ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Tom 6 — № 1

SUR LA STRUCTURE DES SOLUTIONS D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE

NGUYỄN THỪA HỢP
Université de Hanoi

I.N. Vekua [1], [2] a établi entre les solutions d'une classe d'équations linéaires du type elliptique à deux variables et les fonctions analytiques une correspondance qui joue un rôle primordiale dans l'étude des problèmes aux limites de ces équations.

D. Colton [4], [5] a trouvé des résultats pareils pour le cas de trois variables en construisant un opérateur intégral qui applique l'ensemble des fonctions analytiques à deux variables sur l'ensemble des solutions d'une classe d'équations du type elliptique à trois variables.

Dans ce travail, nous traitons quelques questions analogues pour le système elliptique à plusieurs variables sous forme matricielle :

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)\, u(x) = 0$$

Nous établissons dans un domaine borné quelconque une correspondance entre un sous ensemble des vecteurs harmoniques et l'essemble des vecteurs solutions du système. En s'appuyant sur la correspondance établie on trouvera la structure des solutions du système. Des exemples illustrant des résultats obtenus seront donnés à la fin du travail.

1. CORRESPONDANCE ENTRE LES SOLUTIONS DU SYSTÈME ELLIPTIQUE ET LES VECTEURS HARMONIQUES

Dans la suite, seront adaptées les notations suivantes :

a) E_n — espace euclidien réel, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — points génériques dans E_n et $r_{xy} = |x - y|$ distance entre x et y.

b) Ω — domaine borné, multiplement connexe de frontière de Liapsnov $S = \bigcup_{i=0}^{n} S_i$ dont toutes les S_i sont des surfaces fermées, disjointes et S_0 contient toutes les S_i restantes dans son intérieur.

c) $\Omega^- = E_n \setminus (\Omega + S)$ — complément de $\Omega + S$ par rapport à l'espace entier E_n.

d) S_1 — mesure superficielle de la sphère unite de E_n.

e) $$u^+(y) = \lim_{\substack{x \to y \in S \\ x \in \Omega}} u(x) \qquad u^-(y) = \lim_{\substack{x \to y \in S \\ x \in \Omega}} u(x)$$

f) $n_y^+(n_y^-)$ — normale intérieure (extérieure) de S au point $y \in S$.

$$\left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+}\right)^+ = \lim_{\substack{x \to y \in S \\ x \in n_y^+}} \frac{\partial u(x)}{\partial n_y^+}\ ; \quad \left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+}\right)^- = \lim_{\substack{x \to y \in S \\ x \in n_y^-}} \frac{\partial u(x)}{\partial n_y^+}$$

$$\left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^-}\right)^+ = \lim_{\substack{x \to y \in S \\ x \in n_y^+}} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y^-}\ ; \quad \left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^-}\right)^- = \lim_{\substack{x \to y \in S \\ x \in n_y^-}} \frac{\partial u(x)}{\partial n_y^-}$$

g) $C^k(\Omega + S)\,(C^k(\Omega^- + S))$, $0 \leqslant k < +\infty$ — ensemble des fonctions définies dans Ω (Ω^-) pour lesquelles existent toutes les dérivées d'ordre $\leqslant k$, continûment prolongeables jusqu' à S.

Conventions : Le point infini n'est pas inclus dans Ω^-. Les fonctions de $C(\Omega^- + S)$ peuvent tendre vers l'infini lorsque $x \to \infty$

h) $W_p^k(\Omega)$, $0 \leqslant k < +\infty$ — espaces de Sobolev, c.a.d espaces des fonctions pour lesquelles toutes les dérivées généralisées d'ordre $\leqslant k$ appartiennent à $L_p(\Omega)$.

i) Si $u(x)$ est un vecteur, par $u(x) \in L_p(\Omega)$, $W_p^k(\Omega)$,.... est entendu un vecteur dont toutes les composantes appartiennent à $L_p(\Omega)$, $W_p^k(\Omega)$,....

DÉFINITION 1. La classe $\mathcal{M}$ est la classe des fonctions (ou des vecteurs) $u(x)$, définies dans le plan, harmoniques dans Ω^- qui sont, avec toutes ses dérivées du premier ordre, continûment prolongeables jusqu' à la frontière S, et admettent le développement près de l'infini.

$$u(x) = A \log R(x) + \varphi(x).$$

Ici, A est une constante, $R(x) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$ $(a_1, a_2) \in \Omega$ et $\varphi(x)$ est une fonction (ou un vecteur) harmonique dans Ω^-, vérifiant l'égalité :

$$\varphi(\infty) = 0$$

DÉFINITION 2. Une fonction $u(x)$, harmonique dans Ω^-, est dite **régulière** à l'infini si comme d'habitude :

$$u(\infty) = 0 \qquad \text{pour } n \geqslant 3$$
$$| u(x) | \leqslant C \qquad | x | \to \infty \qquad \text{pour } n = 2$$

Nous considérons ci-après le

PROBLÈME A.

Soit l'équation

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)\, u(x) = 0 \tag{1.1}$$

dont les coefficients $a_i(x)$ sont des matrices carées réelles à $m \times m$ éléments mesurables et bornés.

Trouver les vecteurs $u(x) \in W_p^2(\Omega)$, $p > n$ vérifiant l'équation (1.1) et les conditions :

$$\left.\begin{aligned} u^+(y) &= \omega^-(y) \qquad &(1.2)\\ \left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+}\right)^+ &= -\left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^-}\right)^- \qquad &(1.3)\end{aligned}\right\} y \in S$$

où $\omega(x)$ est un vecteur harmonique dans Ω^-, non donné d'avance régulier à l'infini pour $n \geqslant 3$ et appartenant à la classe $\mathcal{M}$ pour $n = 2$. On suppose que $\omega(x)$ et toutes ses dérivées du premier ordre soient continûment prolongeables jusqu'à S.

Soit maintenant que non seulement $a_i(x)$, mais, aussi toutes ses dérivées généralisées du premier ordre sont des matrices carrées aux éléments mesurables et bornés. Alors, à côté du problème A il est utile de proser le

PROBLÈME A*. Trouver les vecteurs $\varphi(x) \in W_{p'}^2(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, **vérifiant l'équation :**

$$\Delta\varphi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(a_i^*(x)\,\varphi(x)\right)}{\partial x_i} + a_0^*(x)\,\varphi(x) = 0$$

et les conditions :

$$\varphi^+(y) = \omega^{*-}(y) \qquad y \in S \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial n_y^+}\right)^+ - \sum_{i=1}^{n} a_i^*(y) \cos\left(\overrightarrow{n_y^+}, \overrightarrow{y_i}\right)\varphi^+(y) = -\left(\frac{\partial\omega^*(y)}{\partial n_y^-}\right)^- \tag{1.5}$$

où $a_i^*(x)$ est la matrice transposee de $a_i(x)$ et $\omega(x)$ est un vecteur ayant les mêmes propriétés que celles du vecteur $\omega(x)$ dans le problème **A**.

LEMME 1. *Soient $f(x)$ un vecteur de m composantes de $L_p(\Omega)$, Ω un domaine borné de E_n et*

$$\varphi(x) = \int_\Omega \frac{A(x,y)}{r_{xy}^\lambda} f(y)\, dy \qquad 1 < \lambda < n$$

où $A(x, y) = \| A_{ij} \|$ est une matrice de $m \times m$ éléments bornés et mesurables, satisfaisant à la condition :

$$r_{x'y}^\lambda \left| A_{ij}(x',y) - A_{ij}(x'',y) \right| \leqslant const\, | x' - x'' |^\alpha \qquad 0 < \alpha \leqslant 1 \tag{1.6}$$

uniformément par rapport à $y \in \Omega$.

Alors, avec $p > \dfrac{n}{n-2\lambda+\alpha}$, le vecteur $\varphi(x) = \| \varphi_i \|$ $i = \overline{1,n}$ est continu au sens de Holder dans $\overline{\Omega}$:

$$| \varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2) \| \leqslant const\, | x_1 - x_2 |^\mu \text{ dans lequel}$$

$$\mu = \begin{cases} \alpha & \text{avec} \quad p > \dfrac{n}{n-2\lambda} \\ \alpha - \varepsilon & \text{avec} \quad p = \dfrac{n}{n-2\lambda} \\ & \text{et } \varepsilon \text{ — un nombre positif arbitrairement petit} \\ \alpha + n - 2\lambda - \dfrac{n}{p} & \text{avec} \quad \dfrac{n}{n-2\lambda+\alpha} < p < \dfrac{n}{n-2\lambda} \end{cases}$$

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$. Nous avons :

$$| \varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2) | \leqslant \sum_{j=i}^m \int_\Omega \left| \frac{A_{ij}(x_1, y)}{r_{x_1 y}^\lambda} - \frac{A_{ij}(x_2, y)}{r_{x_2 y}^\lambda} \right| f_j(y) | \, dy =$$

$$= \sum_{j=1}^m \int_\Omega \frac{| A_{ij}(x_1, y)\, r_{x_2 y}^\lambda - A_{ij}(x_2, y)\, r_{x_1 y}^\lambda |}{r_{x_1 y}^\lambda\, r_{x_2 y}^\lambda} | f_j(y) |\, dy \tag{1.7}$$

De l' identité :

$$r_{x_1 y}^\lambda - r_{x_2 y}^\lambda = r_{x_1 y}^\lambda \left[1 - \left(\frac{r_{x_2 y}}{r_{x_1 y}} \right)^\lambda \right] = r_{x_1 y}^\lambda \left[1 - \left(1 + \frac{r_{x_2 y} - r_{x_1 y}}{r_{x_1 y}} \right)^\lambda \right]$$

On voit aisément lorsque $r_{x_1 y} - r_{x_2 y} \to 0$, que

$$\left| r^{\lambda}_{x_1 y} - r^{\lambda}_{x_2 y} \right| \sim \lambda\, r^{\lambda-1}_{x_1 y} \left| r_{x_1 y} - r_{x_2 y} \right|$$

Par conséquent, en tenant compte que $\lambda > 1$ et que Ω est borné :

$$| r^{\lambda}_{x_1 y} - r^{\lambda}_{x_2 y} | \leqslant \text{const} \, | r_{x_1 y} - r_{x_2 y} | \leqslant \text{const} \, | x_1 - x_2 | , \ \forall\, y \in \Omega \quad (1.8)$$

On tire de (1.6) et (1.8) :

$$| A_{ij}(x_1, y)\, r^{\lambda}_{x_2 y} - A_{ij}(x_2, y)\, r^{\lambda}_{x_1 y} | \leqslant r^{\lambda}_{x_2 y} \, | A_{ij}(x_1, y) - A_{ij}(x_2, y) | +$$

$$+ | A_{ij}(x_2, y) \| r^{\lambda}_{x_2 y} - r^{\lambda}_{x_1 y} | \leqslant \text{const} \, | x_1 - x_2 |^{\alpha} + \text{const} \, | x_1 - x_2 | \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \, | x_1 - x_2 |^{\alpha}$$

D'où :

$$| \varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2) | \leqslant \text{const} \, | x_1 - x_2 |^{\alpha} \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega} \frac{1}{r^{\lambda}_{x_1 y} \; r^{\lambda}_{x_2 y}} | f_j(y) | \, dy \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \, | x_1 - x_2 |^{\alpha} \, \| f \|_{L_p(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \frac{dy}{r^{\lambda p'}_{x_1 y} \; r^{\lambda p'}_{x_2 y}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Ici
$$\| f \|_{L_p(\Omega)} = \sum_{j=1}^{m} \| f_j \|_{L_p(\Omega)}$$

et f_i , $i = 1, \dots m$ sont les composantes du vecteur f. Par hypothèse $p > \dfrac{n}{n - 2\lambda + \alpha}$, $\lambda - \alpha > 0$ nous avons $p > \dfrac{n}{n - \lambda}$ et par suite $\lambda p' < n \quad \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1 \right)$.

De l'inégalité

$$\int_{\Omega} \frac{dy}{r^{\lambda p'}_{x_1 y} \; r^{\lambda p'}_{x_2 y}} \leqslant \begin{cases} \text{const pour } 2\lambda p' < n \left(\text{ou } p > \dfrac{n}{n - 2\lambda} \right) \\ \text{const} \, | \log | x_1 - x_2 | + \text{const} | \text{ pour } 2\lambda p' = n \left(\text{ou } p = \dfrac{n}{n - 2\lambda} \right) \\ \dfrac{\text{const}}{| x_1 - x_2 |^{2\lambda p' - n}} \text{ pour } 2\lambda p' > n \left(\text{ou } p < \dfrac{n}{n - 2\lambda} \right) \end{cases}$$

on conclut :

$$|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)| \leqslant \begin{cases} \text{const}\,|x_1-x_2|^{\alpha}, & \text{pour} \quad p > \dfrac{n}{n-2\lambda} \\ \text{const}\,|x_1-x_2|^{\alpha-\varepsilon} & \text{pour} \quad p = \dfrac{n}{n-2\lambda} \\ \text{const}\,|x_1-x_2|^{\alpha+n-2\lambda-\frac{n}{p}} & \text{pour} \quad \dfrac{n}{n-2\lambda+\alpha} < p < \dfrac{n}{n-2\lambda} \end{cases}$$

Le lemme est démontré.

Conséquence. Le lemme est valable dans les cas suivants :

a) $A(x,y)$ est une matrice dont les éléments sont continus par rapport à x au sens de Holder, uniformément par rapport à y.

b) $A(x,y) = A_1(y)$ ou $A(x,y) = r_{xy}\, A_1(y)$ où $A_1(y)$ est une matrice aux éléments bornés et mesurables.

c) $A(x,y) = \dfrac{\partial r_{xy}}{\partial y_k}\, A_2(y)$ ou $A(x,y) = \dfrac{\partial r_{xy}}{\partial x_k}\, A_2(y)$ où $A_2(y)$ est une matrice aux éléments bornés et mesurables.

Le lemme est évident dans les deux premiers cas. Il suffit, dans le dernier, de vérifier la condition (1.6).

On a ;

$$\frac{\partial r}{\partial y_k} = \frac{y_k - x_k}{r}.$$

Alors

$$r^{\lambda}_{x''y}\left| A_{ij}(x',y) - A_{ij}(x'',y)\right| \leqslant r^{\lambda}_{x''y}\left|\frac{y_k - x'_k}{r_{x'y}} - \frac{y_k - x''_k)}{r_{x''y}}\right|\left| A_{2ij}(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\ r^{\lambda}_{x''y}\left|\frac{r_{x''y}(y_k - x'_k) - r_{x'y}(y_k - x''_k)}{r_{x'y}\ r_{x''y}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\ r^{\lambda-1}_{x''y}\ \frac{r_{x'y}\left|(y_k - x''_k) - (y - x'_k) + \left| y_k - x'_k\right|\right| \left| r_{x'y} - r_{x''y}\right|}{r_{x'y}} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\left| x''_k - x'_k\right| + \text{const}\ \frac{\left| y_k - x'_k\right|}{r_{x'y}}\left| r_{x'y} - r_{x''y}\right| \leqslant \text{const}\left| x' - x''\right|$$

LEMME 2. Soit $A(x,y)$ une matrice et λ, α des nombres réels du Lemme 1, $F(x)$ un vecteur continu ou continu au sens de Holder dans $\Omega + S$. Alors, toute solution de l'équation :

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \frac{A(x,y)}{r^{\lambda}}\ \varphi(y)\,dy + F(x) \tag{1.9}$$

appartenant à $L_p(\Omega)$, $p > 1$, est respectivement continu ou continu au sens de Holder dans $\Omega + S$.

Démonstration. En effet, si $p > \frac{n}{n-2\lambda+\alpha}$ la validité du lemme se déduit du Lemme 1.

Soit $p \leqslant \frac{n}{n-2\lambda+\alpha}$. Puisque Ω est borné, on peut supposer que

$$p < \frac{n}{n-\lambda}, \text{ c. a. d. } \lambda p' > n.$$

D'après la propriété bien connue de l'intégrale du type de potentiel [6], on conclut que $\varphi(x) \in L_{p_1}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p_1} < \frac{1}{p} - \frac{n-\lambda}{n}$

Si $\lambda p'_1 < n$, l'inégalité:

$$|\varphi_j(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{|A_{ji}(x, y)|}{r_{xy}^{\lambda}} |\varphi_i(y)|\, dy \leqslant \text{const} \sum_{i=1}^{m} \int_\Omega \frac{|\varphi_i(y)|}{r_{xy}^{\lambda}}\, dy$$

montre que $\varphi(x)$ est un vecteur borné et par suite appartient à $L_q(\Omega)$ pour tout q. En vertu du Lemme 1, le lemme est donc démontré dans ce cas.

Si $\lambda p'_1 = n$, on peut diminuer p_1, ou ce qui est équivalent, majorer p'_1 pour mener au cas où $\lambda p'_1 > n$. Si $\lambda p_1 > n$, en continuant le raisonnement cité, on trouve:

$$\varphi(x) \in L_{p_2}(\Omega), \frac{1}{p_2} < \frac{1}{p_1} - \frac{n-\lambda}{n} < \frac{1}{p} - 2\frac{(n-\lambda)}{n}$$

et ensuite

$$\varphi(x) \in L_{p_k}(\Omega), \frac{1}{p_k} < \frac{1}{p} - k\frac{(n-p)}{n}.$$

Pour k assez grand, à savoir:

$$k > \frac{n}{n-\lambda}\left[\frac{1}{p} - \frac{n-2\lambda}{n}\right]$$

on a

$$p_k > \frac{n}{n-2\lambda}$$

Encore du Lemme 1, on conclut que $\varphi(x)$ est continu ou continu au sens de Holder dans $\Omega + S$ si $F(x)$ l'est.

LEMME 3. Soient $A_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$ des matrices aux éléments bornés et mesurables, $F(x)$ un vecteur continûment différentiable dans $\Omega + S$. Alors toute solution de l'équation intégrodifférentielle

$$\varphi(x) = \int_\Omega \frac{1}{r_{xy}^{\lambda}} \left[A_0(y)\,\varphi(y) + \sum_{i=1}^{n} A_i(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right] dy + F(x) \tag{1.10}$$

$$0 < \lambda < n - 1$$

appartenant à $W_p^1(\Omega)$, $p > 1$, est continûment différentiable dans $\Omega + S$.

Démonstration. On peut dériver au sens de Sobolev le second membre de l'égalité (1.10) [11]. Après dérivation, on obtient

$$\psi(x) = \int_\Omega \frac{1}{r_{xy}^{\lambda+1}} K(x, y)\,\psi(y)\,dy + G(x) \tag{1.11}$$

avec

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad G(x) = \begin{pmatrix} F(x) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} rA_0(y) & rA_1(y) & \dots\dots & rA_n(y) \\ -\lambda A_0(y) \dfrac{\partial r}{\partial x_1} & -\lambda A_1(y) \dfrac{\partial r}{\partial x_1} & \dots\dots & -\lambda A_n(y) \dfrac{\partial r}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda A_0(y) \dfrac{\partial r}{\partial x_n} & -\lambda A_1(y) \dfrac{\partial r}{\partial x_n} & \dots\dots & -\lambda A_n(y) \dfrac{\partial r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

En tenant compte du conséquence du Lemme 1, on voit aisément que l'équation (1.11) appartient à la classe de l'équation (1.9). Par suite, la continuité dans $\Omega + S$ du vecteur $G(x)$ entraîne celle du vecteur $\psi(x)$, et cela signifie que $\varphi(x)$ est continûment différentiable dans $\Omega + S$. On a le :

THÉORÈME. *Soit donné le système :*

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x) u = 0 \tag{1.1}$$

où $a_i(x)$ sont des matrices carrées aux éléments bornés et mesurables. Les vecteurs inconnus $u(x)$ sont cherchés dans $W_q^2(\Omega)$ avec $p > n \geqslant 3$.

(1) — *Les solutions de l'équation intégrodifférentielle :*

$$u(x) - \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_\Omega \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i} + a_0(y) u(y) \right] dy = 0 \tag{1.12$_0$}$$

coincident avec celles du problème A. L'espace de ces solutions est de dimension finie, soit

$$\mathscr{E}_r = \{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_r(x)\}$$

(2) — À côté de l'équation $(1.12)_0$, on considère l'équation intégrodifférentielle.

$$\varphi(x) - \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} a_i^*(y) + \frac{a_0(y)}{r_{xy}^{n-2}} \right] \varphi(y)\, dy = 0 \qquad (1.13)_0$$

où $a_i^*(x)$ est la matrice transposée de $a_i(x)$. Le nombre des solutions linéairement indépendantes de l'équation $(1.13)_0$ est exactement égal à celui de l'équation $(1.12)_0$. Soit $\mathscr{E}_r^* = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_r(x)\}$ l'espace des solutions de $(1.13)_0$. Lorsque tous les éléments des matrices $a_i(x)$ ont les dérivées généralisées du premier ordre, aussi bornées et mesurables, l'espace $\mathscr{E}_r^*$ coincide avec celui du problème A^*.

(3) — Soit $\mathscr{U}$ l'espace des solutions du système (1.1) et $\mathscr{U}^*$ l'ensemble des solutions de (1.1), orthogonales sur Ω de $\mathscr{E}_r$, à savoir

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}^* \oplus \mathscr{E}_r$$

Désignons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des vecteurs harmoniques $\Phi(x) \in C^1(\Omega + S)$ vérifiant les conditions :

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_k(x) \left[a_0(x)\, \Phi(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right] dx = 0 \qquad (1.14)$$

$$k = 1, \ldots, h.$$

Alors, ils existent des matrices carrées $H_0(x, y)$, $H_i(x, y)$ $i = 1, \ldots, n$ telles qu' il y a une correspondance biunivoque entre les éléments $\Phi(x) \in \mathfrak{F}$ et $u(x) \in \mathscr{U}^*$, s'exprimant par les formules

$$u^*(x) = \Phi(x) + \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} H_i(x,y) \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + H_0(x, y)\, \Phi(y) \right] dy$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{(n-2|S_1|} \int\limits_{\Omega} \left[u^*(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right) - \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \frac{\partial u^*(y)}{\partial n_y^+} \right] ds_y \qquad (1.15)$$

Autrement dit, toute solution du système (1.1) a une représentation intégrale en fonction de $\Phi(x) \in \mathscr{G}$:

$$u(x) = \Phi(x) + \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} H_i(x,y) \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + H_0(x,y)\Phi(y) \right] dy + \sum_{k=1}^{r} d_k u_k(x) \quad (1.16)$$

où $u_k(x)$, $k = 1, \ldots, r$ sont les solutions linéairement indépendantes du problème A et d_k sont les constantes arbitraires.

(4) — *Dans le cas du plan, c'est à dire $n = 2$, les conclusions citées plus haut du théorème restent valables si l'on remplace*

$$\frac{1}{(n-2)|S_1|} \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \quad \text{par} \quad \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{xy}}$$

Remarque. La formule (1.16) donne la structure des solutions du système (1.1).

Démonstration du théorème. 1) Puisque les solutions de (1.1) appartiennent à $W_p^2(\Omega)$, $p > n$, d'après les théorèmes d'immersion de Sobolev, $u(x) \in C^1(\Omega + S)$. Par suite, on a la représentation intégrale :

$$\frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_S \left[u(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right) - \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+} \right] dS_y -$$

$$- \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_\Omega \frac{\Delta u(y)}{r_{xy}^{n-2}} dy = \begin{cases} u(x) \text{ pour } x \in \Omega \\ 0 \quad \text{pour } x \in \Omega^- \end{cases} \quad (1.17)$$

où Δ est le laplacien au sens généralisé. Cette relation peut s'écrire, à l'aide de (1.1), sous la forme d'un système intégrodifférentielle :

$$u(x) - \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_\Omega \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i} + a_0(y) u(y) \right] dy = \Phi(x)$$

où (1.18)

$$\Phi(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_S \left[u(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right) - \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+} \right] dS_y$$

est un vecteur harmonique dans Ω. $\Phi(x) \in C^1(\Omega + S)$ puisque l'intégrale du premier membre de (1.18) étant un potentiel newtonien de densité dans $L_p(\Omega)$, $p > n$, appartient à $C^1(E_n)$.

Les solutions de (1.1) vérifient donc l'équation (1.18). En revanche, si l'équation (1.18) est résoluble, en appliquant sur ses deux membres l'opérateur Δ généralisé, on trouve (1.1). Les équations (1.1) et (1.18) sont donc équivalentes.

L'équation (1.18) peut s'écrire :

$$u - \sum_{i=0}^{n} A_i \, T_i \, u = \Phi \tag{1.19}$$

où A_i sont des opérateurs intégraux :

$$A_i \, \mu = - \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_{\Omega} \frac{a_i(y)}{r_{xy}^{n-2}} \, \mu(y) \, d(y)$$

$$i = 0, 1, \ldots, n$$

et T_i sont des opérateurs différentiels :

$$T_0 \, u = u, \quad T_i \, u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Comme il a été démontré dans [11] les produits $T_i \; A_j$

$$T_i \; A_j \; \mu = - \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right) a_i(y) \; \mu(y) \, dy$$

sont complètement continus de $L_p(\Omega)$ dans $L_p(\Omega)$. Par conséquent l'équation (1.19) appartient à la classe des équations étudiées dans [11]. Par suite, l'équation homogène :

$$u(x) - \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_{\Omega} \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i} + a_0(y) \, u(y) \right] dy = 0$$

a un nombre fini des solutions linéairement indépendantes, à savoir $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_r(x)$. Ces solutions satisfont au système (1. 1) et pour eux on a les égalités :

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_{\Omega} \left[u_k(y) \, \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right) - \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \, \frac{\partial u_k(y)}{\partial n_y^+} \right] dS_y = 0$$

$$\forall x \in \Omega, \quad k = 1, \ldots, r \tag{1. 20}$$

Comme il a été connu [11], les relations (1.20) équivalent à l'existence des vecteurs $\omega_k(x)$, $k = 1, \ldots, r$, harmoniques dans $\Omega-$, réguliers à l'infini, qui sont avec toutes ses dérivées du premier ordre, continûment prolongeables jusqu'à S, et tels que :

$$\left.\begin{aligned} u_k^+(y) &= \omega_k^-(y) \\ \left(\frac{\partial u_k(y)}{\partial n_y^+}\right)^+ &= -\left(\frac{\partial \omega_k(y)}{\partial n_y^-}\right)^- \end{aligned}\right\} \forall y \in S \tag{1.21}$$

$$k = 1,2,\ldots, r$$

Les solutions de l'équation $(1.12)_0$ coincident donc avec celles du problème A. La première partie du théorème est donc démontrée.

(2) Considérons les vecteurs $v_0(x)$, $v(x)$, ..., $v_n(x)$ de m composantes et le vecteur

$$V(x) = \begin{pmatrix} v_0(x) \\ v_1(x) \\ , \\ , \\ , \\ , \\ v_n(x) \end{pmatrix}$$

qui vérifie l'équation de Riesz-Schauder :

$$V + B^*V = 0 \tag{1.22}$$

Ici, B^* est la matrice des opérateurs, définie par la formule :

$$B^*V = \int_\Omega \begin{pmatrix} a_0^*(x)\dfrac{1}{r_{xy}^{n-2}} & a_0^*(x)\dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{1}{r_{xy}^{n-2}}\right) & \ldots & a_0^*(x)\dfrac{\partial}{\partial y_n}\left(\dfrac{1}{r_{xy}^{n-2}}\right) \\ a_1^*(x)\dfrac{1}{r_{xy}^{n-2}} & a_1^*(x)\dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{1}{r_{xy}^{n-2}}\right) & \ldots & a_1^*(x)\dfrac{\partial}{\partial y_n}\left(\dfrac{1}{r_{xy}^{n-2}}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^*(x)\dfrac{1}{r_{xy}^{n-2}} & a_n^*(x)\dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{1}{r_{xy}^{n-2}}\right) & \ldots & a_n^*(x)\dfrac{\partial}{\partial y_n}\left(\dfrac{1}{r_{xy}^{n-2}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0(y) \\ v_1(y) \\ \vdots \\ v_n(y) \end{pmatrix} dy$$

Comme l'on sait [11], les **équations** $(1.12)_0$ et (1.22) ont un même nombre des solutions linéairement **indépendantes, à** savoir r. Soient $\{V^{(1)}(x), V^{(2)}(x), \ldots, V^{(r)}(x)\}$ les solutions indépendantes de (1.22).

L'équation (1.22) s'écrit explicitement sous la forme :

$$v_i(x) - \frac{a_i^*(x)}{(n-2)|s_1|}\int_\Omega \left[\frac{1}{r^{n-2}} v_0(y) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}}\right) v_j(y)\right] dy = 0 \tag{1.23}$$

$$i = 0,1,\ldots, n$$

Par suite, il existe un vecteur $\varphi(\mathbf{x})$ tel, que:

$$v_i(x) = a_i^*(x)\,\varphi(x),\ i = 0,\dots,n \tag{1.24}$$

Sil' on désigne par $\psi(x)$ la solution générale du sytème

$$a_i^*(x)\,\psi(x) = 0, \qquad i = 0,\dots,n \tag{1,25}$$

on voit aisément que le vecteur $\varphi(x)$ dans (1.24) satisfait à l'équation:

$$\varphi(x) - \frac{1}{(n-2)|S_1|}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{a_0^*(y)}{r_{xy}^{n-2}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}}\right)a_i^*(y)\right]\varphi(y)\,dy = \psi(x) \tag{1.26}$$

Grâce à (1.25) on trouve facilement que le même vecteur $\psi(x)$ est une solution particulière (1.26) de sorte que la solution générale de cette équation prend la forme:

$$\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{p} c_k\varphi_k(x) \tag{1.27}$$

Ici, $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1,\dots,p$ forment un système complet des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène

$$\varphi(x) - \frac{1}{(n-2)|S_1|}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{a_0^*(y)}{r_{xy}^{n-2}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}}\right)a_i^*(y)\right]\varphi(y)\,dy = 0 \tag{1.26$_0$}$$

Démonstrons que $p = r$. En effet, on fait correspondre aux solutions $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1,\dots,p$ de l'équation $(1.26)_0$ les vecteurs:

$$v_k(x) = \begin{pmatrix} v_0^{(k)}(x) \\ v_1^{(k)}(x) \\ , \\ , \\ , \\ v_n^{(k)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^*(x)\,\varphi_k(x) \\ a_1^*(x)\,\varphi_k(x) \\ , \\ , \\ , \\ a_n^*(x)\,\varphi_k(x) \end{pmatrix}$$

$$k = 1,\dots,p$$

Il est évident, que $\left\{v_i^{(k)}(x)\right\}$ sont solutions de (1.23). Les vecteurs $\left\{V_k(x)\right\}$, $k = 1,\dots,p$ ainsi construits sont linéairement indépendantes, car la relation:

$$\sum_{k=1}^{p} c_k V_k(x) \equiv 0$$

entraîne l'égalité

$$a_i^*(x)\sum_{k=1}^{p} c_k\varphi_k(x) \equiv 0,\ i = 0, 1,\dots,n \tag{1.28}$$

En tenant compte de ce que $\sum_{k=1}^{p} c_k \varphi_k(x)$ est solution de $(1.26)_0$ on tire des égalités $(1.26)_0$ et (1.28):

$$\sum_{k=1}^{p} c_k \varphi_k(x) \equiv 0$$

D'où

$$c_k = 0\ ,\ k = 1,\dots,\ p$$

Donc

$$p \leqslant r \tag{1.29}$$

Réciproquement, si l'on fait correspondre aux solutions $\left\{ V_k(x) \right\}$ $k = 1,\dots,\ r$ de l'équation (1.22) (ou (1.23)) les vecteurs $\left\{ \varphi_k(x) \right\}$ par la formule:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_\Omega \left[\frac{1}{r_{xy}^{n-2}}\ v_0^{(k)}(y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right) v_i^{(k)}(y) \right] dy\ .$$

à l'aide de (1.23) on conclut que $\left\{ \varphi_k(x) \right\}$ sont solutions de $(1.26)_0$. Ces $\left\{ \varphi_k(x) \right\}$ sont linéairement indépendantes parce que l'égalité

$$\sum_{k=1}^{r} c_k \varphi_k(x) \equiv 0$$

donne comme conséquence la suivante :

$$\sum_{k-1}^{r} c_k V_k(x) \equiv 0$$

Donc

$$c_k = 0,\ k = 1,\dots,\ r$$

et par suite

$$r \leqslant p \tag{1.30}$$

(1.29) et (1.30) nous donnent

$$p = r$$

Supposons maintenant que $a_i(x)$ et toutes ses dérivées généralisées du premier ordre sont des matrices aux éléments bornés et mesurables. Alors les solutions de $(1.26)_0$ coincident avec celles du problème A*. En effet, l'équation $(1.26)_0$ appartient à la classe des équations (1.9) avec $F(x) = 0$. $\lambda = n - 1$. Par conséquent, du Lemme 2 on voit que $\varphi(x)$ est un vecteur continu au sens de Holder dans $\overline{\Omega}$. D'ailleurs, des hypothèses imposées, on déduit que $a_i(x) \in W_p^1(\Omega)$

pour $p > 0$ arbitraire. Les théorèmes d'immersion [7] nous donnent alors la continuité au sens de Holder dans $\overline{\Omega}$ des matrices $a_i\ (x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$

Écrivons $(1.26)_0$ sous la forme :

$$\varphi(x) - \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_{\Omega} \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \left[\left(a_0^*(y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i^*(y)}{\partial y_i} \right) \varphi(y) - \sum_{i=1}^{n} a_i^*(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right] dy =$$

$$= -\frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_S \sum_{i=1}^{n} a_i^*(y)\, \varphi(y) \cos\left(\vec{n}_y^{\,+}, \vec{y}_i\right) \frac{1}{r_{xy}^{n-2}}\, dS_y \tag{1.31}$$

Le second membre de cette égalité est le potentiel du simple couche de densité holdérienne (S est la surface de Liapounov). Par suite, il est continûment différentiable dans $\overline{\Omega}$ [8] et alors du Lemme 3 on déduit que $\varphi\ (x)$ est un vecteur continûment différentiable dans $\overline{\Omega}$

Des résultats démontrés dans la première partie du théorème, on tire l'équivalence de l'égalité (1.31) et des suivantes :

$$\Delta\varphi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \Big(a_i^*(x)\ \varphi\ (x) \Big) + a_0^*(x)\ \varphi\ (x) = 0 \tag{1.1*}$$

$$\frac{1}{(n-2)[_1S]} \int_S \left[\varphi\ (y)\ \frac{\partial}{\partial n^+} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_y^+} - \sum_{i=1}^{n} a_i^*\ (y)\ \cos\left(\vec{n}_y^{\,+}, \vec{y}_i\right) \varphi\ (y) \right) \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right] dS_y \equiv 0$$

$$\forall\ x \in \Omega \tag{1.32}$$

Comme l'on sait [12], l'égalité (1.32) équivaut à l'existence du vecteur $\omega^*\ (x)$, harmonique dans Ω^*, régulier à l'infini, continûment prolongeable jusqu'à S avec toutes ses dérivées du premier ordre, tel que :

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^+(y) = \omega^{*-}(y) \\ &\left(\frac{\partial \varphi(y)}{\partial n_y^+} \right)^+ - \sum_{i=1}^{n} a_i^*(y) \cos\left(\vec{n}_y^{\,+}, \vec{y}_i\right) \varphi^+(y) = -\left(\frac{\partial \omega^*(y)}{\partial n_y^-} \right)^- \end{aligned}\right\} \quad y \in S \tag{1.33}$$

Cela signifie que $\varphi(x)$ coincide avec la solution du problème A*. La deuxième partie du théorème est démontrée.

3) — On a déjà remarqué l'équation (1.1) équivaut à l'équation intégrodifférentielle (1.18). Mais la dernière est résoluble si et seulement si [11]:

$$\int_{\Omega} \left[\Phi(x)v_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_j} v_j(x) \right] dx = 0 \tag{1.34}$$

où $v_0(x)$, $v_1(x),\ldots, v_n(x)$ est une solution quelconque de (1.23). Dans (1.34), comme dans la suite, le produit $\varphi.\psi$ des deux vecteurs $\varphi = (\varphi_l ,\ldots, \varphi_m),\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_m)$ désigne la quantité :

$$\varphi\psi = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \psi_i$$

Utilisant (1.25), on peut donner (1.34) la forme :

$$\int_{\Omega} \left[\Phi(x)a_0^*(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} a_j^*(x)\right]\varphi(x)dx = 0 \tag{1.35}$$

où $\varphi(x)$ est une solution quelconque de l'équation non homogène (1.26). On peut simplifier (1.35) sous la forme :

$$\int_{\Omega} \left[\Phi(x)a_0^*(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} a_j^*(x)\right]\varphi_k(x)dx = 0 \tag{1.36}$$

$$k = 1,\ldots,r$$

puisqu'on a les égalités (1.27) et (1.25). Les conditions (1.36) ont la forme équivalente :

$$\int_{\Omega} \varphi_k(x)\left[a_0(x)\Phi(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right] dx = 0 \tag{1.14}$$

$$k = 1,\ldots,r$$

Supposons maintenant que les conditions de résolubilité (1.14) de l'équation (1.18) soient satisfaites. Alors, ils existent des matrices résolvantes généralisées $\Gamma_0(x,y)$, $\Gamma_1(x,y),\ldots, \Gamma_n(x,y)$ telles que la solution générale de (1.18) (ou de (1.1)) peut s'écrire :

$$u(x)=\Phi(x) + \int_{\Omega} \left[\Gamma_0(x,y)\Phi(y) + \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i(x,y) \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right]dy + \sum_{j=1}^{n} c_j n_j(x) \tag{1.37}$$

On peut toujours considérer les solutions $\{u_j(x)\}$, $j = 1,\dots,r$ orthonormées dans le sens :

$$\int_\Omega u_i(x) u_j(x)\, dx = \delta_{ij} \; , \; i,j = 1,\dots,r$$

Il est facile de voir que parmi les solutions (1.37), il existe une seule solution $u^*(x)$, orthogonale à tous les $\{u_j(x)\}$, $j = 1,\dots,r$, s'exprimant par la formule (1.37) avec les coefficients suivants :

$$C_j = -\int_\Omega \left[\left(u_i(y) + \int_\Omega u_j(z)\Gamma_0(z,y)dz\right)\Phi(y) + \sum_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega u_j(z)\Gamma_k(z,y)dz \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \right] dy.$$

$$j = 1,\dots,r$$

Par conséquent, la solution générale de (1.18) (ou de (1.1)) prend la forme

$$u(x) = u^*(x) - \sum_{k=1}^{r} d_k u_k(x)$$

où d_k sont des constantes arbitraires et

$$u^*(x) = \Phi(x) + \int_\Omega \left[H_0(x,y)\,\Phi(y) + \sum_{i=1}^{n} H_i(x,y) \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right] dy$$

avec

$$H_0(x,y) = \Gamma_0(x,y) - \sum_{j=1}^{r} u_j(x) \left[u_j(y) + \int_\Omega u_j(x)\,\Gamma_0(x,y)\,dz \right]$$

$$H_i(x,y) = \Gamma_i(x,y) - \sum_{j=1}^{r} u_j(x) \int_\Omega u_j(z)\; \Gamma_i(z,y)\, dz$$

$$i = 1,\dots,n$$

Il est évident, que $\Phi(x)$ s'exprime en fonction de $u^*(x)$ par la formule :

$$\Phi(x) = \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_S \left[u^*(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right) - \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \frac{\partial u^*(y)}{\partial n_y^+} \right] dS_y$$

Soient $\mathfrak{F}$ l'ensemble des vecteurs harmoniques $\Phi(x) \in C^1(\Omega + S)$ vérifiant les conditions (1.14) et $\mathcal{U}^*$ l'ensemble des solutions du système (1.1), orthogonales sur Ω à l'espace $\mathscr{E}_r$. Les raisonnements cités plus haut montrent l'existence d'une correspondance biunivoque entre $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{U}^*$, définie par les formules (1.15).

La troisième partie du théorème est donc démontrée.

(4) — Par un schéma tout à fait analogue on démontre la quatrième partie du théorème. Il suffit de remarquer qu'on utilise au lieu de (1.20) l'égalité :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left[u_k(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\log \frac{1}{r_{xy}} \right) - \log \frac{1}{r_{xy}} \frac{\partial u_k(y)}{\partial n_y^+} \right] ds_y = 0 \qquad (1.20)'$$

ce qui équivaut à l'existence d'un vecteur $\omega_k(x)$, harmonique dans Ω^-, appartenant à la classe $\mathcal{M}$, continûment prolongeable avec toutes ses dérivées du premier ordre jusqu'à Γ et satisfaisant aux conditions [12] :

$$\left.\begin{aligned} u_k^+(y) &= \omega_k^-(y) \\ \left(\frac{\partial u_k(y)}{\partial n_y^+} \right)^+ &= - \left(\frac{\partial \omega_k(y)}{\partial n_y^-} \right)^- \end{aligned}\right\} y \in \Gamma \qquad k = 1,\dots,r$$

Le théorème est parfaitement démontrée.

REMARQUE. (1) — Si la domaine Ω est assez petit, l'équation (1.20) admet seulement la solution triviale [11]. Alors, il existe une correspondance biunivoque entre les vecteurs harmoniques de $C^1(\Omega + S)$ et les solutions du système (1.1) ;

$$u(x) = \Phi(x) + \int_\Omega \left[\Gamma_0(x,y)\,\Phi(y) + \sum_{y=1}^{n} \Gamma_i(x,y) \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right] dy$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_S \left[u(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \right) - \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+} \right] dS_y$$

(2) — La méthode présentée plus haut pour mener la solution du système elliptique à celle de l'équation intégrodifférentielle correspondante peut être utilisée dans l'étude des systèmes d'équations encore plus généraux, par exemple, dans celle du système suivant :

$$\Delta_u^p + \sum_{\Sigma i_j \leqslant 2p-1} a_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0$$

2. EXEMPLES. Pour illustrer les résultats obtenus, nous donnons dans ce paragraphe la solution de l'équation métaharmonique

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \qquad (2.1)$$

dans la sphère Ω de centre O et de rayon R.

Distinguons deux cas : $n \geqslant 3$ et $n = 2$.

Premier cas : $n \geqslant 3$.

L'équation (2.1) est équivalente à l'équation intégrale :

$$u(x) - \frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|} \int_\Omega \frac{1}{r_{xy}^{n-2}}\, u(y)\, dy = \Phi(x) \tag{2.2}$$

où $\Phi(x)$ est une fonction harmonique dans $C^1(\Omega + S)$.

La solution $u(x)$ admet le développement en série uniformément et absolument convergente dans la sphère $r \leqslant r_0 < R$ [3] :

$$u(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \rho^{-q} J_{p+q}(\lambda\rho)\, Y_p(\theta/n) \tag{2.3}$$

où $q = \dfrac{n-2}{2}$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ est le point générique sur la sphère unité, $Y_p(\theta/n)$ sont les fonctions sphériques d'ordre p dans l'espace euclidien E_n, et $J_{p+q}(x)$ sont les fonctions de Bessel d'ordre $p+q$.

Comme l'on sait [3], pour $\rho < \rho_1$, on a :

$$\frac{1}{r_{xy}^{n-2}} = \frac{1}{(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\gamma)^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{1}{\rho_1^{n-2}} \sum_{p=0}^{\infty} P_p(\cos\gamma \mid n) \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \tag{2.4}$$

où

$$P_p(\cos\gamma \mid n) = \sum_{k=0}^{\leqslant \frac{1}{2} n} (-1)^k \frac{\Gamma(p+q-k)}{k\,!\,(p-2k)\,!\,\Gamma(q)} (2\cos\gamma)^{p-2q}$$

$p = 0, 1, 2, \ldots,$

sont les fonctions de Légendre généralisées d'ordre p dans l'espace euclidien E_n

La série (2.4) converge uniformément et absolument dans le domaine $\rho < \rho_1$. Désignons par Ω' (respect. Ω'') le domaine $0 \leqslant \rho < \rho_1$ (respect, $\rho_1 < \rho, < R$). En vertu de (2 . 3) et (2 . 4) nous obtenons pour $\rho_1 < \rho$, $y = (\rho_1, \varphi)$, $x = (\rho, \theta)$:

$$\frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|} \int_\Omega \frac{1}{r_{xy'}^{n-2}}\, u(y) dy = \frac{\lambda^2}{n-2)\,|S_1|} \int_\Omega \frac{1}{\rho^{n-2}} \sum_{p=0}^{\infty} P_p(\cos\gamma \mid n) \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^p \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_1^{\frac{n-2}{2}}} J_{s+q}(\lambda\rho_1)\, Y_s(\varphi \mid n)\, \rho_1^{n-1}\, d\rho_1 dS_1$$

L'orthogonalité sur la sphère unité des fonctions sphériques nous donne:

$$\frac{\lambda^2}{(n-2)\mid S_1\mid}\int\limits_{\Omega'}\frac{1}{r_{xy}^{n-2}}u(y)dy =$$

$$=\frac{\lambda^2}{(n-2)\mid S_1\mid}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^{p+n-2}}\int\limits_0^{\rho}J_{p+q}(\lambda\rho_1)\rho_1^{p+\frac{n}{2}}d\rho_1\int\limits_{S_1}P_p(\cos\gamma\mid n)Y_p\ (\varphi\mid n)dS_1=$$

$$=\frac{\lambda^2}{(n-1)\mid S_1\mid}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{(2p+n-2)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\frac{Y_p\ (\theta\mid n)}{\rho^{p+n-2}}\int\limits_0^{\rho}J_{p+\frac{n}{2}-1}(\lambda\rho_1)\rho_1^{p+\frac{n}{2}}d\rho_1=$$

$$=\lambda^2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+n-2}\frac{Y_p(\theta\mid n)}{\rho^{p+n-2}}\int\limits_0^{\rho}J_{p+\frac{n}{2}-1}\ (\lambda\rho_1)\ \rho_1^{p+\frac{n}{2}}d\rho_1$$

En tenant compte de la relation

$$\frac{d}{dx}(x^{\nu}J_{\nu}(x)) = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

nous avons:

$$\frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Omega'}\frac{1}{r_{xy}^{n-2}}u(y)dy = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda^{1-p-\frac{n}{2}}}{2p+n-2}\frac{Y_p\ (\theta|n)}{\rho^{p+n-2}}(\lambda\rho)^{p+\frac{n}{2}}\ J_{p+\frac{n}{2}}(\lambda\rho)=$$

$$=\lambda\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+n-2)\ \rho^{\frac{n}{2}-2}}Y_p\,(\theta\mid n)\,J_{p+\frac{n}{2}}(\lambda\rho) \qquad (2.5)$$

D'une façon analogue, pour le domaine Ω'' $(\rho<\rho_1<R)$:

$$\frac{\lambda^2}{(n-2)\ S_1}\int\limits_{\Omega''}\frac{1}{r_{xy}^{n-2}}u(y)\,dy =$$

$$=\frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Omega''}\frac{1}{\rho_1^{n-2}}\sum_{p=0}^{\infty}P_p\,(\cos\gamma\,|\,n)\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^p\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{\rho_1^{\frac{n-2}{2}}}J_{s+\frac{n}{2}-1}(\lambda\rho_1)\ Y_s\,(\varphi|n)\ \rho_1^{n-1}\,d\rho_1\,dS_1 =$$

$$= \frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|} \sum_{p=0}^{\infty} \rho^p \int_{\rho}^{R} \frac{1}{\rho_1^{p+\frac{n}{2}-2}} J_{p+\frac{n}{2}-1}(\lambda\rho_1)\, d\rho_1 \int_{S_1} P_p(\cos\gamma\,|n)\, Y_p(\varphi\,n)\, dS_1 =$$

$$= \lambda^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\rho^p}{(2p+n-2)} Y_p(\theta\,|\,n) \int_{\rho}^{R} \frac{1}{\rho_1^{p+\frac{n}{2}-2}} J_{p+\frac{n}{2}-1}(\lambda\rho_1)\, d\rho_1$$

En tenant compte de

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

nous avons :

$$\frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|} \int_{\Omega''} \frac{1}{r_{xg}^{n-2}} u(y)\, dy =$$

$$= \lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\rho^p\, Y_p(\theta|n)}{2p+n-2} \left[\frac{J_{p+\frac{n}{2}-2}(\lambda\rho)}{\rho^{p+\frac{n}{2}-2}} - \frac{J_{p+\frac{n}{2}-2}(\lambda R)}{R^{p+\frac{n}{2}-2}} \right] =$$

$$= \lambda \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{Y_p(\theta\,|\,n)}{2p+n-2} \frac{1}{\rho^{\frac{n}{2}-2}} J_{p+\frac{n}{2}-2}(\lambda\rho) - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\rho^p\, Y_p(\theta|n)}{2p+n-2} \frac{J_{p+\frac{n}{2}-2}(\lambda R)}{R^{p+\frac{n}{2}-2}} \right\} \quad (2.6)$$

On tire de (2.5) et (2.6) :

$$\frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|} \int_{\Omega} \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} u(y)\, dy = \frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|} \left(\int_{\Omega'} + \int_{\Omega''} \right) \frac{1}{r_{xy}^{n-2}} u(y)\, dy =$$

$$= \lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+n-2)} \frac{1}{\rho^{\frac{n}{2}-2}} \left(J_{p+\frac{n}{2}}(\lambda\rho) + J_{p+\frac{n}{2}-2}(\lambda\rho) \right) Y_p(\theta|n) -$$

$$- \lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+n-2)} \frac{J_{p+\frac{n}{2}-2}(\lambda R)}{R^{p+\frac{n}{2}-2}} \rho^p\, Y_p(\theta\,|\,n) -$$

La formule

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

nous donne :

$$\frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|}\int_{\Omega}\frac{1}{r_{xy}^{n-2}}\,u(y)\,dy =$$

$$= \lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+n-2}\,\frac{2(p+\frac{n}{2}-1)}{\rho^{\frac{n}{2}-2}}\,\frac{J_{p+\frac{n}{2}-1}(\lambda\rho)}{\lambda\rho}\,Y_p(\theta|n) -$$

$$- \lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+n-2}\,\frac{J_{p+\frac{n}{2}-2}(\lambda R)}{R^{p+\frac{n}{2}-2}}\,\rho^p\, Y_p\,(\theta|n) =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{\frac{n-2}{2}}}\,J_{p+\frac{n}{2}-1}(\lambda\,\rho)\;Y_p\,(\theta\,|\,n) -$$

$$- \lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+n-2}\,\frac{J_{p+\frac{n}{2}-1}(\lambda R)}{R^{p+\frac{n}{2}-2}}\,\rho^p\;Y_p\;(\theta\,|\,n) \tag{2.7}$$

En vertu de (2.7) et (2.3), l'équation (2.2) **s'écrit :**

$$\lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+n-2}\,\frac{J_{p+\frac{n}{2}-2}(\lambda R)}{R^{p+\frac{n}{2}-2}}\,\rho^p\;Y_p\;(\theta\,|\,n) = \Phi\,(x) \tag{2.8}$$

À chaque solution $u(x)$ de l'équation (2.1), correspond par la formule (2.2) ou (2.8) une seule fonction harmonique $\Phi(x)$. Réciproquement, pour une fonction harmonique $\Phi(x)$ donnée, la solution de l'équation (2.2) est définie par la série (2.3) dans laquelle les fonctions sphériques $Y_p\,(\theta\,|\,n)$ doivent satisfaire à la relation (2.8). Il est à remarquer deux cas possibles :

(a) Le rayon R du domaine Ω vérifie l'inégalité :

$$J_{p+\frac{n}{2}-2}(\lambda R) \neq 0 \text{ pour tout } p = 0,\,1,\,2,\ldots.$$

L'égalité (2.8) et le développement de $\Phi\,(x)$ en polynômes harmoniques :

$$\Phi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \rho^p\;\tilde{Y}_p(\theta\,|\,n) \tag{2.9}$$

nous montrent que les fonctions sphériques $Y_p\,(\theta|n)$ sont parfaitement déterminées et conséquemment la solution de l'équation (2.2) est trouvée d'une façon unique. Les conditions (1.34) sont alors triviales.

(b) Il existe un entier positif s tel que:

$$J_{s+\frac{n}{2}-2}(\lambda R) = 0$$

La relation (2.8) est satisfaite si et seulement si dans le développement (2.9) on a:

$$\widetilde{Y}_s\ (\theta|n) = 0$$

Cependant, dans ce cas, comme l'on sait, en vertu de l'orthogonalité des fonctions sphériques:

$$\int_\Omega \Phi\ (x)\, Y_s\ (\theta|n)\ dS_x = 0 \tag{2.10}$$

Ces dernières, équivalentes à (1.34) sont nécessaires et suffisantes pour que l'équation (2.2) soit résoluble.

Alors, tous les $Y_p\ (\theta|n)$ où $p \neq s$ sont parfaitement définies par l'égalité (2.8), quant à $Y_s\ (\theta|n)$, elle peut être choisie comme une combinaison linéaire quelconque de

$$k_s = \frac{(s+n-2)!}{(n-2)!}\left(1 + \frac{s}{s+n-2}\right)$$

fonctions sphériques fondamentales d'ordre s.

Autrement dit, pour la telle valeur de s, nous avons k_s solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène:

$$u(x) - \frac{\lambda^2}{(n-2)\,|S_1|}\int_\Omega \frac{1}{r_{xy}^{n-2}}\, u(y)\, dy = 0 \tag{2.2$_0$}$$

Si n est impair ou si n est pair avec la conjecture de Bourget [10], l'équation (2.2)$_0$ a justement ces k_s solutions linéairement indépendantes, à savoir $u_1(x)$, $u_2\ (x)$,...., $u_{k_s}(x)$. Alors nous pouvons choisir:

$$u_i\ (x) = u_i\ (\rho,\theta) = \frac{1}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} J_{s+\frac{n}{2}-1}\ (\lambda\rho)\ \ Y_s^{(i)}\ (\theta|n),\ \ i = \overline{1,k_s} \tag{2.11}$$

où $Y_s^{(i)}\ (\theta\,|\,n)$ sont les fonctions sphériques fondamentales d'ordre s. En outre:

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial n} = -\frac{du_i(x)}{d\rho} = \left[\frac{n-2}{2}\frac{1}{\rho^{\frac{n}{2}}} J_{s+\frac{n}{2}-1}(\lambda\rho) - \lambda\frac{1}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} J'_{s+\frac{n}{2}-1}(\lambda\rho)\right] Y_s^{(i)}(\theta|\ )$$

D'où, en tenant compte de la formule:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu J\,(x)}{x}$$

nous obtenons:

$$\left.\frac{\partial u^{(i)}(x)}{\partial n}\right|_{\rho=R}=\left[\frac{n-2}{2}\,\frac{1}{R^{\frac{n}{2}}}J_{s+\frac{n}{2}-1}(\lambda R)-\frac{\lambda}{R^{\frac{n}{2}-\frac{2}{2}}}\left(J_{s+\frac{n}{2}-2}(\lambda R)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(s+\frac{n}{2}-1)\,J_{s+\frac{n}{2}-1}(\lambda R)}{\lambda R}\right)\right]Y_s^{(i)}(\theta\mid n)\;.$$

$$=\frac{1}{R^{\frac{n}{2}}}\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)J_{s+\frac{n}{2}-1}(\lambda R)+\left(s+\frac{n}{2}-1\right)J_{s+\frac{n}{2}-1}(\lambda R)\right]Y_s^{(i)}(\theta\mid n)=$$

$$=\frac{1}{R^{\frac{n}{2}}}(s+n-2)\,J_{s+\frac{n}{2}-1}(\lambda R)\;Y_s^{(i)}(\theta\,|n) \tag{2.12}$$

Posons

$$\omega^{(i)}(\rho,\theta)=R^{s+\frac{n}{2}-1}J_{s+\frac{n}{2}-1}(\lambda R)\,\frac{Y_s^{(i)}(\theta\mid n)}{\rho^{s+n-2}} \tag{2.13}$$

C'est une fonction harmonique dans Ω^-, régulière à l'infini. Il est évident que l'on tire de (2.11), (2.12), (2.13)

$$u^{(i)}(y)\Big|_S=\omega^{(i)}(y)\Big|_S$$

$$\left.\left(\frac{\partial u^{(i)}(y)}{\partial n_y^+}\right)^+\right|_S=-\left.\left(\frac{\partial\omega^{(i)}(y)}{\partial n_y^-}\right)^-\right|_{S,\ i=1,\dots,k_s}$$

Les solutions $u^{(i)}(x)$ de l'équation $(2,2)_0$ sont donc celles du problème A, qui dans notre cas, coincide avec le problème A*. Il est facile de voir que les conditions (2.10) prennent la forme (1.36) où $\varphi_k(x)\equiv u_k(x)$.

Deuxième cas : n = 2.

L'équation (2.1) est équivalente à l'équation intégrale

$$u(x)-\frac{\lambda^2}{2\pi}\iint_\Omega\log\frac{1}{r_{xy}}\,u(y)\,dy=\Phi(x) \tag{2.14}$$

où $\Phi(x)$ est une fonction harmonique de $C^1(\overline{\Omega})$.

La solution $u(x)$ admet le développement en série uniformément et absolument convergente dans le cercle $r\leqslant r_0<R$:

$$u(\rho,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}J_k(\lambda\rho)\,(a_k\cos k\,\theta-b_k\sin k\,\theta) \tag{2.15}$$

Comme l'on sait ([9], 4.7 Ch. IV) nous avons la série uniformément et absolument convergente dans le cercle $\rho < \rho_1$:

$$\log \frac{1}{r_{xy}} = -\frac{1}{2}\log\left(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\theta - \theta_1)\right) =$$

$$= -\log\rho_1 - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - 2\frac{\rho}{\rho_1}\cos(\theta - \theta_1)\right) =$$

$$= -\log\rho_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\theta - \theta_1)}{n}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n$$

de telle sorte, que:

$$-\frac{\lambda^2}{2\pi}\iint_{\Omega} \log\frac{1}{r_{xy}}\, u(y)\, dy =$$

$$= \frac{\lambda^2}{2\pi}\iint_{\Omega'}\left[\log\rho - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta-\theta_1)}{n}\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^n\right] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} J_k(\lambda\rho_1)(a_k\cos k\theta_1 + b_k \sin k\theta_1)\,\rho_1 d\rho_1 d\theta_1 +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2\pi}\iint_{\Omega''}\left[\log\rho_1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta-\theta_1)}{n}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n\right] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} J_k(\lambda\rho_1)\,(a_k\cos k\theta_1 + b_k\sin k\theta_1)\,\rho_1 d\rho_1 d\theta_1.$$

où $\Omega' = \{0 \leqslant \rho_1 < \rho\}$ et $\Omega'' = \{\rho < \rho_1 < R\}$

par suite:

$$-\frac{\lambda^2}{2\pi}\iint_{\Omega}\log\frac{1}{r_{xy}}\, u(y)dy =$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}\left\{ a_0\left(\log\rho\int_0^{\rho} J_0(\lambda\rho_1)\rho_1 d\rho_1 + \int_{\rho}^{R} J_0(\lambda\rho_1)\rho_1 \log\rho_1 d\rho_1\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{1}{\rho^k}\int_0^{\rho} J_k(\lambda\rho_1)\,\rho_1^{k+1} d\rho_1 + \rho^k\int_{\rho}^{R}\frac{J_k(\lambda\rho_1)}{\rho_1^{k-1}}\, d\rho_1\right]\left[a_k\cos k\theta + b_k \sin k\theta\right]\right\}$$

Les formules de récurrence:

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x); \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu-1}(x)}{x^\nu}$$

et l'égalité:

$$\int_a^b xJ_0(x)\log x dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\left(xJ_1(x)\right)\log x dx = xJ_1(x)\log x\Big|_a^b -$$

$$-\int_a^b J_1(x)dx = bJ_1(b)\log b - aJ_1(a)\log a + J_0(b) - J_0(\alpha)\ (a,b>0)$$

nous donne:

$$\log\rho\int_0^\rho J_0(\lambda\rho_1)\rho_1 d\rho_1 = \frac{\log\rho}{\lambda^2}(\lambda\rho)J_1(\lambda\rho)$$

$$\int_\rho^R J_0(\lambda\rho_1)\rho_1\log\rho_1 d\rho_1 = \frac{1}{\lambda^2}\int_\rho^R J_0(\lambda\rho_1)\lambda\rho_1\log(\lambda\rho_1)d(\lambda\rho_1) - \frac{\log\lambda}{\lambda^2}\int_\rho^R J_0(\lambda\rho_1)\lambda\rho_1 d(\lambda\rho_1) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left[\log(\lambda R)\lambda RJ_1(\lambda R) + J_0(\lambda R) - \log(\lambda\rho)\lambda\rho J_1(\lambda\rho) - J_0(\lambda\rho)\right] +$$

$$+ \frac{\log\lambda}{\lambda^2}\left(\lambda\rho J_1(\lambda\rho) - \lambda RJ_1(\lambda R)\right)$$

c'est à dire:

$$2a_0\left[\log\rho\int_0^\rho J_0(\lambda\rho_1)\rho_1 d\rho_1 + \int_\rho^R J_0(\lambda\rho_1)\rho_1\log\rho_1 d\rho_1\right] =$$

$$= 2a_0\left[\frac{1}{\lambda}\log R.\ RJ_1(\lambda R) + \frac{J_0(\lambda R) - J_0(\lambda\rho)}{\lambda^2}\right]$$

En outre:

$$\frac{1}{\rho^k}\int_0^\rho J_k(\lambda\rho_1)\rho_1^{k+1}d\rho_1 = \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{(\lambda\rho)^k}\int_0^\rho J_k(\lambda\rho_1)(\lambda\rho_1)^{k+1}d(\lambda\rho_1) = \frac{1}{\lambda^2}\lambda\rho J_{k+1}(\lambda\rho)$$

$$\rho^k\int_\rho^R \frac{J_k(\lambda\rho_1)}{\rho_1^{k-1}}d\rho_1 = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda\rho_1)^k\int_\rho^R \frac{J_k(\lambda\rho_1)}{(\lambda\rho_1)^{k-1}}d(\lambda\rho_1) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}(\lambda\rho)^k\left[\frac{J_{k-1}(\lambda\rho)}{(\lambda\rho)^{k-1}} - \frac{J_{k-1}(\lambda R)}{(\lambda R)^{k-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}(\lambda\rho)\left[J_{k-1}(\lambda\rho) - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} J_{k-1}(\lambda R)\right]$$

Par conséquent, de la relation

$$J_{v+1}(x) + J_{v-1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x)$$

on tire :

$$\frac{1}{k}\left[\frac{1}{\rho^k}\int_0^\rho J_k(\lambda\rho_1)\rho_1^{k+1} d\rho_1 + \rho^k \int_\rho^R \frac{J_k(\lambda\rho_1)}{\rho_1^{k-1}} d\rho_1 = \frac{1}{k\lambda^2}(\lambda\rho)\left[J_{k+1}(\lambda\rho) + J_{k+1}(\lambda\rho) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} J_{k-1}(\lambda R)\right] = \frac{\rho}{k\lambda}\left[\frac{2k}{k\lambda} J_k(\lambda\rho) - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} J_{k-1}(\lambda R)\right]$$

D'où :

$$-\frac{\lambda^2}{2\pi}\iint_\Omega \log\frac{1}{r_{xy}} u(y)dy = -\left[a_0 J_0(\lambda\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\lambda\rho)\left(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\right)\right] +$$

$$+ a_0[J_0(\lambda R) + \lambda R \log R.J_1(\lambda R)] + \frac{\lambda R}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{k-1}(\lambda R)}{k}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\left(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\right)$$

En définitive

$$u(x) = \frac{\lambda^2}{2\pi}\iint \log\frac{1}{r_{xy}} u(y)dy = a_0[J_0(\lambda R) + \lambda R \log R J_1(\lambda R)] +$$

$$+ \frac{\lambda R}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{k-1}(\lambda R)}{kR_k}\rho^k\left(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\right)$$

de telle sorte, que l'équation (2.14) s'écrive :

$$\Phi(\rho,\theta) = a_0[J_0(\lambda R) + \lambda R \log R J_1(\lambda R)] +$$

$$+ \frac{\lambda R}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{k-1}(\lambda R)}{kR_k}\rho^k\left(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\right) \tag{2.16}$$

Il suit de là que :

À chaque solution $u(x)$ de l'équation métaharmonique (2.1) dans le cercle $|x| \leqslant R$ correspond une fonction harmonique $\Phi(\rho,\theta)$ définie par l'égalité (2.16) où a_k, b_k sont les coefficients dans le développement (2.15) de la solution $u(x)$.

Réciproquement, si $\Phi(x)$ est donnée:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \left(\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta\right)$$

la solution $u(x)$ de l'équation (2.14) est déterminée par la formule (2.15) où a_k, b_k sont définis par les égalités:

$$\begin{aligned} a_0[J_0(\lambda R) + \lambda R \log R J_1(\lambda R)] &= \alpha_0 \\ \frac{\lambda}{2} \frac{J_{k-1}(\lambda R)}{kR^{k-1}} a_k &= \alpha_k \\ \frac{\lambda}{2} \frac{J_{k-1}(\lambda R)}{kR^{k-1}} b_k &= \beta_k \end{aligned} \tag{2.17}$$

Deux cas sont possibles:

a) Le rayon R du cercle vérifie les inégalités:

$$J_0(\lambda R) + \lambda R \log R\, J_1(\lambda R) \neq 0$$

$$J_{k-1}(\lambda R) \neq 0 \qquad \forall k \geqslant 1$$

Alors de l'égalité $\Phi(x) \equiv 0$, il suit: $a_k = b_k = 0$, $\forall k \geqslant 0$ c'est à dire que l'équation homogène $(2.14)_0$ a seulement la solution triviale et l'équation non homogène (2.14) a une seule solution dont les coefficients a_k, b_k sont déterminés par les relations (2.17).

b) Au moins, une des relations:

$$J_0(\lambda R) + \lambda R \log R J_1(\lambda R) = 0 \tag{2.18$_1$}$$

$$J_{k-1}(\lambda R) = 0 \text{ pour un certain } k \geqslant 1 \tag{2.18$_2$}$$

est satisfaite. Cherchons la solution de l'équation homogène $(2.14)_0$:

α) Supposons que $J_0(\lambda R) - \lambda R \log R\, J_1(\lambda R) = 0$. Alors, a_0 peut être choisi arbitrairement de telle sorte, que l'équation homogène $(2.14)_0$ admette la solution de la forme:

$$u(\rho, \theta) = J_0(\lambda\rho)$$

D'où

$$u\Big|_\Gamma = J_0(\lambda R)\,; \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = -\lambda J_0'(\lambda R) = \lambda J_1(\lambda R)$$

Si $R \neq 1$, nous avons en vertu de $(2.18)_1$:

$$u\Big|_\Gamma = J_0(\lambda R)\,, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = -\frac{J_0(\lambda R)}{R \log R}$$

Posons

$$\omega(x) = \frac{J_0(\lambda R)}{\log R} \log\rho$$

Alors $\omega(x)$ est harmonique dans Ω^-, appartient à la classe $\mathcal{M}$ et

$$u^+(y)\Big|_\Gamma = \omega^-(y)\Big|_\Gamma$$

$$\left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+}\right)^+\Bigg|_\Gamma = -\left(\frac{\partial \omega(y)}{\partial n_y^-}\right)^-\Bigg|_\Gamma$$

C'est à dire que $u(x)$ est la solution du problème A. Si $R = 1$, nous avons à l'aide de $(2.18)_1$:

$$u\Big|_\Gamma = J_0(\lambda) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \lambda J_1(\lambda)$$

Posons

$$\omega^*(x) = -\lambda J_1(\lambda) \log\rho$$

Alors $\omega(x)$ est harmonique dans Ω^-, appartient à la classe $\mathcal{M}$ et

$$u^+(y)\Big|_\Gamma = \omega^{*-}(y)\Big|_\Gamma$$

$$\left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+}\right)^+\Bigg|_\Gamma = -\left(\frac{\partial \omega^*(y)}{\partial n_y^-}\right)^-\Bigg|_\Gamma$$

C'est à dire que $u(x)$ est la solution du problème A.

β) Supposons que $J_{k-1}(\lambda R) = 0$ pour un certain $k \geqslant 1$. Alors a_k et b_k peuvent être choisis arbitrairement de telle sorte que l'équation homogène $(2.14)_0$ admette les solutions suivantes:

$$u_1(\rho,\theta) = J_k(\lambda\rho)\cos k\theta,$$
$$u_2(\rho,\theta) = J_k(\lambda\rho)\sin k\theta$$

Considérons par exemple $u_1(\rho,\theta)$. Alors, nous avons:

$$u_1(R,\theta) = J_k(\lambda R)\cos k\theta.$$

$$\frac{\partial u_1(\rho,\theta)}{\partial n^+}\Bigg|_\Gamma = -\lambda J_k'(\lambda R)\cos k\theta = -\lambda\left[-k\frac{J_k(\lambda R)}{\lambda R} + J_{k-1}(\lambda R)\right]\cos k\theta =$$

$$= k\frac{J_k(\lambda R)}{R}\cos k\theta$$

Par suite, si nous posons:

$$\omega_k(\rho,\theta) = A\frac{\cos k\theta}{\rho^k}\,, \; A = R^k J_k(\lambda R)$$

alors $\omega_k(\rho, \theta)$ appartient à la classe $\mathcal{M}$ et:

$$u_1^+(y)\Big|_\Gamma = \omega_k^-(\rho,\theta)\Big|_\Gamma$$

$$\left(\frac{\partial u_1(y)}{\partial n_y^+}\right)^+\Bigg|_\Gamma = -\left(\frac{\partial \omega_k(\rho,\theta)}{\partial n_y^-}\right)^-\Bigg|_\Gamma$$

c'est à dire que u_1 (ρ,θ) est la solution du problème A.

Received on October 1980

BIBLIOGRAPHIES

1. I.N. Vekua. *Nouvelles méthodes de la solution des équations elliptiques* (en Russe) Moscou 1948.

2. I.N. Vekua. *Fonctions analytiques généralisées* (en Russe) Moscou 1959.

3. I.N. Vekua. *Travaux de l'Institut mathématique de Tbitissi* (en Russe) 12-1943, 105 — 174.

4. D. Colton. *Integral operators for elliptic equations in three independent variables.* J. Appl. Anal. 1974. Vol.4, pp. 77 — 95.

5. D. Colton. *Integral operators for elliptic equations in three independent variables II.* Appl. Anal. 1975. Vol. 4, pp. 283—295.

6. S.L. Sobolev. *Quelques applications de l'analgse fonctionnelle dans la physique mathématique* (en Russe) Moscou 1952.

7. J. Necas. *Méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Prague 1967.

8. N.M. Gunther. *Théorie du potentiel et applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique.* Paris. Gauthier — Villards 1934.

9. G. Szego. *Orthogonal polynomials.* New-York 1959

10. G.N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions.* 1962.

11. Nguyễn Thừa Hợp. *Sur la solution d'une classe d'équations opérationnelles et ses applications.* (en Russe). Acta Mathematica Vietnamica, Vol 4, № 1, 1979.

12. Nguyễn Thừa Hợp. *Conditions de prolongement harmonique et ses applications.* Acta Mathematica Vietnamica Vol 5, No 1, 1980