ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 7 № 2 (1982)

NOTE SUR LE PROBLEME DES TOURS DE HANOI

IVAN LAVALLE
C. N. R. S.
Paris
FRANCE

INTRODUCTION

Le problème des tours de Hanoï est un probléme de gestion de piles qui se pose ainsi: on dispose de trois plateaux dont deux sont vides et le troisième constitué d'un empilage de disques de diamètres décroissants, le plus petit étant au sommet de la pile.

Et celà en respectant les deux règles suivantes:

— *a*. On ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois.

— *b*. On ne peut mettre qu'un petit disque sur un grand, jamais le contraire (un plateau vide acceptant n'importe quel disque).

Il s'agit en respectant ces règles, de transférer la pile de disques sur l'un des plateaux vides.

Nous allons essayer de donner quelques règles de gestion de ces piles, les plus simples possibles, sans pour celà utiliser l'algorithme récursif bien connu.

1. LE DÉPLACEMENT D'UN DISQUE ET D'UNE PILE

I — 1 Pour la première fois :

Le disque *1* est déplacé la pr emière fois au coup 2^0.

» » *2* » » » » » » 2^1

. . . .

Le disque $n-1$ est déplacé pour la première fois au coup 2^{n-2}

Lorsque le disque $n-1$ a été déplacé, la configuration est la suivante:

— *1* sur un plateau (appelons le A) on a la pile $n, n+1, n+2,...$

— 2 sur un plateau (appelons le B) on a le disque $n-1$ seul

— 3 sur un plateau (appelons le C) on a la pile $1, 2..., n-2$.

Pour déplacer le disque n, il faut rempiler toute la pile $1, 2..., n-2$ sur le disque $n-1$ qui est sur le plateau B, libérant ainsi le plateau C.

Pour ce faire, il faut amener le disque $n-2$ en B, soit 2^{n-3} coups ;

pour . . . . $n-3$ en B, soit 2^{n-4} coups;

. . . .

pour . . . . 2 en B, soit 2^1 coups ;

pour . . . . 1 en B, soit 2^0 coup.

Or

$$2 + \sum_{i=1}^{i=p} 2^i \quad 2^{p-1}$$

donc, pour rempiler toute la pile $1, 2,..., n-2$ sur B, il aura fallu $2^{n-2}-1$ coups, laissant ainsi le plateau C libre.

Le disque n sera donc déplacé au coup $2^{n-2}+2^{n-2}-1+1=2^{n-1}$.

D'où :

LEMME 1:

Le disque n est déplacé pour la première fois au coup 2^{n-1}

I. 2 Déplacement d'une pile:

Le lemme 1 indique qu'il faut 2^{n-1}coups pour amener n en B ;

2^{n-2}coups pour amener $n-1$ en B;

2^{n-3}coups pour amener $n-2$ en B;

. . . .

2^1 coups pour amener 2 en B;

2^0 coup pour amener 1 en B.

D'où :

LEMME 2: *Il faut 2^{n-1} coups pour transférer une pile de n disques d'un plateau sur un autre, en conservant la relation d'ordre.*

1. 3 Déplacement général d'un disque

Lorsque l'on a déplacé pour la première fois le disque n, on a la configuration suivante pour les plateaux ;

en A pile $n+1, n+2,...$

en B le disque n,

en C pile $1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Il faut $2^{n-1}-1$ coups (en application du lemme 2) pour déplacer la pile $1, 2, \ldots, n-1$ de C en B.

La configuration est alors :

en A pile $n+1, n+2, \ldots$

en B pile $1, 2, \ldots, n$

en C pile vide.

On déplace alors le $n+1$ ième disque sur la pile C (on joue le coup numéro 2^n), puis pour redéplacer la pile, 1, 2, ..., $n-1$ du plateau B à l'un des plateaux A ou C, il faut de nouveau $2^{n-1}-1$ coups ; d'où :

THÉORÈME 1 : *Le disque n est déplacé pour la première fois au coup 2^{n-1} et tous les 2^n coups suivants.*

II. RAPPORT ENTRE LE NUMÉRO D'UN COUP ET LE DISQUE JOUÉ

Au coup $n^0 - k$, un disque d tel que $2^d = k$ a été joué exactement $\left[\dfrac{k}{2^d}\right]+1$ fois([ ] signifiant partie entière par défaut).

Considérons maintenant le coup $k = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \ldots + 2^{p_q}$ où l'on a :

$p_1 > p_2 > \ldots p_q$ avec $p_j \in N$

On a donc : $k \bmod 2^{p_q} = 0$, et plus précisément :

$$k = \alpha \cdot 2^{p_q}$$

avec

$$\alpha = 2^{p_1 - p_q} + \ldots, + 2^0$$

donc $\alpha \bmod 2 = 1$

et $(\alpha - 1) \bmod p = 0$.

Soit $\beta = \dfrac{\alpha - 1}{2}$

En vertu du Théorème 1, on peut affirmer que le disque $q+1$, a été déplacé exactement $\dfrac{\alpha-1}{2}+1$ fois, et comme :

$$k \bmod (\beta + 1) = 0;$$

le dernier disque déplacé est le disque $q+1$, d'où le théorème.

THÉORÈME 2: *Au coup de numéro k, le dernier disque joué est celui dont le numéro est tel qu'il soit égal à la valeur, augmentée de 1, de la plus petite puissance de 2 dans la décomposition binaire de k.*

Par exemple, au coup de numéro 6368, le disque qui vient d'être déplacé est le disque numéro 6 ; en effet :

$$6368 = 2^{12} + 2^{11} + 2^{7} + 2^{6} + 2^{5}$$

COROLLAIRE: A tout coup de numéro impair, on déplace le disque numéro 1.

III. RAPPORT ENTRE NUMÉRO D'UN COUP, PILE DE DÉPART, PILE D'ARRIVÉE

III — 1. Chiffre d'un coup.

Si on numérote les plateaux (piles) par 1, 2, 3 ; on appellera *chiffre d'un coup* la somme arithmétique des numéros des plateaux mis en jeu à ce coup. Ainsi, à un coup de chiffre :

3 correspond un transfert de disque du plateau 1 vers le plateau 2 (ou *vice versa*)

4 » » » » » » » 1 » » » 3 »

5 » » » » » » » 2 » » » 3 »

Examinons donc ce qui se passe lors du déroulement du jeu :

Coup 1 transfert du sommet de pile 1 (disque 1) à pile 2 le coup est de chiffre 3

Coup 2 transfert du sommet de pile 1 (disque 2) à pile 3 le coup est de chiffre 4

Coup 3 transfert du sommet de pile 2 (disque 1) à pile 3 le coup est de chiffre 5

Le plateau 1 est alors occupé par la pile 3, 4, ... n et le plateau 3 par la pile 1, 2, le plateau 2 étant vide.

Le coup suivant va donc consister en le transfert du disque 3 (plateau 1) sur le plateau 2.

Coup 4 (2^{3-1}) transfert du sommet de pile 1 (disque 3) à pile 2 chiffre 3

La série de coups suivants, va consister à déplacer la pile qui est sur le plateau 3 pour la ramener sur le plateau 2 afin d'avoir la pile 1-3-3, et un plateau (le 3) libre pour pouvoir déplacer le disque 4.

A la veille de cette série de coups, rénumérotons les plateaux comme suit :

$$1 \quad 2 \quad 3 \longleftrightarrow 2^{*} \quad 3^{*} \quad 1^{*},$$

ce qui donne, pour les chiffres des coups :

$$3 \longleftrightarrow 5^{*} ; 4 \longleftrightarrow 3^{*} ; 5 \longleftrightarrow 4^{*} .$$

Comme nous l'avons vu, le déplacement de la pile 1—2 se fait par une séquence de coups de chiffres $3-4-5$ pour passer du plateau 1 au plateau 3, donc ici le passage du plateau 1^* au plateau 3^* se fait par une séquence de chiffres $3^*-4^*-5^*$, soit en fait, une séquence de chiffres $4-5-3$.

Donc le déplacement de la pile des disques 1 à 3 du plateau 1 au plateau 2 s'est opéré par une séquence de coups de chiffres $3-4-5-3-4-5-3$ de longueur 2^3-1 (Théorème 1).

Supposons donc que le transfert de la pile de disques 1 à **n**—1 se soit fait par une séquence de chiffres $(3-4-5 \ldots 3-4 \ldots 5)$ de longueur $2^{n-1}-1$ et supposons qu'à la suite de ce transfert, la pile de disques 1 à n—1 soit sur le plateau 3. Le plateau 2 est donc libre, on peut y transférer le disque **n**, le coup est alors de chiffre 3.

En rénumérotant les plateaux comme ci-dessus $1\ 2\ 3 \longleftrightarrow 2^*\ 3^*\ 1^*$, on transférera la pile (1—2 ... n—1) du plateau 1^* (resp. 3) au plateau 3^* (resp. 2) par une série de coups de chiffres $(3^*-4^*-5^* \ldots 3^*-4^*- \ldots 5^*)$, c'est à dire en fait de chiffres $(4-5-3 \ldots 4-5 \ldots 3)$, et comme le déplacement du disque n était de chiffre 3, la concaténation des séquences de coups donne : $(3-4-5 \ldots$ $\ldots -3-4- \ldots 5-3-4-5-3 \ldots -4-5 \ldots 3)$.

Le raisonnement serait le même si on avait supposé que la pile 1 à **n—1** avait été transférée du plateau 1 au plateau 2.

D'où :

LEMME 3. *Le chiffre du coup numéro k est :*

$$(k \bmod 3) + 2.$$

Le "+ 2" est justifié par le rapport existant entre le chiffre du k ième coup et l'indice du k ième élément de la séquence $(3-4-5 \ldots)$.

Remarque : Nous avons supposé qu'au coup numéro 1, on transférait du plateau 1 au plateau 2, on aurait aussi bien pu transférer du plateau 3, auquel cas la séquence est de type : (3 5 4 ...), mais alors on ne peut pas établir de formule simple, il faut donc rénuméroter les plateaux 2 et 3 en 3 et 2.

Du lemme 3, et du mécanisme de chiffrage d'un coup, on déduit :

LEMME 4. *Au coup 2^{n-1}, le disque n est déplacé du plateau 1 au plateau de numéro :*

$$(2^{n-1} \bmod 3) + 1.$$

Et plus généralement, on a comme corollaire :

LEMME 5. *Au k ième coup, on déplace le disque p (voir Th. 2) du plateau a (a = 1 ou 2 ou 3) au plateau :*

$$(k \bmod 3) + 2 - a.$$

III — 2. Pile de départ d'un coup:

Lorsqu'on joue le disque p au coup k, d'après le théorème 1, on sait combien de fois ce disque a été joué, il l'a été $[k/2^p] + 1$ fois.

Donc, par application réitérée des lemmes 4 et 5, on sait que:

La première fois qu'on a déplacé le disque n, c'est au coup 2^{n-1}, et en appliquant le lemme 5, on sait que le disqne n va, au coup 2^{n-1}, sur le plateau:

$$a_1 = [2^{n-1} \bmod 3] + 2 - 1 = [2^{n-1} \bmod 3] + 1 \;;$$

La deuxième fois, au coup $2^n + 2^{n-1}$, n va sur le plateau $a_2 =$ $= ([2^n + 2^{n-1}] \bmod 3) + 2 - a_1 = (2^n \bmod 3) + 1$; La troisième fois, au coup $2^n + 2^n + 2^{n-1}$, n va sur le plateau:

$$a_3 = ((2^n + 2^n + 2^{n-1}) \bmod 3) + 2 - a_2 = ((2^n + 2^{n-1}) \bmod 3) + 1$$

. . . .

la 2p ième fois qu'on déplace le disque n, c'est pour l'amener sur le plateau:

$$a_{2p} = (p2^n) \bmod 3 + 1$$

la 2p + 1 ième fois, n va sur le plateau:

$$a_{2p+1} = (2p \,.\, 2^n + 2^{n-1}) \bmod 3 + 2 - a_{2p} \quad \text{(Lemme 5)}$$

$$= ((p.2^n + 2^{n-1}) \bmod 3) + 1$$

la 2p + 2ième fois, n va sur le plateau:

$$a_{2p+2} = (((2p + 1) \,.\, 2^n + 2^{n-1}) \bmod 3) + 2 - a_{2p+1}$$

$$= (((p + 1) \,.\, 2^n) \bmod 3) + 1$$

D'où:

THÉORÈME 3. Au coup muméro k, le disque n est déplacé pour la α ième fois, et

$$\alpha = \left[\frac{k}{2^n}\right] + 1 \;;$$ *et suivant que:*

a) $\alpha = 2p + 1$, *le disque n est déplacé du plateau* $((p \,.\, 2^n) \bmod 3) + 1$ *au plateau numéro* $((p \,.\, 2^n + 2^{n-1}) \bmod 3) + 1$

b) $\alpha = 2p$, *le disque n est déplacé du plateau* $(((p - 1) 2^n + 2^{n-1}) \bmod 3) + 1$ *au plateau numéro* $((p \,.\, 2^n) \bmod 3) + 1$.

CONCLUSION

On déduit de cette étude deux façons nouvelles d'aborder le problème :

A — On établit un algorithme très simple, non récursif pour « dérouler » les tours de Hanoi, comme suit (à partir de l'étude du Paragraphe III-1) :

1. Numéroter *1*, *2* et *3* les piles en prenant pour pile 1 la pile qui contient tous les disques.

2. Comparer les disques sommets des piles *1* et 2, transférer le plus petit des deux sur le plus grand.

3. Comparer les disques sommets des piles 1 et 3 ; transférer le plus petit des deux sur le plus grand.

4. Comparer les disques sommets des piles 2 et 3 ; transférer le plus petit des deux sur le plus grand.

— retourner en 2.

L'arrêt de la procédure se fait lorsque deux piles sont simultanément vides.

B — On sait par le théorème 3, quelle action effectuer à tout coup dont on connait le numéro, sans avoir à considérer les étapes intermédiaires.

Received June 30, 1982

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lavallée I.

« *Un algorithme non récursif pour le problème des Tours de Hanoï* » — Séminaire sur les Questionaires. Groupe de Recherche C. F. Picard — CNRS, 4 Place Jussieu 75230 Paris CEDEX 05 —