ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 7 N°1 (1982)

SOLUTION CONTINUES A DROITE D'UN PROBLEME D'EVOLUTION DANS C(X) ET DANS LES ESPACES HILBERTIENS

CHARLES CASTAING

Université des Sciences et Techniques du Languedoc (France)

INTRODUCTION

Dans un récent travail ([21]), j'ai démontré l'existence des solutions continues à droite d'une équation différentielle multivoque avec contrainte sur l'état dans les espaces de Banach et les conséquences du résultat obtetu, en particulier, l'existence des solutions continues à droite d'un problème d'evolution étudié par MOREAU ([8]).

Le but de ce travail est de démontrer l'existence des solutions continues à droite d'un problème i'évolution du type

$$\begin{cases} u(t) \in \Gamma(t) \\ -A_t(\dot{u}(t)) \in \partial f(t, u(t)) \end{cases}$$

où f est un intègrande convexe normal ([5]) défini sur $[0,1] \times C(X)$, où C(X) désigne l'espace de Banach séparable des fonctions réelles continues sur un compact *métrisable* X muni de la convergence uniforme, ∂f_t le sous différentiel de la fonction convexe f_t, A_t un opérateur linéaire continu dépendant du temps $t \in [0,1]$, de C(X) dans un espace $L^1(X, \nu)$ considéré comme sous espace fermé de dual C(X)' de C(X). Moyennant des conditions de régularité sur la contrainte Γ, l'opérateur A_t et l'intégrande f, on démontre l'existence d'au moins une solution continue à droite, $u : [0,1] \to C(X)$ du problème d'évolution précédent. La relation $-A_t(\dot{u}(t)) \in \partial f_t(u(t))$ sera précisée dans l'énoncé du théorème d'existence ainsi que la relation entre u et $\dot{u}$. Pour le lecteur, qui ne s'intéresse qu'aux solutions absolument continues, une application $u : [0,1] \to C(X)$ est solutions de l'équation d'évolution

$$\begin{cases} -A_t(\dot{u}(t)) \in \partial f(t, u(t)) \\ u(t) \in \Gamma(t) \end{cases}$$

si

$$u(t) = a + \int_0^t \dot{u}(s)\, ds,\ a \in \Gamma(o),\ t \in [0,1],$$

où $\dot{u}$ est une application ds–intégrable de [0,1] dans C(X) (ds étant la mesure Lebesgue), et si u vérifie

$$\begin{cases} u(t) \in \Gamma(t), & \forall t \in 0,1] \\ -A(\dot{u}(t) \in \partial f(t,u(t)) & dt\text{-presque partout.} \end{cases}$$

Signalons tout de suite aux lecteurs que ce type d'équation d'évolution n'a jamais été, étudié dans l'espace C(X) car le second membre est ici un sous–différentiel ∂f_t qui prend ses valeurs dans l'espace des mesures de Radon m(X)' d'où l'introduction de l'opérateur A_t dans cette formulation qui nous semble nouvelle et suggère d'autres variantes de ce problème d'évolution. Bien entendu, un sous différentiel d'une fonction convexe, propre, semi–continue inférieurement sur un espace localement convexe séparé F existe, et l'on est en droit de se demender s'il est possible d'envisager l'équation d'évolution

$$-A_t(\dot{u}(t)) \in \partial f(t, u(t))$$

dans le cas où f est un intégrande convexe normal sur $[0,1] \times F$. La réponse est affirmative, cependant le choix d'espace d'état F qui est égal à C(X) dans notre étude est dicté par le fait que C(X) possède des propriétés spéciales, lesquelles propriétés ne sont pas vérifiées par tous les espaces localement convexes.

Notations : C(X) désigne l'espace de Banach *séparable* des fonctions réelles continues définies sur un compact *métrisable* X, le dual C(X)' de C(X) est l'espace m(X) des mesures des Radon sur X. Soit ν une mesure de Radon positive sur X et u une mesure de Radon positive sur [0,1]. On pose $v(t)=\mu([0,t])$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors v est une fonction croissante continue à droite sur [0,1]. Rappelons que R muni de la topologie droite $\mathcal{J}_d$ est un espace paracompact à base dénombrable d'ouverts dont la tribu borélienne est identique à la tribu borélienne B(R) de la droite muni de sa distance naturelle (of, [2]).

Pour tout espace de Banach F, F_σ désigne l'espace vertoriel F muni de la topologie affaiblie $\sigma(F,F')$. Enfin, le sous differentiel à ε près d'une fonction convexe propre semi–continue inférieurement f' définie sur un espace de Banach F au point $x \in F$, est noté

$$\sigma_\in f(x) = \{x' \in F' \mid f(x) + f^*(x') - \langle x, x' \rangle \leq \in\}$$

Rappels. Nous allons rappeler quelques résultats qui seront utilisés dans les demonstrations. Signalons d'abord le résultat suivant dû à l'auteur ([4], prop. 1) et ses conséquences. Soit (Ω, G, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach séparable, E'_s son dual faible. Soit L^1_E (Ω, G, μ) l'espace de Banach des classes des fonctions Bochner μ – intégrables de Ω dans E et soit $L^\infty_{E_s}(\Omega, G, \mu)$ l'espace des classes d'applications scalairement G – mesurables et essentiellement bornées de Ω dans E'_s; L^1_E ; L^1_E et $L^\infty_{E_s}$, sont en dualité séparante par la forme bilinéaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \langle u(\omega), v(\omega) \rangle \mu(d\omega), \; u \in L^1_E, \; v \in L^\infty_{E_s},$$

Un ensemble $H \subset L^1_E(\Omega, G, \mu)$ est uniformément intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$. il existe $g \in L^1_R(\Omega, G, \mu)$ telle que

$$\int_{[\,|f| \geq g]} |f|\, d\mu \leq \varepsilon, \ \forall f \in H.$$

PROPOSITION 1. *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une suite généralisée bornée dans $L^\infty_{E_s}(\Omega, G, \mu)$ convergeant vers O en mesure, c'est-à-dire, la suite $(\|u_i\|)_{i \in I}$ converge vers 0 en mesure. Alors $(u_i)_{i \in I}$ converge vers 0 uniformément sur toute partie uniformément intégrable de $L^1_E(\Omega, G, \mu)$.*

Voici quelques conséquences de cette proposition

Corollaire 1. Soit C un borné dans $L^\infty_{E_s}$ et H un ensemble uniformément intégrable dans L^1_E. Soit (v_n) (resp. u_n) une suite dans C (resp. H) convergeant en mesure vers $v_o \in C$ (resp. vers $v_o \in H$ pour $\sigma(L^1_E, L^\infty_{F_s})$. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} < u_n, v_n > = < u_o, v_o >$$

Démonstration. Immédiate en appliquant la proposition 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \in$ tel que

$$n \geq N\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \sup_{u \in H} | < v_n - v_o, u > | \leq \varepsilon \\ | < u_n - u_o, v_o > | \leq \varepsilon \end{cases}$$

D'où, $| < v_n, u_n > - < v_o, u_o > | \leq 2\in$ pour $n \geq N\varepsilon$.

Le lecteur qui ne s'intéresse qu'aux problèmes d'évolution peut omettre la lecture du résultat suivant.

Soit $C_F(X)$ l'espace de Banach des applications continues definies sur un compact X à valeur dans un espace de Banach réflexif séparable F, muni de la convergence uniforme sur X. Soit A une application linéaire continue de $C_F(X)$ dans un espace de Banach G. Alors on a le résultat suivant qui est corollaire immédiat de la proposition 1.

COROLLAIRE 2. *Si la transposée A^* transforme la boule unité B' de G' en partie uniformément intégrable d'un espace L^1_F, (X, v), alors A transforme les suites bornées dans $C_F(X)$ qui convergent simplement sur X dans F, en suites fortement convergentes dans G.*

Démonstration. C'est immédiat moyennant le fait que L^1_F, (X, v) est contenu dans le dual de $C_F(X)$. Par suite, pour toute suite bornée (u_n) dans $C_F(X)$ convergeant simplement vers 0 dans F, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y' \in B'} < u_n, A^*(y') > = \lim_{n\to\infty} \sup_{y' \in B'} < Au_n, y' > = 0$$

car une telle suite converge en mesure. D'où le résultat grâce à la proposition 1.

Le résultat suivant peut avoir son intérêt pratique et est lié au problème considéré ici

PROPOSITION 2. *Soit R muni de la topologie droite, et soit (E, d) un espace métrique séparable et complet. Soit $f: R \times E \to [0, \infty]$ telle que i) $f(t,.)$ soit semi-continue inférieurement sur E pour tout t fixé dans R, ii) $f(.,x)$ soit semi-continue supérieurement sur R muni de la topologie droite, pour tout x fixé dans E.*

Alors f est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante d'intégrandes (f_n) telle que f_n soit globalement semi-continue supérieurement sur $R \times E$ et telle que $f_n(t,.)$ soit lipschitzienne de rapport n pour tout $t \in R$ et tout n. Donc f est globalement borélienne sur $R \times E$.

Démonstration. On utilise la formule déjà utilisée dans ([1]). On pose

$$f_n(t, x) = \inf_{y \in E}[nd(x, y) + f(t, y)], \ (t, x) \in R \times E.$$

En répétant l'argument utilisé dans ([1]), on vérifie facilement que (f_n) possède les propriétés requises.

Remarque. Ici, il n'est pas possible d'utiliser le theorème de projection comme dans ([1]). La semi-continuité supérieure de $f(.,y)$ permet de montrer que f est borélienne sur $R \times E$ car la tribu borélienne de R coincide avec le tribu borélienne de R muni de la topologie droite.

Un résultat de semi — continuité.

Le résultat de semi-continuité inférieure suivant intervient directement dans les démonstrations des théorèmes d'existence des solutions du problème d'évolution considéré ici. Pour la commodité du lecteur, nous seproduisons ici un énoncé extrait de ([6]) qui s'adapte directement aux situations envisagées dans ce travail.

Notons R_d la droite R munie de la topologie droite.

THÉORÈME 1. *Soit K un convexe équilibré faiblement compact d'un espace de Banach séparable E et soit $f: [0,1] \times K \times R_d \to]-\infty, +\infty]$ un intégrande $\mathcal{J}_\mu \otimes \mathcal{B}(K) \otimes \mathcal{B}(R)$ – mesurable tel que $f(t,\dots)$ soit semi-continu inférieurement sur $K \times R_d$ pour tout t fixé dans $[0,1]$ et tel que $f(t,.,y)$ soit convexe sur K pour tout (t, y) fixé dans $[0,1] \times R_d$. Soit (θ_n) une suite décroissante d'applications boréliennes de $[0,1]$ dans R convergeant simplement sur $[0,1]$ vers une application borélienne $\theta_0: [0,1] \to R$ et (u_n) une suite dans $S_K = \{u \in L^1_E([0,1], \mu)\ u(t) \in K\ \mu\ p.p\}$. convergeant pour $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'_s})$ vers $u_0 \in S_K$. On suppose que les conditions suivantes sont verifiées:*

(i) Il existe $\bar{u} \in S_K$ tel que $t \to f(t, \bar{u}(t), \theta_0(t))$ soit μ—integrable sur $[0,1]$.

(ii) Il existe une suite (B_n) uniformement intégrable dan $L^1_R([0,1], \mu)$ telle que

$$\forall t \in [0,1], \forall n > 1, \ f(t, \bar{u}_n(t), \theta_n(t)) \geq B_n(t)$$

(iii) Il existe $s \in L^1_R([0,1], \mu)$ *telle que*

$$\forall t \in [0,\sigma],\ \forall x \in K,\ f(t, x, \theta_o(t)) \geq s(t)$$

Alors on a $\liminf \int_{[0,1]} f(t, u_n(t), \theta_n(t))\mu(dt)) > \int_{[0,1]} f(t, u_o(\theta), \theta_o(t)\mu(dt)$

Démonstration. *a) Première étape* On suppose que j verifie la condition supplémentaire suivante.

Pour tout $t \in [0,1]$. $f(t,., \theta_o(t))$ *est finie et continue sur K pour la topologie* $\sigma(E, E')$.

Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f(t, u_n(t), \theta_n(t))\, \mu(dt) = a \in R$$

Soit $\epsilon > 0$ arbitrairement petit. Posons

$$T_n = \{ t \in [0, 1] \mid \inf_{x\in K} [f(t, x, \theta_n(t)) - f(t, x, \theta_o(t)] \leq -\epsilon \}$$

Alors T_n est μ – mesurable et l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T_n) = 0$$

([6], leme 1). Posons

$$\tilde{u}_n(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) \text{ pour } t \in T_n \\ u_n(t) \text{ pour } t \in [0, 1]\setminus T_n \end{cases}$$

où $\bar{u} \in S_K$ tel que $f(t, \bar{u}(t), \theta_o(t))$ soit μ – intégrable. Comme la suite$(\chi_{T_n} u_n)$ converge vers 0 pour $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'_s})$. On en déduit que la suite $(\tilde{u}_n - u_n)$ converge vers 0 pour $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'_s})$. et par conséquent, la suite $(\tilde{u}_n)$ converge vers u_o pour $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'_s})$. Soit T^c_n le complémentaire de T_n. On a

$$\begin{aligned}\int_{T^c_n} f(t, u_n(t), \theta_o(t))\, \mu(dt) &\leq \epsilon\mu[0,1] + \int_{T^c_n} f(t, u_n(t), \theta_n(t))\, \mu(dt) \\ &= \int_{[0,1]} f(t, u_n(t), \theta_n(t))\, \mu(dt) + \epsilon\mu[0.1] \\ &\quad - \int_{T_n} f(t, u_n(t), \theta_n(t))\, \mu(dt)\end{aligned}$$

Vu l'hypothèse de minoration (ii) portant sur f, il existe N_ϵ tel que, pour $n > N_\epsilon$, on ait,

$$-\int_{T_n} f(t, u_n(t), \theta_n(t)\ (dt) \leq \epsilon$$

Donc, pour $n > N_\epsilon$, on a

$$\int_{[0,1]} f(t, \widetilde{u}_n(t), \theta_o(t)\mu(dt) \leq \epsilon + \epsilon\mu[0,1] + \int_{[0,1]} f(t, u_n(t), \theta_n(t)\mu(dt) +$$
$$+ \int_{T_n} f(t, \overline{u}(t), \theta_o(t)\mu(dt)$$

On en déduit que

$$\lim_n \sup \int_{[0,1]} f(t, \widetilde{u}_n(t), \theta_o(t)\mu(dt) \leq a + 3\varepsilon + \varepsilon\mu[0.1]$$

Comme $(\widetilde{u_n})$ converge faiblement vers u_o, il existe une suite de combinaisons convexes des $(\widetilde{u_n})$, (w_m), qui converge $\mu - p.p.$ vers u_o. Soit

$$w_m = \sum_{j \in J(m)} \alpha_j^m \widetilde{u}_j$$

où $J(m)$ est un ensemble fini d'entiers $\geq m$, et les α_j^m appartiennent à $[0,1]$ tels que $\sum_{j \in J(m)} \alpha_j^m = 1$. La convexité de $f(t, \ldots, \theta_o(t))$ permet d'écrire

$$f(t, w_m(t)), \theta_o(t)) \leq \sum_{j \in J(m)} \alpha_j^m f(t, \widetilde{u}_j(t), \theta_o(t))$$

D'où $\qquad \lim_m \sup \int_{[0,1]} f(t, w_m(t), \theta_o(t)\mu(dt) \leq a + 3\varepsilon + \varepsilon\mu[0,1]$

Or (w_m) converge $\mu - p.p.$ vers u_o. Donc, par semi-continuité inférieure de $f(t, \ldots, \theta_o(t))$, on a

$$\lim_m \inf f(t, w_m(t), \theta_o(t) \geq f(t, u_o(t), \theta_o(t))\ \mu\ p.p.$$

Il résulte alors du lemme de Fatou qu'on a

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} f(t, u_o(t), \theta_o(t))\mu(dt) &\leq \lim_n \inf \int_{[0,1]} f(t, w_m(t), \theta_o(t)\mu(dt) \\ &\leq \lim_n \sup \int_{[0,1]} f(t, w_m(t), \theta_o(t)\mu(dt) \\ &\leq a + 3\varepsilon + \varepsilon\mu[0,1].\end{aligned}$$

Deuxième étape. On supprime la condition

Pour tout $t \in [0,1]$, $f(t, \ldots, \theta_o(t))$ *est fini et continu sur* K *pour la topologie* $\sigma(E, E')$.

On va se ramener à la situation envisagée dans la première étape en utilisant un résultat d'approximation dû à CASTAING – CLAUZURE ([6], théorème 1) qui affirme que tout intégrande $g : [0.1] \times K \to]-\infty, +\infty]$, $\mathcal{J}_\mu \otimes B(K)$ – mesurable, convexe semi–continu inférieurement sur K pour tout t fixé dans $[0,1]$, et minoré par un intégrande de Carathéodory sur $[0,1] \times K$, est limite d'une suite croissante d'intégrandes $g_k : [0,1] \times K \to R$ tel que

$$\begin{cases} \forall k, \forall t \in [0.1], g_k(t,.) \text{ est convexe continu sur } K \text{ pour } \sigma(E, E') \\ \forall k, \forall x \in K, g_k(.,x) \text{ est } \mathcal{J}_\mu - \text{mesurable sur } [0,1]. \end{cases}$$

Rappelons ici la formule explicite permettant de construire les g_k ([6], théorème 1]

$$g_k(t, x) = \inf_{y \in X} \left[k\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) + g(t, y)\right], \qquad (t, x) \in [0,1] \times K$$

où

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|< e_n, x >|}{1 + \delta^*(e_n, K)}, \quad x \in K$$

et (e_n) est une suite dans le dual de E', séparant les points de E. Ceci étant, posons $g(t, x) = f(t, x, \theta_o(t))$ pour $(t, x) \in [0,1] \times K$. En vertu de la condition (iii), on peut appliquer le résultat d'approximation cité. Il existe une suite croissante d'intégrandes (g_k) possédant les propriétés signalées telle que

$$\lim_{k \to \infty} g_k(t, x) = g(t, x), \forall (t, x) \in [0,1] \times K.$$

Posons

$$f_k(t, x, y) = \begin{cases} g_k(t, x) \text{ si } y = \theta_o(t) \\ f(t, x, y) \text{ si } y \neq \theta_o(t) \end{cases}$$

Alors chacune des f_k satisfait aux conditions de la première étape (voir [6] pour les détails de vérification). Comme on a

$$\forall k, \forall n, \forall t, k_k(t, u_n(t), \theta_n(t)) \leq f(t, u_n(t), \theta_n(t))$$
$$\forall t, \forall x, \forall y, \lim_{k \to \infty} f_k(t,x,y) = f(t,x,y)$$

on en déduit que

$$\forall k, \lim_n \inf \int_{[0,1]} f_k(t,u_n(t), \theta_o(t)) \mu(dt) \leq a.$$

D'après le résultat de la première étape, on a

$$\forall b, \int_{[0,1]} f_k(t,u_o(t), \theta_o(t)) \mu(dt) \leq a.$$

D'où, finalement

$$\int_{[0,1]} f(t,u_o(t), \theta_o(t)) \mu(dt) \leq a.$$

Remarque: Certains arguments utilisés ici ont déjà été exploités par OLECH en dimension finie([10]). Mais les démonstrations de cet auteur ne s'appliquent pas directement dans la situation considérée ici. En fait, il y a de nombreuses variantes de résultat de semi-continuité inférieure analogues à celui de l'énoncé du théorème 1. Je renvoie le lecteur à l'exposé CASTAING-CLAUZURE ([6]) pour des variantes possibles. Signalons que le théorème précédent reste valable si l'on remplace R_d par $[0,1[_{J_d}$.

Dans ce qui suit B désigne la boule unité de C(X) et $\delta(C(X), L^1(X, v))$ est l'espace des applications continues de C(X) dans $L^1(X, v)$ muni de la norme habituelle.

Résultats d'existence.

THÉORÈME 2. *Soit $f: [0,1] \times C(X) \to [0, +\infty)$ un intégrande séparément semi-continu supérieurement sur $[0,1[_{J_d}$ et séparément semi-continu inférieurement et convexe sur C(X). f^* le polaire de f, $A: [0,1] \to \delta(C(X), L^1(X, v))$ une* application continue de $[0,1[_{J_d}$ dans $\delta(C(X), L^1(X, \nu))$, K un convexe équilibré $\sigma(C(X), C(X)')$ compact contenu dans B et Γ une multi-application de $[0,1]$ à valeurs non vides de $C(X)$, de graphe sequentiellement fermé dans $[0,1[_{J_d} \times C(X)\sigma$. On suppose que les conditions suivantes sont verifiées.

(i) Pour tout $t \in [0,1]$. $A_t(B)$ est contenu dans un convexe équilibré $\sigma(L^1(X,\nu)$, $L^\infty(X,\nu))$ compact L de $L^1(X,\nu)$

(ii) f s'annulle sur le graphe G de Γ.

(iii) f^* est minorée par une constante σ sur $[0,1] \times L$.

(iv) Il existe une application μ-mesurable $\bar{u}$ de $[0,1]$ dans L tel que

$$\int_{[0.1]} f^*(t,\bar{u}(t))\, \mu(dt) < +\infty$$

Pour tout $\varepsilon > o$, tout (t,x) dans le graphe G de Γ, tout τ dans $[0,1)$ vérifiant $0 \leq \tau \leq \varepsilon$, il existe $y \in \Gamma(\tau)$ tel que

$$y - x \in (v(\tau) - v(t))\, K$$
$$-A_\tau(y - x) \in (v(\tau) - v(\tau))\, \partial_\varepsilon f(\tau, y)$$

Alors, pour tout $a \in \Gamma(0)$, il existe $u : [0,1] \to C(X)$ de la forme $u(t) = a + \int_{]0,\tau]} \dot{u}(s)\, u(ds)$ où $\dot{u}$ esi une application μ-mesurable de $[0,1]$ dans K telle qne

$$\begin{cases} u(t) \in \Gamma(t), \ \forall\, t \in [0,1], \\ -A_t(\dot{u}(t)) \in \partial f(t,u(t))\ \mu - p.p. \end{cases}$$

Une telle application u est appelée solution du problème d'évolution

$$\begin{cases} u(t) \in \Gamma(t) \\ -A_t(\dot{u}(t)) \in \partial f(t, u(t)). \end{cases}$$

Démonstration: Observons d'abord deux faits classiquement connus suivants. L'espace $L^1(([0,1], \mu) : L^1(X,\nu))$ s'identifie à $L^1([0,1] \times X, \mu \otimes \nu)$ et le dual de $L^1([0,1] \times X, \mu \otimes \nu)$ est $L^\infty([0,1] \times X, \mu \otimes \nu)$. Pour tout $t \in [0,1]$, soit A_t^* la transposée de A_t. Alors pour tout $v \in L^\infty([0,1] \times X, \mu \otimes \nu)$, l'application $t \to A_t^* v_t$ est scalairement μ-mesurable et bornée de $[0,1]$ dans $C(X)'$ en vertu de la condition (i). Il est facile de vérifier, grâce à là continuité de $t \to A_t$ de $[0,1]$ dans $\delta(C(X), L^1(X,\nu))$, que pour tout y fixé dans $C(X)$, l'application $t \to A_t^* y$ est continue de $[0,1[_{J_d}$ dans $C(X)'$ fort. Ceci étant, nous allons adopter la méthode de discrétisation et la compacité déjà utilisée dans [2] afin de montrer d'abord l'existence d'au moins une application $u : [0,1] \to C(X)$ de ta forme

$$u(t) = a + \int_{]0,t]} \dot{u}(s)\, \mu(ds), \ \forall\, t \in [0,1]$$

avec

$$\dot{u} \in S_K = \{ v \in L^1_{C(X)}([0,1], \mu) \mid v(t) \in K\ \mu\text{-p.p.} \}$$

et tel que $u(t) \in \Gamma(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Soit (P_n) une suite de subdivisions de $[0,1]$,

$$0 \leq t_o^n < t_1^n < \dots < t_{o(n)}^n = 1$$

avec
$$t_i^n - t_{i-1}^n \leq 2^{-n},\ i = 1, 2, \dots \nu(n)$$

D'après la condition (v), il existe une suite (y_i^n) $(i = 0, 1, \ldots, \nu(n))$ associée à P_n telle que

$$y_0^n = a \in \Gamma(0)$$
$$y_i^n = \Gamma(t_i^a),\ 1 \leq i \leq \nu(n)$$
$$y_i^n - y_{i-1}^n \in (v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n))\, K$$
$$-A_{t_i^n}(y_i^n - y_{i-1}^n) \in (v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n))\partial_{2^{-n}} f(t_i^n, y_i^n)$$

Pour $t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[$, $1 \leq i \leq \nu(n)$, posons

$$u_n(t) = \begin{cases} \dfrac{v(t_i^n) - v(t)}{v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n)} y_{i-1}^n + \dfrac{v(t) - v(t_{i-1}^n)}{v(t_i^n) - v(t_{i-4}^n)} y_i^n \text{ si } v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n) > 0 \\[2ex] y_i^n \text{ si } v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n) = 0 \end{cases}$$

Enfin on pose $u_n(1) = y_{\nu(n)}^n$. On déduit de la condition (v) et de la construction précédente que u_n est de la forme

$$u_n(t) = a + \int_{[0,1]} \dot{u}_n(s)\, \mu(ds),\ \forall t \in [0,1]$$

où $\dot{u}_n$ est une application μ – mesurable de [0,1] dans K. Soit S_K le quotient pour" $= \mu - p.p.$" de $S_K = \{u \in S^1_{C(X)}([0,1], \mu \mid u(t) \in K\mu - p.p.\}$.

Alobr S_K est convexe $\sigma\,(L^1_{C(X)}([0,1], \mu), L^\infty_{C(X)'}([0,1], \mu))$ compact d'après ([5]; Corollaire V4). Soit $j_n(t)$ la valeur de i $(1 \leq i \leq \nu(n))$ tel que $t \in [t^n_{j_n}(t) - 1, t^n_{j_n}(t)[$ posons $\theta_n(t) = t^n_{j_n}(t)$ pour $t \in]0,1[$, $\theta_n(0) = 0$, $\theta_n(1) = 1$. Alors, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{cases} \lim \theta_n(t) = t \\ u_n(\theta_n(t)) \in \Gamma(\theta_n)(t)) \\ -A_{\theta_n}(t)\,(\dot{u}_n(t) \in \partial_{2^{-n}} f(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))) \end{cases}$$

En appliquant le théorème d'Eberlein — Smulian à S_K, on peut supposer que $(\dot{u}_n)$ converge vers $\dot{u} \in S_K$ pour la topologie $\sigma\left(L^1_{C(X)}([0,1], \mu), L^\infty_{C(X)'}, (0,1, \mu)\right)$ Comme $\lim_{n\to\infty} \theta_n(t) = t$ et la suite $(u_n(\theta_n(t)))$ converge vers $u(t)$ pour $\sigma\,(C(X), C(X)')$ avec

$$u(t) = a + \int_{[0,t]} \dot{u}(s)\, \mu(ds).$$

on a $u(t) \in \Gamma(t)$. Explicitons maintenant la relation

$$-A_{\theta_n}(t)\,(\dot{u}_n(t)) \in \partial_{2^{-n}} f(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t)))$$

Cette relation s'écrit en vertu de la définition du sous différentiel à ε près.

$$f^*(\theta_n(t), -A_{\theta_n}(t)(\dot{u}_n(t))) + < u_n(\theta_n(t)), A_{\theta_n}(t)(\dot{u}_n(t)) > \leq 2^{-n}$$

compte tenu du fait que f s'annulle sur le graphe de Γ.
Soit en intégrant

$$(1) \quad \int_{[1,0]} f^*(\theta_n(t), -A_{\theta_n}(t)(\dot{u}_n(t))\mu(dt) + $$
$$+ \int_{[0,1]} < u_n)\theta_n(t)), A_{\theta_n}(t)(\dot{u}_n(t) > \mu(dt) \leq 2^{-n}\mu([2,1]).$$

Examinons séparément chacun des termes du premier membre.
On a, pour tout t fixé dans [0,1],

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} < u_n(\theta_n(t)) - u(t), A_{\theta_n}(t)x > = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} < A^*_{\theta_n}(t)\, u_n(\theta_n(t)) -$$
$$- A^*_{\theta_n}(t)u(t), x > = 0$$

d' après le résultat signalé dans la psoposition 1 (en rappel) car $(u_n(\theta_n(t)))$ converge faiblement vers u(t) dans C(X), donc $(u\,\theta(t)))$ converge vers u(t) simplement sur X, et l'ensemble $A_t(B)$ est, pour tout $t \in [0,1]$, contenu dans l'ensemble faiblement compact L de $L^1(X; \nu)$. Donc la suite $(A^*_{\theta_n}(t) \quad u_n(\theta_n(t)))$ converge vers A u(t) dans $C(X)_{fort}$. Or la suite $(\dot{u}_n)$ est relativement faiblement *compact* et uniformément intégrable dans $L^1_{C(X)}([0,1], \mu]$. Par suite, le corollaire 1 de la proposition 1 citée en rappel nous permet d'affirmer que

$$\lim \int_{[0,1]} < u_n(\theta_n(t)), A_{\theta_n}(t)\, \dot{u}_n(t) > \mu(dt)$$
$$= \lim \int_{[0,1]} < A^*_{\theta_n}(t\ u_n(\theta_n)t), \dot{u}_n(t) > \mu(dt) = \int_{[0,1]} < A^*_t u(t), \dot{u}(t) > \mu(dt)$$

Donc le second terme du premier membre tend vers

$$\int_{[0,1]} < A^*_t u(t), \dot{u}(t) > \mu(dt) = \int [0,1] < u(t), \dot{A}_t\ \dot{u}(t) > \mu(dt)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

La formule définissant le polaire f* montre que f* est semicontinu inférieurement sur $[0,1[_{J_d} \times L^1(X. \nu)$ et convexe sur $L^1(X, \nu)$.

En vertu de conditions (iii) et (iv), f* satisfait aux conditions d'application du théorème 1. Nous allons vérifier que la suite $(A_{\theta_n}(.)\ \dot{u}_n(.))$ converge vers A(.) $\dot{u}(.)$ pour la topologie $\sigma(L^1(0,1] \times X\ \mu \otimes \nu), L^\infty([0,1] \times X, \mu \otimes \nu))$. En effet, soit $v \in L^\infty([0,1] \times X, \mu \otimes \nu)$. Pour t fixé dans [0,1], on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} < \dot{u}_n(t), A^*_{\theta_n}(t)\, v_t > \mu(dt) = \int_{[0,1]} < \dot{u}(t), A^*_{t_n} v_t > \mu(dt)$$

car $t \to A^*_t v_t \in L^\infty_{C(X)}, ([0,1], \mu)$ et que

$$\lim_{n\to\infty} A^*_{\theta_n}(t)\, v_t - A^*_t v_t$$

dans $C(X)'_{fort}$ à cause de la continuité de $t \to A_t$ de $[0,1[_{J_d}$ dans

$L(C(X), L^1(X, \nu))$. Appliquons encore le corollaire 1 de la propriété 1, compte tenu du fait que la suite $(\dot{u}_n)$ est relativement faiblement compact et uniformément intégrable et du fait que la suite $t \to A^*_{\theta_n}(t)\, v_t$ de $[0,1]$ dans $L^\infty_{C(X)'}$, $[0,1\ \mu)$ est uniformément bornée. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} < A_{\theta_n}(t)\, \dot{u}_n(t),\ v_t > u\,(dt)$$
$$= \int_{[0,1]} < A_t\, \dot{u}\,(t),\ v_t > \mu(dt)$$

pour tout $v \in L([0,1] \times X,\ \mu \otimes \nu)$.

Or les applications $t \to A_{\theta_n}(t)\, \dot{u}_n(t)$ et $t \to A_t\ \dot{u}(t)$ appartiennnent à

$L^1([0,1] \times X,\ \mu \otimes \nu)$. On en déduit que la suite $(A_{\theta_n}(.)\ \dot{u}_n\ (.))$ converge vers $A(.)\ \dot{u}(.)$ pour la topologie faible de $L^1([0,1] \times X,\ \mu \otimes \nu)$. Donc on peut appliquer le théorème de semi-continuité inférieure (Théorème 2) au premier terme dupremier membre de (1). On a

$$(2)\quad \lim_n \inf \int_{[0,1]} f^*(\theta_n(t),\ -A_{\theta_n}(t)\, \dot{u}_n(t))\, \mu(dt)$$
$$\geq \int_{[0,1]} f(t,\ -A\ \dot{u}(t))\ \mu(dt).$$

Tenant compte de (1) et (2) et de la convergence du second terme de (1), on obtient

$$(3)\quad \int_{[0,1]} f^*(t,\ -A_t\dot{u}(t))\mu(dt) + \int_{[0,1]} < u(t),\ A_t\dot{u}(t) > \mu(dt) \leq 0.$$

Grâce à la dualité des fonctionnelles intégrales convexes, ([5], Théorème VII.7), la relation (3) équivaut à

$$-A(.)\dot{u}(.) \in \sigma\, I_f(u) \Leftrightarrow -A_t\ \dot{u}(t) \in \sigma f(t,\ u(t))\ \mu - p\,.\,p.$$

avec $I_f(u) = \int_{[0,1]} f(t,\ u(t))\ \mu(dt)$, $\forall\ u \in L^1_{C(X)}([0,1],\ \mu$, ce qui termine la démonstration.

Remarques.

1) Si l'on suppose de plus que Γ est une multi-application semi-continue inférieurement de $[0,1[_{J_d}$ à valeurs convexes fermées non vides de $(C(X)$, de graphe Z séquentiellement fermé dans $[0,1[_{J_d} \times C(X)_o$ et vérifiant la condition: pour tout $\varepsilon > 0$, tout $(t,\ x) \in G$, tout τ dans $[0,1]$ vérifiant $0 \leqslant \tau - t \leqslant \varepsilon$ il existe $y \in \Gamma(\tau)$ tel que $y - x \in v(\tau) - v(t))K$, alors l'intégrande

$$h:\ (t,\ x) \to d(x,\ \Gamma(t)),\ (t,\ x) \in [0,1] \times C(X)$$

est séparément S.C.S. sur $[0,1[_{J_d}$ et séparément convexe S.C.I. sur $C(X)$, et h s'annulle sur le graphe de G de Γ.

La fonction polaire h^* de h vérifié les conditions (iii) et (iv). En effet on a

$$h^*(t,\ x') = \psi_B'(x') + \sigma^*(x',\ \Gamma(t))\,,\ (t,\ x') \in [0,1] \times C(X)',$$

ou B' est la boule unité dans C(X)' $\psi_{B'}$ la fonction indicatrice de B' et $\delta^*(x', \Gamma(t))$ la fonction d'apupi de $\Gamma(t)$. Donc $h^*(t, 0)=0$, pour tout $t \in [0,1]$. D'aprè la construction donnée dans la démonsstration du théorème 2, il existe u $[0,1] \to C(X)$ de la forme

$$u(t) = a + \int_{[0,t]} \dot{u}(s)\, \mu(ds),\ t \in [0,1],\ a \in \Gamma(0),$$

et tel que $u(t) \in \Gamma(t)$ pour tont $t \in [0,1]$ avec $\dot{u} \in S_K$.

D'où $h^*(t, x') \geqslant \delta^*(x' \Gamma(t)) > < u(t), x' >$

pour tout $(t, x') \in [0,1] \times C(X)'$. En particulier, h^* vérifié la condition de minoration (iii) sur $[0,1] \times L$. Car la fonction réelle *brorélienne* $(t, x) \to u(t)(x)$ est bornée sur $[0,1] \times C(X)$ d'apprès la proposition 2 (ceci peut être vérifiée directement). Par conséquent, il est posbible d' obtenir un énoncé analogue, à celui du théorème 2 avec l'intégrande **h**.

2) Si A ne dépend pas de t la condition (i) est vérifiée car il est classiquement connu que tout opérateur linéaire coutinu de (C(X) dans un espace L^1 est faiblemen compact et, dans ce cas. l'ensemble A(K) est convexe et *fortement compact* dans $L^1(X, \nu)$ grâce au corollaire 2 de la proposition 1. Bien évidemment, ce cas est plus simple à traiter à cause de la compacité forte de A(K) parce qu'on peut utiliser aussi un résultat de semi—continuité inférieure analogue à celui du théorème 1 dans le cas fortement compact" dont la démonstration est plus simple ([6]). Mais l'énoncé du théorème 1 a l'avantage de s'appliquer aussi dans ce cas particulier présenté ici.

3) Le cas le plus simple dans l'énoncé du théorème 2 est celui où A est l'injection $C(X) \to L^1(X, \nu)$.

Voici une variante du théorème 2 où C(X) est remplaçé par un espace hilbertien séparable H et A est l'identité de H dans H.

THÉORÈME 3. *Soit* Γ *une multi—application de* $[0,1]$ *à valeurs non vides de H, de graphe séquentiellement fermé dans* $[0,1[_{J_d} \times H_\sigma$. *Soit* $f : [0,1] \times H \to$ $\to [0, +\infty]$ *un intégrande séparément semi—continu supérieurement sur* $[0,1]_{J_d}$ *et séparément semi — continu inférieurement et convexe sur H,* f^* *la polaire de f et B la boule unité de H. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées.*

(*i*) *f s'annulle sur le graphe G de* Γ

(*ii*) f^* *est minorée par une constante* σ *sur* $[0,1] \times B$.

(*iii*) *Il existe une application* μ *— mesurable* $\overline{u}$ *de* $[0,1]$ *dans B tel que*

$$\int_{[0,1]} f^*(t, \overline{u}(t))\quad \eta(dt) < +\infty$$

(iv) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *tout* $(t, x) \in G$, *tout* τ *dans* $[0,1]$ *vérifiant* $0 \leq \tau - t \leq \varepsilon$, *il existe* $y \in \Gamma(\tau)$ *tel que*

$$(x - y) \in (v(\tau) - v(t))\ B$$
$$(x - y) \in (v(t) - v(\tau)\ \partial_{\in} f_\tau(y).$$

Alors pour tout $a \in \Gamma(0)$, *il existe* $u : [0,1] \to H$ *de la forme*

$$u(t) = a + \int_{[0,t]} \dot{u}(s)\, u(ds),\ t \in [0,1]$$

où $\dot{u}$ est une application μ—mesurable [0,1] dans B et u vérifie

$$\begin{cases} u(t) \in \Gamma(t), \ \forall\, t \in [0,1] \\ -\dot{u}(t) \in \partial f(t, u(t)) \ \mu - \text{p.p.} \end{cases}$$

De plus, une telle solution u est unique.

Démonstration. Même principe de démonstration que le théorème 2 en prenant H au lieu de $\mathcal{C}(X)$ et S_B au lieu de S_K. Avec les notations du théorème 1, tout revient à passer « à la limite lorsque $n \to +\infty$ » la relation

$$-\dot{u}_n(t) \in \partial_{2^{-n}} f(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))$$

qui s'écrit

(1) $$f^*(\theta_n(t), -\dot{u}_n(t)) + < \dot{u}_n(t), \mu_n(\theta_n(t)) > \leqslant 2^{-n}$$

D'où, en intégrant

(2) $$\int_{[0,1]} [f^*(\theta_n(t), -\dot{u}_n(t)) + < \dot{u}_n(t), u_n(t) >]\, \mu(dt)$$
$$\leqslant \int_{[0,1]} < u_n(t) - u_n(\theta_n(t)), \dot{u}(t) > \mu(dt) + 2^{-n} \mu([0,1])$$

Comme $\| \dot{u}_n(t) \leqslant 1$, $\forall\, t \in [0,1]$, le second membre tend vers o lorsque $n \to +\infty$ le résultat de semi — continuité inférieure dans le théorème 1 appliqué à la fonctionnelle intégrale

$$I_{f^*}(-u_n, \theta_n) = \int_{[0,1]} f^*(\theta_n(t), -\dot{u}_n(t))\, \mu(dt)$$

implique

(3) $$\lim_n \inf I_{f^*}(-\dot{u}_n, \theta_n) \geqslant \int_{[0,1]} f^*(t, \dot{u}(t))\, \mu(dt)$$

tandis que le fonctionnelle convexe (cf. MOREAU [9])

$$q(\dot{v}) = \int_{[0,1]} < \dot{v}(t), v(t) > \mu(dt)$$

avec $$v(t) = a + \int_{[o,t]} \dot{v}(s)\, \mu(ds),\ t \in [0,1],$$

et $\| \dot{v}(s) \| \leqslant 1$ μ — p.p., est semi — continu inférieurement pour la topologie normée de $L^1_H([0,1], \mu)$ sur la boule unité de $L^\infty_H([0,1], \mu)$ (qui est convexe et faiblement compacte dans $L^1_H([0,1], \mu)$. D'où, comme $(\dot{u}_n)$ converge vers $\dot{u}$ pour $\sigma(L^1_H, L^\infty_H)$,

(4) $$\lim_n \inf q(\dot{u}_n) \geq q(\dot{u})$$

Il résulte de (1), (2), (3), (4), qu'on a

$$\int_{[0,1]} [f(t, -\dot{u}(t) + < \dot{u}(t), u(t) >]\, \mu(dt)$$
$$\leq \lim \inf \int_{[0,1]} f(\theta_n(t), -\dot{u}_n(t)) + < \dot{u}_n(t), u_n(t), > \mu(dt) \leq 0$$

Ceci termine la démonstration du théorème. L'unicité se démontre comme dans MOREAU ([9]).

Remarque. Il semble difficile de généraliser le théorème 2 au cas où l'on rempraçe $C(X)$ par $C_H(X)$: H étant un espare hilbertien séparable, même dans le cas particulier où A ne dépend pas de t. Bien entendu, le théorème 2 restevalable si l'on remplaçe $C(X)$ par $C_H(X)$ où H est de *dimesion finie.* Au sujet du théorème 3, un résultat crucial utilisé dans ce théorème est la convexité du e à MOREAU ([9]) et la semi-con tinuité inférieure pour $\sigma\,(L^1_H, L^\infty_H)$ sur la boule unité de L^∞_H de la fonctionnelle q. Il est alors évident que le théorème 3 peut s'énoncer avec un opérateur A au lieu de l'identité si l'on montre que la fonctionnelle.

$$j(\dot{v}) = \int_{[0,1]} < \dot{v}(t), A\, v(t) > \mu\,(dt)$$

avec $$v(t) = a + \int_{[0,t]} \dot{v}(s)\, \mu(ds),\ t \in [0,1]\ |v(s)| \leq 1, \text{ p.p}$$

est semi-continue inférieurement pour $\sigma\,(L^1_H, L^\infty_H)$ sur la boule unité de $L^\infty_H\,[0,1], \mu)$, car le théorème de semi-continuité inférieure (théorème 1) s'applique encore dans le cas considéré (A au lieu de l'identité). Bien entendu, dans ce cas, il n'est plus possible d'utiliser la monotonie du sous différentiel.

Recived June 9, 1981

REFERENCES

[1] Castaing C., *A propos de l'existence des sections séparément mesurables et séparément continues d'une malti-application...* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 6, (1976) exposé n° 6.

[2] Castaing *Equation différentlelle multivoque avec contrainte sur l'état dans les espaces de Banach.* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1978, exposé n° 13.

[3] Castaing C., *Solutions continues à droite d'une équation différentielle multivoque avec contrainte sur l'état,* C. R. Acad. Sci., 288, 1980.

[4] Castaing C., *Topologie de la convergence uniforme sur les parties unifomément intégrables de L^1_E et théorèmes de compacité faible.* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1980, exposé n° 5.

[5] Castaing C. et Valadier M., *Convex Analysis and Measurabl e multi functions.* Lectures Notes, Springer-Verlag n° 580, 1977..

[6] Castaing C. et Clauzure P., *Semi-continuité des fonctionnelles intégrales* (à paraître).

[7] Moreau J.J., *Evolution porblem associated with a moving convex set in Hilbert spaee,* J. Diff. Equat. 26 (1977) 347 – 374.

[8] Moreau J.J., C.R. Acad. Sci. Ser. A, 282 (1976), p. 837.

[9] Moreau J.J., *Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles.* Séminaire d'Analyse Convexe. Montpellier (1975), Exposé n° 17.

[10] Olech C., *A characterization of L_1 – weak lower semi-continuity of integral functionals,* Bull. Acad. Pol. Sc, 25 (1977). 135 – 141.