)) \mu(d\omega) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon\mu(\Omega) + a$$

pour tout $\varepsilon > 0$. D'où $\int_\Omega f(\omega, u_0(\omega), v_0(\omega)) \mu(d\omega) \leqslant a$.

Deuxième étape. On supprime la condition (j).

On passe au cas général en utilisant le théorème d'approximation dû à *Castaing* ([6], lemme). Pour tout $(\omega, x, e) \in \Omega \times F \times E$ et tout entier $k > 0$, posons

$$f_k(\omega, x, e) = \inf_{(y, z) \in F \times E} [k \|(x, e) - (y, z)\|_{F \times E} + f(\omega, y, z)]$$

Alors f_k vérifie les conditions d'application de la première étape, $\forall k$. Ceci permet de terminer la démonstration.

Remarque. La convexité de $f(\omega,.,.)$ sur $F \times E$ est exigeante dans cet énoncé. Mais les conditions portant sur la suite (u_n) et la suite (v_n) sont très faibles. Le point crucial de la démonstration est l'utilisation de la convergence en mesure de la suite

$$(f(., u_n(.), v_n(.)) - f(., u_n(.), v_0(.)))_{n \geqslant 1}$$

dans la première étape. Ces considérations permettent d'énoncer la variante suivante dont la démonstration est basée sur le lemme 5.

THÉORÈME 7. *Soient (T, μ) un espace compact métrisable muni d'une mesure de Radon positive μ, F et E deux espaces de Banach séparables, $f : T \times F \times E \to [0, +\infty]$ un intégrande tel que $f(t,.,.)$ soit continue sur $F \times E$ pour tout $t \in T$, $f(t,., e,)$ soit convexe sur F pour tout $(t, e) \in T \times E)$, $f(., x, e)$ soit μ — mesurable sur T pour tout $(x, e) \in F \times E$. Soient (u_n) une suite dans L_F convergeant vers $u_0 \in L_F$ pour $\sigma(L_F, L_{F'})$ et (v_n) une suite d'applications $\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$ — mesurables de Ω dans E convergeant en mesure vers une application $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$ — mesurable $v_0 : \Omega \to E$. On suppose, en outre, que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact L_ε dans F et un compact K_ε dans E tels que

$$\mu[t \in T \mid u_n(t) \notin L_\varepsilon] \leqslant \varepsilon, \forall\ n \geqslant 0$$

et

$$\mu[t \in T \mid v_n(t) \notin K_\varepsilon] \leqslant \varepsilon, \forall\ n \geqslant 0.$$

(ii) Il existe $\overline{u} \in L_F$ tel que $t \to f(t, \overline{u}(t), v_0(t))$ soit μ intégrable.

Alors on a

$$\liminf_n \int_T f(t, u_n(t), v_n(t))\,\mu(dt) \geqslant \int_T f(t, u_0(t), v_0(t))\,\mu(dt)$$

Démonstration. On suppose $\lim_{n\to\infty} \int_T f(t, u_n(t), v_n(t))\mu(dt) = a \in \mathbf{R}$

et on procède comme dans la première étape de la démonstration du théorème 6. Soit $\varepsilon > 0$. Avec les notations de l'énoncé, posons $w_\varepsilon = L_\varepsilon \times K_\varepsilon$ et considérons les suites $(u_n, v_n)_{n\leqslant 0}$ et $(u_n, v_0)_{n\leqslant 0}$ Alors la suite $((u_n, v_n) - (u_n, v_0))_{n>0}$ converge vers 0 en mesure dans $F \times E$ puisque (v_n) converge vers v_0 en mesure dans E. De plus, on a

$$\mu[t \in T \mid ((u_n(t), v_n(t)), (u_n(t), v_0(t))) \notin w_\varepsilon \times w] \leqslant 4\varepsilon$$

pour tout $n \geqslant 0$ grâce à la condition (i). On en déduit que la suite

$$(f(., u_n(.), v_n(.)) - f(., u_n(.), v_0(.)))_{n\geqslant 0}$$

converge vers 0 en mesure en appliquant le lemme 5. En procédant comme dans les théorèmes précédents, on obtient $\int_T f(t, u_0(t), v_0(t))\,\mu(dt) \leqslant a$.

Remarques: 1) L'idée d'utiliser le lemme 5 afin de montrer la convergence en mesure de la suite $(f(., u_n(.), v_n(.)) - f(., u_n(.), v_0(.)))_{n\geqslant 0}$ remonte à *Bekowitz* ([1]) en dimension finie. Cependant l'utilisation du lemme 5 est restrictive car on exige que T soit compact métrisable (au lieu d'être un espace abstrait) et f de Carathéodory (au lieu d'être semi continu inférieurement sur le produit $F \times E$), et ceci, même dans le cas où F et E sont de dimension finie. Ainsi, l'énoncé du théorème de semi continuité inférieure précédent plus faible que le résultat de semi continuité inférieure énoncé par *Olech* ([15]) car *Olech* suppose T abstrait. Cependant les énoncés donnés par *Olech* exigeraient (?) que T soit compact métrique (pour la condition nécessaire de semi continuité inférieure) et que f soit majoré ou de façon générale, la suite $(f(., u_n(.), v_0(.)))_n$ soit uniformément intégrable (pour la condition suffisante de semi continuité inférieure); la mesurabilité de Q ([15], p. 140) et les formules 7 et 8 dans ([15], p. 136) n'étant pas complètement explicitées.

2) La remarque 1 s'applique aussi au lemme 6 qui permet de démontrer la semi continuité inférieure lorsque l'intégrande f est de « Carathéodory » et convexe sur le deuxième espace F. De façon précise, on a l'énoncé suivant (qui est un cas particulier du théorème 4) dont la démonstration utilise le lemme 6. Dans ce cas particulier, il est possible d'éviter le théorème 2 qui est très technique.

THÉORÈME. *Soient* (T, μ) *un espace compact métrisable muni d'une mesure de Radon positive* μ, *F et E deux espaces de Banach séparable,* F_σ *E t* E_σ *F et respectivement muni de la topologie faible* $\sigma(F,F')$, $\sigma(E, E')$ *Soit* $f : T \times F \times E \to [0, +\infty]$ *un intégrande* $(\mathcal{H}_\mu \otimes \mathcal{B}(F) \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}\mathbf{R}))$ *mesurable, tel que pour tout* $t \in T$, $f(t,.,.)$ *soit continue sur tout compact de* $F_\sigma \times E_\sigma$, $f(t,.,)$ *soit convexe sur F, pour tout* $(t,e) \in T \times E$.

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite dans* L_F, *convergeant vers* $u_0 \in L_F$ *pour* $\sigma(L_F, L_{F'})$, *et* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite d'applications scalairement* μ*—mesurables de T dans E, telle que pour tout voisinage* $\sigma(E,E')$ *ouvert convexe de l'origine, V, on ait :*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{t \in T \mid (v_n(t) - v_0(t)) \notin V\} = 0$$

On suppose, en outre que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un convexe équilibré* $\sigma(F, F')$ *compact,* L_ε, *et un convexe équilibré* $\sigma(E,E')$ *compact,* K_ε, *tels que*

$$\mu\{t \in T \mid (u_n(t), v_n(t)) \notin L_\varepsilon \times K_\varepsilon\} \leqslant \varepsilon, \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

(ii) *Il existe* $\overline{u} \in L_F$, *tel que* $t \to f(t, \overline{u}(t), v_0(t))$ *soit* μ *— intégrable sur* T*.*

Alors on a :

$$\liminf_n \int_T f(t, u_n(t), v_n(t))\, \mu(dt) \geqslant \int_T f(t, u_0(t), v_0(t))\, \mu(dt)$$

Démonstration. On suppose $\lim_{n\to\infty} \int_T f(t, u_n(t), v_n(t))\, \mu(dt) =$ avec $a \in \mathbf{R}$. Comme il a été remarqué plus haut, tout revient à montrer que la suite $(f(., u_n(.), v_n(.)) - f(., u_n(.), v_0(.)))_{n \geqslant 0}$ converge vers 0 en mesure sur T. Considérons les suites $(u_n, v_n)_{n \geqslant 0}$ et $(u_n, v_0)_{n \geqslant 0}$. On a $((u_n, v_n) - (u_n, v_0)) = 0, v_n - v_0$ converge en mesure pour σ (E, E') vers zéro, on a pour tout voisinage $\sigma(F, F')$ ouvert convexe de l'origine de F, W, et tout voisinage σ (E, E') ouvert convexe de l'origine de E, V :

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{t \in T \mid ((u_n(t), v_n(t)) - (u_n(t), v_0(t))) \notin W \times V\} = 0$$

d'où la convergence en mesure de la suite $((u_n, v_n) - (u_n, v_0))_{n \geqslant 0}$ vers zéro pour $\sigma(F \times E, (F \times E)')$. D'autre part, fixons $\varepsilon > 0$ et posons $W_\varepsilon = L_\varepsilon \times K_\varepsilon$. Comme L_ε et K_ε sont des convexes équilibrés respectivement σ(F, F') et σ(E, E') compact, W_ε est un convexe équilibré $\sigma(F \times E, (F \times E)')$ compact pour lequel on a, en raison de (i) $\mu\{t \in T \mid ((u_n(t), v_n(t)), (u_n(t), v_0(t))) \notin W_\varepsilon \times W_\varepsilon\} \leqslant 3\varepsilon$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors puisque $f(t,.,.)$ est $\sigma(F \times E, (F \times E)')$ continue sur W_ε , le lemme 6 s'applique et permet de conclure que la suite $(f(., u_n(.), v_n(.)) - f(., u_n(.), v_0(.)))_{n \geqslant 0}$ converge vers zéro en mesure sur T. Ensuite en précédant comme dans la première étape du théorème 6 on obtient l'inégalité $\int_T f(t, u_0(t), v_0(t)) \mu(dt) \leqslant a$ ce qui achève la démonstration.

Pour terminer ce paragraphe signalons la variante suivante.

THÉORÈME 9. *Soient* F *un espace de Banach séparable,* F' *son dual muni d'une topologie localement convexe souslinienne compatible avec la dualité,* E *un espace topologique séparé. Soit* $f : \Omega \times F \times E \to [0, +\infty]$ *un intégrande* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(F) \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ *— mesurable tel que* $f(\omega,.,.)$ *soit semi-continue inférieurement sur* $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ *pour tout* $\omega \in \Omega$ *et* $\in f(\omega,.,e)$ *soit convexe propre sur* F *pour tout* $(\omega, e) \in \Omega \times E$*. Soient* $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite dans* L_F *convergeant pour* $\sigma(L_F, LF,)$ *vers* u_0 *et* $(v_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite d'applications* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$ *— mesurables de* Ω *dans*

E convergeant simplement vers une application $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$ *mesurable* v_0 *de* Ω *dans* E. *On suppose que les conditions suivantes sont verifiees :*

(i) *Pour tout* $\delta > 0$, *il existe une multi-application* $\mathcal{A}$ *— mesurable* Γ_δ *de* Ω *à valeurs compactes non vides de* F, *telle que* $\mu\{\omega \in \Omega \mid u_n(\omega) \notin \Gamma_\delta(\omega)\} \leqslant \delta$, *pour tout* $n \geqslant 1$.

(ii) *La suite* $(f(., u_n(.), v_0(.)))_{n \geqslant 1}$ *est uniformément intégrable dans* $L^1_{\mathbf{R}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Alors on a :

$$\liminf_n \int_\Omega f(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega))\, \mu(d\omega) \geqslant \int_\Omega f(\omega, u_0(\omega), v_0(\omega))\, \mu(d\omega)$$

Démonstration. On suppose $a = \lim_{n\to\infty} \int f(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega))\, \mu(d\omega) \in \mathbf{R}$.

Première étape. (j) On suppose que $f(\omega, ., v_0(\omega))$ est continue et finie sur tout compact de F, $\forall \omega \in \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que.

$$A \in \mathcal{A}, \mu(A) \leqslant \delta \Rightarrow \int_A f(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega))\mu(d\omega) \leqslant \varepsilon, \forall n \geqslant 1.$$

D'après l'hypothèse, il existe une multi-application Γ_δ $\mathcal{A}$ — mesurable à valeurs compactes F telle que

$$\mu[\omega \in \Omega \mid u_n(\omega) \notin \Gamma_\delta(\omega)] \leqslant \delta, \forall n \geqslant 1 .$$

Posons

$$A_{\delta,n} = [\omega \in \Omega \mid u_n(\omega) \in \Gamma_\delta(\omega)], \forall n \geqslant 1.$$

Alors on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_\Omega f(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega))\, \mu(d\omega) \leqslant \varepsilon + \int_{A_{\delta,n}} f(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega))\, \mu(d\omega)$$

Posons

$$r_{\delta,n}(\omega) = \inf_{x \in \Gamma_\delta(\omega)} [f(\omega, x, v_n(\omega)) - f(\omega, x, v_0(\omega))]$$

$$B_{\delta,n,\varepsilon} = [\omega \in \Omega \mid r_{\delta,n}(\omega) \leqslant -\varepsilon]$$

En vertu du lemme 1, on a $\lim_{n\to\infty} \mu(B_{\delta,n,\varepsilon}) = 0$. Donc il existe un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \int_{A_{\delta,n} \cap B_{\delta,n,\varepsilon}} f(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega))\, \mu(d\omega) \leqslant \varepsilon$$

Compte tenu des définitions de $A_{\delta,\, n}$ et $B_{\delta,\, n,\, \varepsilon}$, on a

$$\int_{A_{\delta,\, n}} \, {}_{\complement B_{\delta,\, n,\, \varepsilon}} [f(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega)) - f(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega))] \, \mu(d\omega) \leqslant \varepsilon \mu(\Omega)$$

D' où, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a

$$\int_\Omega f(\omega, u_n(\omega, v_0(\omega)) \, \mu(d\omega) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon\mu(\Omega) + \int_\Omega (f(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega)) \mu(d\omega)$$

Il existe un entier $N'_\varepsilon > N_\varepsilon$ tel que pour $n \geqslant N'_\varepsilon$, on ait :

$$\int_\Omega f(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega)) \, \mu(d\omega) \leqslant 3\varepsilon + \varepsilon\mu(\omega) + a$$

D'où

$$\lim\sup \int_\Omega f(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega)) \mu(d\omega) \leqslant a$$

Par dualité des fonctionnelles intégrales convexes, on en déduit que

$$a \geqslant \liminf_n \int_\Omega f(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega)) \, \mu(d\omega) \geqslant \int_\Omega f(\omega, u_0(\omega), v_0(\omega)) \, \mu(d\omega)$$

ce qui termine la démonstration de la première étape.

Deuxième étape. On supprime la condition (j) et on va se ramener à la situation de la première étape en utilisant le résultat d'approximation global déjà signalé (cf. [6] ou th. 3). L'intégrande $g(\omega, x) = f(\omega, x, v_0(\omega))$ est convexe normal et positif. Il existe une suite croissante d'intégrandes positifs, $(g_k)_k$, définis sur $\Omega \times F$ vérifiant :

(1) $g_k(\omega, .)$ est convexe, lipschitzienne sur F pour tout $\omega \in \Omega$ et $g_k(., x)$ est $\mathcal{A}$ — mesurable sur Ω pour tout x fixé dans F.

(2) $\lim\limits_{k \to \infty} \uparrow g_k(\omega, x) = g(\omega, x)$ pour $(\omega, x) \in \Omega \times F$

Posons

$$f_k(\omega, x, e) = \begin{cases} g_k(\omega, x) & si \ e = v_0(\omega) \\ f(\omega, x, e) & si \ e \neq v_0(\omega) \end{cases}$$

Alors on a $f(\omega, x, e) = \lim\limits_{k \to \infty} \uparrow f_k(\omega, x, e), \forall (\omega, x, e) \in \Omega \times F \times E$

et de plus on a, pour tout k et tout $n \geqslant 1$ et tout $\omega \in \Omega$

$$f_k(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega)) \leqslant f(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega))$$

$$f_k(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega)) = g_k(\omega, u_n(\omega)) \leqslant f(\omega, u_n(\omega), v_0(\omega))$$

Donc la suite $(f_k(., u_n(.), v_0(.)))_n$ est uniformément intégrable pour tout k fixé. Il est facile de vérifier maintenant que chacun des f_k satisfait aux conditions d'application de la première étape et la démonstration s'achève comme dans les théorèmes précédents.

Received August 24, 1982

REFERENCES

[1] Berkowitz, I. D., *Lower semi-continuity of integral functionals*. Tran. Amer. Math. Soc. 192, 1964.

[2] Castaing, C., *Une nouvelle extension du théorème de Dragoni — Scorza*. C. R. Acad. Sci. Série A, 271, 1970, p. 396.

[3] Castaing, C., *Intégrales convexes duales*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1973, Exposé 6, 38 pages.

[4] Castaing, C., *Rafle par un convexe aléatoire à variation continue à droite*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1975, Exposé 15, 21 pages.

[5] Castaing, C., C. R Acad. Sci. Série A 282, 1976, p. 515.

[6] Castaing, C., *A propos de l'existence des sections séparément mesurables et séparément continues d'une multi-application séparément mesurable et séparément semi continue inférieurement*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1976, Exposé 6, 6 pages.

[7] Castaing, C., *Equation différentielle multivoque avec constrainte sur l'état dans les espaces de Banach. Séminaire d' Analyse Convexe*, Montpellier 1978, Exposé 13, 19 pages et C. R. Acad. Sci, Série A.

[8] Castaing, C., *Topologie de la convergence uniforme sur les parties uniformément intégrables de L^1_E et théorèmes de compacité faible dans certains espaces du type Köthe. — Orlicz*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1980, Exposé 5, 27 pages.

[9] Castaing, C., et Valadier, M., *Convex Analysis and measurable multifunctions*. Lectures Notes. Springer — Verlag n^0 580, 1977, 278 pages.

[10] Cesari, L., *Lower semi continuity and lower closure theorem without semi normality condition*, Annal. Mat. Pura ed Appl. Vol. 98, 1974.

[11] Cesari, L. and Surynayana, *Nemitsk's operators and lower closure theorem*, J. of Optimization theory and Appl., Vol. 19 1976.

[12] Ioffe. A.D. *On lower semi continuity of integral functionals* I. SIAM J. Control and Optimization, Vol. 15, n^0 4, 1977, p. 521 – 538.

[13] Moreau, J.J., *Evolution problem associated with a moving convex set in Hilbert spaces*. J. Diff. Equ., 26, 1977, p. 347 – 374.

[14] Moreau, J.J., C. R. Sci Série A, 282, 1976, p. 834

[15] Olech. C., *A characterization of L_1 — weak lower semicontinuity of integral functionals*. Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences, Vol. 25, n^0 2. 1977. p. 135 – 142.