ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 6, № 1

SUR LES POINTS D'OPTIMUM DE PARETO LOCAL DE DÉTERMINATION FINIE OU INFINIE

HÀ HUY VUI

Institut de Mathématiques, Hanoi

I. INTRODUCTION

Le problème d'optimisation (simultanée) de plusieurs fonctions est posé par les besoins de l'économie.

S. Smale fut le premier à généraliser les conditions d'optimum du premier et second ordre d'une fonction (traitées dans les cours de base en analyse) à l'optimum de Pareto [1]

Dans cet article, nous nous intéressons aux deux problèmes suivants :

a) quelles sont les applications pour lesquelles le problème de savoir si un point donné est un optimum de Pareto local équivaut tout-à-fait au même problème pour leurs développements de Taylor ?

b) que peut on dire de l'ensemble des applications satisfaisant à a) ?

Le problème a) conduit à la notion de points d'optimum de Pareto local de détermination finie et infinie ainsi qu'à certaines conditions d'ordre supérieur pour l'optimum de Pareto local.

2. NOTIONS ET RÉSULTATS

2. 1. DÉFINITION. Soit $f : R^n \to R^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$, $f(0) = 0$ le point $0 \in \mathbf{R}^n$ est dit minimum de Pareto local (m.p.l) de f, s'il existe $\sigma > o$ tel que

$$(\| x \| \leqslant \sigma, f_i(x) \leqslant 0, \ i = 1, \dots, p) \Rightarrow (f_i(x) = 0 ; \ i = 1, \dots, p)$$

2. 2. DÉFINITION. Soit $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ un germe d'application r fois

différentiable ($r \leqslant \infty$). Supposons que $0 \in R^n$ soit un m.p.l. de f. Le point $0 \in \mathbf{R}^n$ est dit m.p.l. r-déterminé de f, si toute application g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ possédant un développement de Taylor d'ordre r an $0 \in \mathbf{R}^n$ coincidant avec celui de f admet aussi $0 \in \mathbf{R}^n$ comme m.p.l.

Si $0 \in \mathbf{R}^n$ est un m.p.l. determiné à l'ordre $r < \infty$ ($r = \infty$) de f, nous dirons que $0 \in \mathbf{R}^n$ est un m.p.l. de détermination finie (resp. infinie) de f.

2.3. REMARQUE. En fait, la notion de m.p.l. déterminé à l'ordre r apparait pour la première fois dans [2]. On y trouve aussi une condition suffisante (qui n'est pas nécessaire, comme l'on voit aisément) pour que $0 \in \mathbf{R}^n$ soit un m.p.l. déterminé l'ordre $r < \infty$ de l'application f ([2], Th.8).

2.4. THÉORÈME. (critère pour qu'un m. p. l. soit déterminé à l'ordre $r < \infty$). *Soit $f: (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ un germe d'application r fois différentiable, $r < \infty$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *$0 \in \mathbf{R}^n$ est un m.p.l. r-déterminé de f.*

2) *Il existe c, $\sigma > 0$ tels que, pour tout $\| x \| < \sigma$, il existe $i_x \in (1, \ldots, p)$ tel que*

$$T^r f_{i_x}(x) \geqslant c \, \| x \|^r$$

où $T^r f_{i_x}(x)$ est le polynôme de Taylor d'ordre r de f.

2.5. THÉORÈME (critère de m.p.l. ∞-déterminé).

Soit f: $\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ un germe d'application infiniment différentiable. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes

1) *$0 \in \mathbf{R}^n$ est un m.p.l. ∞-déterminé de f.*

2) *Il existe C, α, $\delta > 0$ tels que, pour tout x, tel que $\| x \| < \delta$. il existe $i_x \in (1, \ldots, p)$ tel que*

$$f_{i_x}(x) \geqslant C \, \| x \|^{\alpha}$$

2.6. CONSÉQUENCE. *Soit $f: (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ un germe d'application infiniment différentiable. Alors, $0 \in \mathbf{R}^n$ est un m.p.l. de détermination finie si, et seulement si, il est un m.p.l. infiniment déterminé de f.*

2.7. REMARQUE. Ce n'est pas là le seul cas de coincidence entre les déterminations finie et infinie (cf. [3], [4], [5]) 2.8. CONSÉQUENCE. *Si* $0 \in \mathbb{R}^n$ *est un m.p.l. r-déterminé de l'application* $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$. *Alors, il existe* C, $\delta > 0$ *tels que*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{p} [T^r f_i (x)]^2 \right\}^{1/2} \geqslant C=x \|^r \qquad r \| x \| \leqslant \delta$$

2.9. CONSÉQUENCE. *Si* $0 \in \mathbb{R}^n$ *est un m.p.l. infiniment déterminé de l'application* $f:(\mathrm{R}^n, 0) \to (\mathrm{R}^p, 0)$. *Alors, il existe* C, δ, $\alpha > 0$ *tels que*

$$\left[\sum_{i=1}^{p} f_i^2 (x) \right] \geqslant C \| x \|^{\alpha}, \qquad \forall \| x \| \leqslant \delta.$$

2.10. CONSÉQUENCE. (critère de minimum r-déterminé d'une fonction). *Soit* $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *un germe de fonction r fois différentiable* $r < \infty$. *Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes*

1) $0 \in \mathbb{R}^n$ *est un minimum local r-déterminé de f.*

2) *Il existe* C, $\delta > 0$ *tels que*

$$T^r f(x) \geqslant C \| x \|^r \qquad \forall \| x \| < \delta$$

2.11. CONSÉQUENCE (critère de minimum ∞-déterminé d'une fonction)

Soit $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *un germe de fonction infiniment différentiable. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

1) $0 \in \mathbb{R}^n$ *est un minimum local infiniment déterminé de* f.

2) *Il existe* C, α, $\delta > 0$ *tels que*

$$f(x) \geqslant C \| x \|^{\alpha}, \qquad \forall \| x \| < \delta$$

2.12. Réponse au problème b)

Soit M l'ensemble de tous les germes d'applications r fois différentiables admettant $0 \in \mathbb{R}^n$ comme m.p.l. r-déterminé ($r < \infty$). Notons $\mathcal{E}^{(r)}(n,p)$ l'espace des germes en $0 \in \mathbb{R}^n$ d'applications r-fois différentiables et $J^r(n,p)$ l'espace des jets d'ordre r. Soit π_r l'application

$$\pi_r : \mathcal{E}^{(r)}(n,p) \to \mathrm{j}^r(n,p)$$

$$f \to j^r f(0)$$

D'après le théorème 2.4 on voit que la propriété pour un point m.p.l. de f d'être r-déterminé ne dépend que de r. Par conséquent, pour décrire l'ensemble M, il suffit de décrire l'ensemble $\pi_r(M)$ dans l'espace $J^r(n,p)$ (dont la dimension est $< \infty$).

THÉORÈME. $\pi_r(M) \subset J^r(n,p)$ *est un ensemble semi-algébrique.*

3. DÉMONSTRATION DES RÉSULTATS

3.1. Démonstration du Théorème 2.4.

1) $\rightarrow$ 2). On fait une démonstration par l'absurde. Supposons 2) faux. Alors avec $C_k = \frac{1}{k^2}$, il existe une suite $a_k \rightarrow 0$ tels que

$$T^r f_i(a_k) < \frac{1}{k^2} \| a_k \|^r \quad \forall k = 1, 2, \ldots ; i = 1, \ldots, p$$

Comme $| f_i(x) - T^r f_i(x) | \in o(\| x \|^r)$, en remplaçant par sous-suite, on peut supposer que

$$f_i(a_k) < \frac{1}{k^2} \| a_k \|^r \quad k \geqslant 1 ; i = 1, \ldots, p$$

et $$\{1, \ldots, P\} = I \cup f,\ I \cap J = \phi ; f_i(a_k) \geqslant 0,\ \forall i \in I$$

et $$f_j(a_k) \leqslant 0 \qquad \forall j \in J$$

Comme $0 \in \mathbf{R}^n$ est un m.p.l. de f, on a $I \neq \phi$. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\| a_{k+1} \| < \frac{1}{2} \| a_k \|, \ k \geqslant 1$$

Prenons $\psi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^∞, $\psi(x) = 1$ pour $\| x \| \leqslant \frac{1}{8}$ et $\psi(x) = 0$ pour $\| x \| \geqslant \frac{1}{4}$ et posons

$$\Phi_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_i(a_k)\, \psi\left(\frac{x - a_k}{\| a_k \|}\right) \quad \forall i \in I$$

Alors on peut démontrer que lès fonctions Φ_i sont r fas différentiables par rapport à x et $T^r \Phi_i(x) \equiv 0 \quad \forall i \in I$

Considérons l'application

$$g = (g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_p)$$

$$g_i = f_i - \Phi_i - e^{\frac{1}{\| x \|^2}} \qquad \forall j \in J$$

$$g_j = f_j \qquad \forall j \in J$$

Alors $T^r g = T^r f$

Néanmoins $g_j(a_k) < \infty$, $g_i(a_k) < \infty \quad \forall (i,j) \in I \times J$ ce qui veut dire que $0 \in \mathbf{R}_n$ n'est pas m.p.l. de g, en contradiction avec 1)

2) → 1). D'abord, on démontre aisément que $\exists c,\sigma>0$ tels que

$$\| x \| < \delta \to \exists i_x \in \{1,\dots, p\} \text{ tel que } f_{i_x}(x) \geqslant c \| x \|^r \quad (*)$$

Maintenant, démontrons 1). Par l'absurde, supposons que $\exists \varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ $T^r \varphi = 0$ tel que $0 \in \mathbf{R}^n$ ne soit pas un m.p.l. de $g = f + \varphi$

Alors, il existe une suite $a_k \to 0$ telle que

$$g_i(a_k) = f_i(a_k) + \varphi_i(a_k) = 0 \qquad \forall i \in I$$

$$g_j(a_k) = f_j(a_k) + \varphi_j(a_k) < \infty \quad \forall j \in J$$

où $\quad I \cup J = \{1,\dots, p\}; \quad I \cap J = \phi$

On voit en remplaçant par une sous-suite, si nécessaire qu'il résulte de (*) qu'il existe $s \in \{1,\dots, p\}$ tel que

$$f_s(a_k) > c \| a_k \|^r \qquad \forall k=1,2\dots,$$

Mais $s \not\ni I$ puisque $| \varphi_i(a_k) | \in o(\| a_k \|^r)$ et $f_i(a_k) + \varphi_i(a_k) = 0$

$s \not\ni J$ puisque $| \varphi_j(a_k) | \in o(\| a_k \|^r)$ et $f_j(a_k) + \varphi_j(a_k) < 0$

la contradiction qui en résulte achève la preuve du théorème 2.4.

3. 2. Démonstration du Théorème 2.5.

On peut démontrer le théorème 2.5 en modifiant un peu la démonstration du théorème 2.4

3.3. Démonstration du théorème 2.10.

D'après le théorème 2.4 :

$$\pi_r(M) = \{(\alpha) = (\alpha^1_{I_1},\dots, \alpha^p_{I_p}) \in J^r(n, p) = \underbrace{J^r(n, 1)\text{x}\dots\text{x}J^r(n, 1)}_{p-\text{fois}} \mid \exists \varepsilon, \sigma > 0$$

$$\text{tels que } \forall \| x \| < \sigma \text{ il existe } i \in \{1,\dots, p\} \text{ tel que } \sum_{\|x\| \leqslant r} a^i_I x^I \geqslant \varepsilon \| x \|^r \}$$

D'où l'on déduit aisément :

$$\pi_r(M) = \{(\alpha) = (\alpha^1,\dots,\alpha^p) \in J^r(n,p)\ \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que } \| x \| \leqslant \varepsilon$$

$$\exists i \text{ tel que } \qquad \sum_{\|x\| \leqslant r} a^i_I x^I \geqslant \varepsilon \| x \|^r \}$$

Considérons l' ensemble

$$B = \{ (a) = (a^1,\dots a^P) \in J^r(u,p) \,\Big|\, \forall \| y \| < 1\ \exists i \text{ tel que } \sum_{|I| \leqslant r} a^i_I y^I \geqslant \| y \| \}$$

D'abord, prouvons que B est un ensemble semi-algébrique. En effet, considérons l'ensemble semi-algébrique

$$\widetilde{B} = \{ (a,y) \in J^r(n,p) \times \mathbf{R}^n \,\big|\, \| y \| < 1 \ \Sigma a_I^i \, y^I \leqslant \| y \|^r \ \forall i=1,\ldots,p \}$$

Si $\pi : J^r(n,p) \times \mathbf{R}n \to J^r(n,p)$ est la projection canonique, alors

$$\pi(\widetilde{B}) = J^r(n,p) \setminus B$$

Comme $\pi(\widetilde{B})$ est semi-algébrique (d'après le théorème de Tarski- Seidenberg [6], B l'est aussi.

Considérons l'ensemble

$$\widetilde{A} = \{ (\varepsilon, a) \in \mathbf{R} \times J^r(n,p) \mid a \in B, \varepsilon > 0 \}$$

Il est aussi semi-algébrique

Soit l'application polynomiale

$$S : \mathbf{R} \times J^r(n,p) \to J^r(n,p)$$

$$(\varepsilon, a) \mapsto (\varepsilon^{r+1-|I|} a_I^1, \ldots, \varepsilon^{r+1-|I|} a_I^p)$$

Par vérification directe on peut voir que

$$S(\widetilde{A}) = \{ (a) \in J^r(n,p) | \exists \ \varepsilon > 0 \ \ \forall \| x \| \leqslant \varepsilon \ \exists i \ \Sigma a_I^i \, x^I \geqslant \varepsilon \| x \|^r \} \ .$$

Donc $\pi_r(M)$ est un ensemble semi-algébrique, d'après le théorème de Tarski-Seidenberg [6].

Le théorème 2. 10 est démontré.

Received on November 1980

REFERENCES

1. S Smale, *Optimizing several functions.* Proc. Tokyo Manifolds Conferences, 1973, pp. 69—75.

2. Y.H. Wan, *On the algebraic criteria for local Pareto optima I.* Topology, Vol.16, 1977, pp. 113—117.

3. J. Bochnak and S. Lojasiewicz, *A converse of the Kuiper-Kuo theorem.* Lecture Notes Math., 192, 1971.

4. N.T. Cường, N. H. Đức, N.S. Minh, H. H. Vui, *Sur les germes de fonctions infiniment déterminées* C. R. Acad. Paris, t. 285 (1977). pp. 1045—1047

5. V. V. Lumagin, Mat. Sbornik 104 (146), N°2, 1977

6. A Seidenberg. *A new decision method for elementary algebra.* Ann. Math 60 (1954)