ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Tom 6 No 2 (1931)

SUR UNE CLASSE DES ALGÈBRES DE LIE RÉELLES RÉSOLUBLES

HỒ HỮU VIỆT
Institut de mathématiques
Hanoi.

I. INTRODUCTION.

Supposons que $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie réelle résoluble de dimension 2n et que G est le groupe de Lie simplement connexe correspondant. G opère sur $\mathcal{G}$ par la représentation $Ad(g)$. Alors G opère sur l' espace dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$ par la formule suivante:

$$K : G \to \mathrm{Aut}\, \mathcal{G}^*$$
$$\langle K(g)\, E,\, X\rangle = \langle F,\, Ad(g^{-1})\, X\rangle$$

où
$$F \in \mathcal{G}^*,\ X \in \mathcal{G},\ g \in G.$$

C'est la K-représentation du groupe G dans l'espace dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre $\mathcal{G}$ (Cf. /1/, §15).

DEFINITION.

On dit que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ satisfait à la condition $\overline{MD}$ (supermaximal dimension) si toute K-orbite dans $\mathcal{G}^*$ est de dimension zéro ou $2n$ (dim $\mathcal{G}$).

Le but de cet article est de donner une classification des algèbres de Lie réelles résolubles satisfaisant à la condition $\overline{MD}$.

C'est une classe intéressante des algèbres de Lie parce que les C*-algèbres des groupes correspondants peuvent être étudiées à l'aide de la K-théorie homologique (Cf. le théorème de cet arlicle et /2/, /3/, /4/).

II. CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE RÉELLES RÉSOLUBLES SATISFAISANT À LA CONDITION $\overline{\text{MD}}$.

On fixe une base orthonormale dans l'algèbre $\mathcal{G}$.

Soit $F \in \mathcal{G}$. Nous désignons par Ω_F la K-orbite contenant F, par G_F le stabilisateur de F et par $\mathcal{G}_F$ l'algèbre Lie de G_F.

LEMME 1. (Cf. exerc. 6 pp. 253 /1/).

L'algèbre $\mathcal{G}_F$ coincide avec le noyau de la forme bilinéaire B_F sur $\mathcal{G}$ définie par la formule :

$$B_F(X,Y) = \langle F, [X,Y] \rangle.$$

PROPOSITION 1.

Soit $\mathcal{G}^1 = 0\,[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$
Si $\mathcal{G}^1 = 0$ *alors* $\mathcal{G}$ *est commutative*
Si $\mathcal{G}^1 \neq 0$ *alors*
1. Pour tout élément non nul F *de* $(\mathcal{G}^1)^*$, *dim* $\Omega_F = 2n$
2. $\mathcal{G}^1$ *est une sous-algbère de Lie commutative.*

Preuve

1. Soient $F \in (\mathcal{G}^1)^*$ et $F \neq 0$
Si $\dim \Omega_F \neq 2n$, alors
$\dim \Omega_F = 0$
$\dim G_F = \dim G - \dim \Omega_F = 2n$
Donc $\mathcal{G}_F = \mathcal{G}$
D'après le lèmme 1, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_F = Ker\, B_F$
C'est-à-dire $\langle F, [\mathcal{G},\mathcal{G}] \rangle \equiv 0$
$\langle F, \mathcal{G}^1 \rangle \equiv 0$
Ce qui est imppossible puisque $0 \neq F \in (\mathcal{G}^1)^*$.

2. Soit $\mathcal{G}^2 = [\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^1]$

Remarquons d'abord que $\mathcal{G}^2$ est un idéal de l'algèbre $\mathcal{G}$ et que $\dim \mathcal{G}^2 < \dim \mathcal{G}^1$ par définition d'une algèbre résoluble. Il existe donc un élément $f \neq 0$, contenu dans le complément orthogonal de $\mathcal{G}^2$ dans $\mathcal{G}^1$.

Pour $F = f^*$ on a
$\dim \Omega_F = 2n$ (par partie 1)
$\dim G_F = \dim G - \dim \Omega_F = 0$
Donc $\mathcal{G}_F \equiv 0$

Or $\mathcal{G}^2$ est contenue dans $\mathcal{G}_F$ parce que $[\mathcal{G}^2, \mathcal{G}] \subset \mathcal{G}^2$ et alors F, $\langle F, [\mathcal{G}^2, \mathcal{G}] \rangle \equiv 0$.

C'est pourquoi $\mathcal{G}^2 \equiv 0$, et $\mathcal{G}^1$ est une sous-algèbre de Lie commutative.

Dans la suite nous considérons seulement le cas où $\mathcal{G}^1 \neq 0$, car si $\mathcal{G}^1 = 0$ c'est-à-dire $\mathcal{G}$ est commutative alors toute K-orbite est de dimension zéro, donc évidemment $\mathcal{G}$ satisfait à la condition $\overline{MD}$).

LEMME 2. (Critère $\overline{MD}$.)

Pour que l'algèbre $\mathcal{G}$ satisfasse à la condition $\overline{MD}$ it faut et il suffit que pour tout élément non nul $X \in \mathcal{G}$, $[X,\mathcal{G}] = \mathcal{G}^1$.

Preuve.

Supposons d'abord que $\mathcal{G}$ satisfait à $\overline{MD}$. Alors d'après la proposition 1, pour tout élément non nul $F \in (\mathcal{G}^1)^*$, $\dim \Omega_F = 2n$, d'où $\mathcal{G}_F = 0$, ce qui d'après le lemme 1, signifie que $\operatorname{Ker} B_F = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe un élément non nul X de $\mathcal{G}$ tel que $[X\mathcal{G}] \neq \mathcal{G}^1$. Alors il existe un élément $f \neq 0$ contenu dans le complément orthogonal de $[X,\mathcal{G}]$ dans $\mathcal{G}^1$.

Pour $F = f^*$ on a:

$$\langle F, [X,\mathcal{G}]\rangle = 0$$

Ce qui est impossible puisque $Ker\ B_F = 0$.

Réciproquement, supposons que $[X,\mathcal{G}] = \mathcal{G}^1$, $\forall\ X \in \mathcal{G}\, X \neq 0$. Nous montrerons que toute K-orbite est de dimension zéro ou $2n$.

Remarquons d'abord que pour tout élément F contenu dans le complément orthogonal de $(\mathcal{G}^1)^*$ dans $\mathcal{G}$ on a :

$$\langle F, [\mathcal{G},\mathcal{G}]\rangle = 0$$

Donc $Ker\ B_F = \mathcal{G}$

Alors $\mathcal{G}_F = \mathcal{G}$, d'où $\dim G_F = 2n$ et $\dim \Omega_F = 0$. Il suffit donc de montrer que pour tout élément non nul F de $(\mathcal{G}^1)^*$, $\dim \Omega_F = 2n$.

Il est clair que si $[X,\mathcal{G}] = \mathcal{G}^1\ \forall\ X \neq 0$ alors

$Ker\ B_F = 0$ $(0 \neq F \in (\mathcal{G}^1)^*)$.

Donc $\mathcal{G}_F = 0$, $\dim G_F = 0$ d'où $\dim \Omega_F = 2n$.

Désignons par ad^1_Y $(Y \in \mathcal{G})$ la restriction de l'opérateur ad_Y sur $\mathcal{G}^1$.

C'est-à-dire

$$ad^1_Y : \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1$$

$$ad^1_Y\ X = [Y,X],\ X \in \mathcal{G}^1.$$

LEMME 3.

Si l'algèbre $\mathcal{G}$ satisfait à la condition $\overline{MD}$, les opérateurs ad^1_Y commutent l'un avec l'autre.

Preuve.

Prenons arbitrairement Y et Y' dans $\mathcal{G}$.

On a

$$[Y\,[Y'\,X]] + [Y'\,[X\,Y]] + [X\,[Y\,Y']] \equiv 0$$

Si $X \in \mathcal{G}^1$, $[X\,[Y\,Y']] = 0$

D'où $[Y\,[Y'\,X]] = [Y'\,[Y\,X]] \qquad \forall\, X \in \mathcal{G}^1$

C'est-à-dire $\mathrm{ad}^1_Y \; ad^1_{Y'} = ad^1_{Y'} . \; ad^1_Y$

THÉORÈME.

Toute algébre de Lie réelle résoluble satisfaisant à la condition $\overline{MD}$ est isomorphe à une des algèbres suivantes:

1. L'algèbre de Lie commutative.

2. L'algèbre de Lie affine réelle.

3. L'algèbre de Lie affine complexe.

La démonstration de ce théorème est assez longue, elle consiste à démontrer que dim $\mathcal{G}^1 = 1$ ou dim $\mathcal{G}^1 = 2$ et ensuite à étudier chaque cas.

1*ère étape.*

La dimension de $\mathcal{G}^1$ est égale à 1 ou 2.

Preuve.

Supposons que $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1 \oplus L$ et que $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ est une base du sous-éspace L.

Nous considérons maintenant les opérateurs linéaires

$$ad^1_{Y_i} : \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1 \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Soit dim $\mathcal{G}^1 = m$.

Remarquons que nous pouvons considérer $ad^1_{Y_i}$ comme des opérateurs **C**-linéaires de l'espace complexe $\mathbf{C}^m$

$$(\text{i.e., } ad^1_{Y_i} : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m).$$

Soient $\lambda_1 \in \mathbf{C}$ une valeur propre de $ad^1_{Y_1}$ et M_1 le sous-espace des vecteurs propres correspondants à la valeur propre λ_1.

D'après le lemme 4 les opérateurs $ad^1_{Y_i}$ commutent entre eux, donc on déduit que M_1 est un espace invariant pour les opérateurs $ad^1_{Y_i}$.

Considérons par la suite $ad^1_{Y_i}$ comme des opérateurs de l'espace M_1.

Pour $ad_{Y_2}^1$, soient $\lambda_2 \in C$ une valeur propre de $ad^1_{Y_2}|_{M_1}$ et $M_2 \subset M_1$ le sous-espace des vecteurs propres dans M_1 correspondants à la valeur propre λ_2. Alors par le même raisonnement que celui utilisé ci-dessus pour M_1, M_2 est un espace invariant pour les opérateurs $ad^1_{Y_i}$. Continuons le même raisonnement pour les opérateurs $ad^1_{Y_3}, \dots, ad^1_{Y_k}$: pour $ad^1_{Y_i}$, soient $\lambda_i \in C$ une valeur propre de $ad^1_{Y_i}$ et $M_i \subset M_{i-1}$ le sous-espace de vecteurs propres dans M_{i-1} correspondants à la valeur propre λ_i. Il est clair que $M_i \neq 0$ avec $i = 1, 2, \dots, k$. Choisissons X non nul dans M_k, on a

$$ad^1_{Y_i} X = \lambda_i X \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Considérons maintenant les λ_i comme des vecteurs réels C. Alors le nombre maximal des λ_i linéairement indépendants est égal à 1 ou 2.

1 cas. Le nombre maximal des λ_i linéairement indépendants est égal à 1.

Sans ruine à la généralité nous pouvons supposer que $\lambda_1 \neq 0$, alors $\forall i = 1, \dots, k$, $\exists \alpha_i \in R$ tel que

$$\lambda_i = \alpha_i \lambda_1$$

On pose $Y'_i = Y_i - \lambda_i Y_1$ avec $i = 2, 3, \dots k$.

Il est clair que $Y_1, Y'_2, \dots, Y'_k$ forment une base de L. De plus, on vérifie facilement que

$$ad^1_{Y'_i} X = 0 \quad i = 2, 3, \dots, k.$$

Remarquons que tout vecteur X de C^m admet la représentation $X = X' + \sqrt{-1}X''$ où $X', X \in \mathcal{G}^1$

On a

$$ad^1_{Y'_i} X' = ad^1_{Y'_i} X'' = 0 \ i = 2, 3, \dots, k.$$

X' et X'' ne sont pas simultanément nuls puisque X est non nul. Soit $X' \neq 0$. Alors en raison du critère $\overline{MD}$ (lemme 2) on a :

$$[X', \mathcal{G}] = \mathcal{G}^1$$

Or $[X', \mathcal{G}^1] = 0$, de plus $[X, Y'_i] = -ad^1_{Y'_i} X = 0$.

Donc $[X', RY_1] = \mathcal{G}^1$, d'où $dim\ \mathcal{G}^1 = 1$.

Remarque 1.

Il faut noter que s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{G}^1$ tel que $ad^1_Y X = \lambda_Y X$ ($\lambda_Y \in \mathbf{R}$) pour tout $Y \in L$, on a dim $\mathcal{G}^1 = 1$

2^e^ cas.

Le nombre maximale des λ_i linéairement indépendants est égal à 2.

On démontre alors que dim $\mathcal{G}^1 = 2$ d'une manière tout à fait analogue à celle du premièr cas.

2^e^ étape.

1. Si dim $\mathcal{G}^1 = 1$, $\mathcal{G}$ est l'algèbre affine réelle $\mathbf{R}^1$. $\mathbf{R}^1$ avec une base X, Y, $[Y,X] = X$.

2. Si dim $\mathcal{G}^1 = 2$, $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie $\mathbf{R}^2$. $\mathbf{R}^2$ avec une base X_1, X_2, Y_1, Y_2 ($X_1, X_2 \in \mathcal{G}^1$) telle que :

$$\begin{array}{ll} [X_1\ X_2] = 0 & [Y_1\ Y_2] = 0 \\ [Y_1\ X_1] = X_1 & [Y_1\ X_2] = X_2 \\ [Y_2\ X_1] = X_2 & [Y_2\ X_2] = -X_1 \end{array}$$

(Rappelons que ceci correspond à l'algèbre de Lie affine (complexe),

Preuve,

Remarquons d'abord que si $[Z_1\ \mathcal{G}^1] = [Z_2, \mathcal{G}^1] = 0$ ($Z_1, Z_2 \in \mathcal{G}$) alors $[Z_1\ Z_2] = 0$.

En effet

$$[[Z_1\ Z_2]\ T] + [\underbrace{[Z_2\ T]\ Z_1}_{0}] + [\underbrace{[T\ Z_1]}_{0}\ Z_2] = 0 \quad \forall\ T \in \mathcal{G}, \ [[Z_1\ Z_2]\ T] = 0$$

En raison du lemme 2 on a $[Z_1\ Z_2] = 0$

Démontrons maintenant la 2^e^ étape. Soit $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1 \oplus L$,

1. *dim* $\mathcal{G}^1 = 1$.

Soient $X \in \mathcal{G}^1$ et $X \neq 0$..

On a $ad_X : \mathcal{G} \xrightarrow{\text{sur}} \mathbf{R}X$ (lemme 2).

D'où $ad_X : L \xrightarrow{\text{sur}} \mathbf{R}X$.

Il existe Y non nul de L tel que $[Y\,X] = X$.

Alors $L = \mathbf{R}Y \oplus L_1$ où $[L_1\,X] = 0$.

D'après la remarque ci-dessus L_1 est commutative.

Nous allons montrer que $L_1 = 0$.

Si $L_1 \neq 0$ il existe $Y_1 \in L_1$, $Y_1 \neq 0$.

On a $[Y_1\ Y] = \lambda\,X$.

Alors

$$[Y_1+\lambda X, X] = [Y_1 X] + [\lambda X, X] = 0$$
$$[Y_1+\lambda X, Y] = [Y_1 Y] + [\lambda X, Y] = \lambda X - \lambda X \neq 0$$
$$[Y_1+\lambda X, L_1] \subset [Y_1, L_1] + [\lambda X, L_1] = 0$$

D'où $[Y_1+\lambda X, \mathcal{G}] = 0$ ce qui est contraire au critère $\overline{MD}$. On en déduit que dans ce cas $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie affine réelle avec une base X, Y,

$$[Y, X] = X.$$

2. *dim* $\mathcal{G}^1 = 2$.

Supposons que dim $L > 2$, nous montrerons qu'il existe Y non nul de L tel que $[Y\mathcal{G}^1] = 0$.

Supposons qu'il n'en est pas ainsi.

Soient $X \in \mathcal{G}^1$ et $X \neq 0$, alors pour $ad_X : L \to \mathcal{G}^1$ il existe $Y \neq 0$, $Y \in L$ tel que $ad_X Y = 0$.

(parce-que dim $L >$ dim $\mathcal{G}^1 = 2$). C'est-à-dire $ad_Y X = 0$

Alors l'hypothèse $[Y, \mathcal{G}^1] \neq 0$ signifie que X est un vecteur propre unique correspondant à la valeur propre zéro de $ad^1_Y, : \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1$.

Puisque ad^1_Y commutent l'un avec l'autre, on déduit que $\mathbf{R}.X$ est un sous-espace invariant pour tous opérateurs $ad^1_{Y'}$. C'est-à-dire

$$ad^1_{Y'}X = \lambda_{Y'} X \text{ où } \lambda_{Y'} \in \mathbf{R}.$$

D'après la remarque 1 on a dim $\mathcal{G}^1 = 1$ ce qui est contradictoire. D'où il existe $Y \in$ L, $Y \neq 0$,

$$[Y, \mathcal{G}^1] = 0$$

Si la dimension du complément orthogonal de $\mathbf{R}Y$ dans L est supérieure encore à 2, il existe encore Z non nul dans ce complément tel que

$$[Z, \mathcal{G}^1] = 0$$

On continue ce processus jusqu'à ce que la dimension du complément orthogonal de $\mathbf{R}\, Y \oplus \mathbf{R}\, Z \oplus \ldots$ est égale justement à 2.

Alors L a une représentation de la forme $L = L_1 \oplus L_2$ où dim $L_1 = 2$, $[L_2, \mathcal{G}^1] = 0$.

D'après la remarque précédante L_2 est une sous-algèbre commutative. Nous allons maintenant montrer que

$$L_2 = 0$$

Si $L_2 \neq 0$, alors dim $L_2 \geqslant 2$ puisque chaque K-orbite est de dimension paire.

Nous considérons des opérateurs

$$ad\, Y : \mathcal{G} \xrightarrow{\text{sur}} \mathcal{G}^1 \quad (Y \neq 0)$$

$$ad\, Y : \mathcal{G}^1 \oplus L_2 \oplus L_1 \xrightarrow{\text{sur}} \mathcal{G}^1$$

Si $Y \in \mathcal{G}^1 \oplus L_2$, $[Y, \mathcal{G}^1 \oplus L_2] \equiv 0$ c' est pourquoi

$$ad\, Y : L_1 \xrightarrow{\text{sur}} \mathcal{G}^1$$

Mais dim $L_1 =$ dim $\mathcal{G}^1 = 2$ donc ad $Y \in ISO\,(L_1, \mathcal{G}^1)$
C'est-à-dire ad: $R^4 - \{0\} \to ISO\,(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$

De plus cette application est injective en raison du critère $\overline{MD}$. Il est aisé de, voir que ceci est impossible. Donc $L_2 = 0$.

Alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1 \oplus L$ où dim $\mathcal{G}^1 =$ dim $L = 2$.

Soit $\{X_1 X_2\}$ une base de $\mathcal{G}^1$. D' après le critère $\overline{MD}$ $ad_{X_1} : L \xrightarrow{\text{sur}} \mathcal{G}^1$, il existe $Y_1 \in L$ tel que $[Y_1 X_1] = X_1$ *i.e.*, $ad_{Y_1} X_1 = X_1$

D'après la remarque 1, ad_{Y_1} ne peut pas avoir seulement un vecteur propre (à coefficient près) correspondant à la valeur propre $\lambda = 1$.

On en déduit que $ad^1_{Y_1} \equiv Id$ c'est-à-dire

$$[Y_1 X_1] = X_1\ ,\ [Y_1 X_2] = X_2$$

Considérons maintenant $ad_{Y_1} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^1$.

On a: dim Ker $ad_{Y_1} = 2$, d'où il existe Y'_2 tel que $\{Y_1, Y'_2, X_1, X_2\}$ soit une base de $\mathcal{G}$ et $[Y_1 Y'_2] = 0$

Rappelons que $ad^1_{Y_1} \equiv Id$, c' est pourquoi $ad^1_{Y'_2}$ ne peut pas avoir des vecteurs propres en raison du critère $\overline{MD}$.
En changeant la base de $\mathcal{G}^1$ on a

$$ad^1_{Y_2} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } a, b \in \mathbf{R},\ b \neq 0.$$

En posant $Y_2 = \dfrac{1}{b}\,(Y'_2 - aY_1)$ on a

$$ad^1_{Y_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que X_1, X_2, Y_1, Y_2 forment une base de $\mathcal{G}$ avec les crochets de Lie suivants:

$$
\begin{array}{ll}
[X_1\, X_2] = 0 & [Y_1\, Y_2] = 0 \\
[Y_1\, X_1] = X_1 & [Y_1\, X_2] = X_2 \\
[Y_2\, X_1] = X_2 & [Y_2\, X_2] = -X_1
\end{array}
$$

C'est l'algèbre de Lie affine complexe.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à *M.* Đỗ Ngọc Diệp qui m'a proposé ce thème et à *M.* Đoàn Quỳnh qui a bien voulu de lire le manuscrit de cet article.

Received on Octobers 10, 1980
in revised form June 30, 1981.

LITERATURE

[1]. A.A. Kirillov. *Elements of the theory of representations.* M. « MIR » 1972.

[2] D. Ng. Ziep. *The structure of the C^* — algebra of the group of affine transformations of the line.* Funktional Anal. i Prilozen 9 (1974), 63—64.

[3]. D. Ng. Ziep. *Application du K-foncteur homologique Ext (,) à l'étude de la structure des C^* — algèbres de quelqucs groupes de Lie résolubles* (Dissertation 1977).

[4] J. Rosenberg. *The C^*—algebras of some real and p-adic solvable groups.* Pacific J. Math. 65 N⁰ 1, 1976, 175—192.