ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Tom 5 № 2

THÉORÈMES DE POINT FIXE DES MULTIAPPLICATIONS ALÉATOIRES DE TYPE CONTRACTION SANS HYPOTHÈSE DE CONTINUITÉ

PHAN VĂN CHƯƠNG

Institut de Mathématiques, Hanoi

§1. PRÉLIMINAIRES

Le problème de point fixe des applications aléatoires a été posé pour la première fois par Spacek et Hans ([7], [3], [18]) dans l'étude des équations intégrales de Fredholm à noyaux aléatoires. Ces auteurs ont obtenu les premiers résultats dans cette direction concernant l'existence de points fixes des contractions de Banach aléatoires. Les versions probabilistiques du théorème de point fixe de Schauder ainsi que leurs applications aux questions des équations différentielles, intégrales aléatoires ont été traitées par Reid A. T. Br. Mukheryea ([13], [15]). Divers problèmes de point fixe pour les applications aléatoires ont été posés dans un articls de Reid A.T. ([16]). Notons que pour les multiapplications aléatoires certains résultats de ce type ont été obtenus récemment par Itoh pour les contractions multivoques de Banach ([11]) et par Engl pour les multiapplications semicontinues supérieurement d'un convexe fermé stochastique avec intérieur nonvide dans lui-même ([6])(*). En utilisant une méthode algorithmique donnée par Hoang Tuy pour le cas déterministe ([20]), l'auteur a récemment obtenu des versions aléatoires du théorème de Kakutani-Kyfan dans les espaces localement convexes métrisables ou sousliniens [5]. (**).

(*) L'auteur a pris connaissance de ces résultats après que l'article présent avait été achevé. La notion de séparabilité d'une multi-application donnée dans la suite a été introduite par Engl et, indépendamment, par l'auteur pour des questions différentes. La terminologie employée ici est celle d'Engl.

(**) Pour un aperçu général sur la situation du problème jusqu'à 1976 ainsi que des questions posées, voir [16].

Notons que dans les résultas énumérés, les (multi) applications considérées sont continues (ou semicontinues supérieurement. Il existe cependant dans le cas déterministe des théorèmes de points fixes concernant des applications sans hypothèses de type continuité. Ce sont des résultats de Boyd – Wong [2] qui ont été généralisés ensuite par d'autres auteurs ([14], [17], [1], [9], [21], [22], [19]).

Dans le présent article on obtient des versions aléatoires des résultats de ce type. On ne tend pas à obtenir tous les résultats qui peuvent être démontrés à l'aide de la technique utilisé, mais on se borne à établir ceux des plus typiques. Comme cas particulier on retrouve le résultat de Itoh ([11]), où la démonstration se base essentiellement sur la continuité (lipshitzienne) des applications.

L'approche adoptée dans cet article consiste à paramétriser des processus d'itération utilisées habituellement dans le cas déterministe.

Notons enfin que ramenés au cas déterministe, quelques uns des résultats obtenus ici sont, à notre connaissance, plus généraux que ceux connus jusqu'à présent dans la littérature.

Dans tout cet article, $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, (X, d) un espace métrique. On désigne par $C(X)$ l'ensemble de toutes les parties complètes nonvides de X, par D la distance de Hausdorff, associée à d dans $C(X)$, c.à.d.

$$D(A, B) = \max\left\{\sup_{x\in A} d(x, B), \sup_{y\in B} d(y, A)\right\} \leqslant +\infty \quad (\forall A, B \in C(X))$$

Une multi-application $F: \Omega \to 2^X$ est dite mesurable, si: $F(\omega) \in C(X)$ $(\forall\omega \in \Omega)$, $F(\omega)$ est séparable et

$$F^-(U) \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap U \neq \phi\} \in \mathcal{A}$$

pour tout ouvert U dans X ([3]).

Une multi-application $F: \Omega \to 2^X$ sera dite p — mesurable, si $F^-(x) \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in X$.

Soit $\Sigma \in \Omega \times X$ tel que

$$\Sigma^-(x) \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid (\omega, x) \in \Sigma\}$$

et soit Y un espace métrique.

Une multi-application $\Gamma : \Sigma \to 2^Y$ est dite aléatoire, si pour tout $x \in X$, la multiapplication $\Gamma(., x) : \Sigma^-(x) \to 2^Y$ est mesurable ([6]).

Soit $\Gamma : \Sigma \to 2^X$ une multi-application aléatoire. Une application $x(.) : \Omega \to X$ est dite point fixe de Γ, si : elle est mesurable, $(\omega, x(\omega)) \in \Sigma$ et

$$x(\omega) \in \Gamma(\omega, x(\omega)) \quad (\forall\omega \in \Omega)$$

Enfin, une multi-application $F: \Omega \to 2^X$ est dite séparable, s'it existe une suite $Z \subset X$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $Z \cap F(\omega)$ soit dense dans $F(\omega)$ ([6]).

§ 2. FORMULATION DES RESULTATS

Supposons données une multiapplication **séparable** p – **mesurable** $F : \Omega \to 2^X$ telle que $F(\omega) \in C(X)$ $(\forall \omega \in \Omega)$

Théorème 2.1. Soient S, T : Graph $F \to 2^x$ deux **multiapplications** aléatoires telles que

$$S(\omega, F(\omega)) \subset F(\omega), \ T(\omega, F(\omega)) \subset F(\omega) \ (\forall \omega \in \Omega)$$

Supposons qu'il existe des fonctions aléatoires (*)

$$\alpha_i : \Omega \times [0, +\infty) \to R^1_+ \ (i = 1{,}5) \text{ vérifiant}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{t \to t_0}} \ [\alpha_1(\omega, t) + \alpha_2(\omega, t) + 2\alpha_3(\omega, t) + \alpha_5(\omega, t)] < 1 \ (^{**}) \\ &\overline{\lim_{t \to t_0}} \ [\alpha_1(\omega, t) + \alpha_2(\omega, t) + 2\alpha_4(\omega, t) + \alpha_5(\omega, t)] < 1 \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

pour tout $(\omega, t_0) \in \Omega \times [0, +\infty)$

ou

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \geqslant t_0}}} \ [\alpha_1(\omega, t) + \alpha_2(\omega, t) + 2\alpha_3(\alpha, t) + \alpha_5(\omega, t)] < 1 \\ &\overline{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \geqslant t_0}}} \ [\alpha_1(\omega, t) + \alpha_2(\omega, t) + 2\alpha_4(\omega, t) + \alpha_5(\omega, t)] < 1 \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

pour tout $(\omega, t_0) \in \Omega \times [0, +\infty)$

si $F(\omega) = C$ est constant, telles que

$$\begin{aligned} D(S(\omega, x), T(\omega, y)) \leqslant a_1 \, d(x, S(\omega, x)) + a_2 \, d(y, T(\omega, y)) + \\ + a_3 \, d(y, S(\omega, x)) + a_4 \, d(x, T(\omega, y)) + a_5 \, d(x, y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $a_i = \alpha_i(\omega, d(x, y))$, $(i = \overline{1{,}5})$, pour tout couple de points distincts $x, y \in F(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$.

Alors

a) Il existe une section mesurable $x(.)$ de F telle que

$$x(\omega) \in S(\omega, x(\omega)) \cup T(\omega, x(\omega)) \ (\forall \omega \in \Omega) \quad (2.3)$$

En outre

$$\{\omega \in \Omega \mid x(\omega) \in S(\omega, x(\omega))\} \in \mathcal{A} \quad \{\omega \in \Omega \mid x(\omega) \in T(\omega, x(\omega))\} \in \mathcal{A}$$

b) Si de plus, (2.2) a lieu pour tout couple $x, y \in F(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$, $x(.)$ est un point fixe commun de S et T.

(*) au sens donné dans § 1

(**) pour toute fonction $\alpha : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to R$ $(\alpha : [t_0, t_0 + \delta] \to R)$, on désigne par $\overline{\lim\limits_{t \to t_0}} \alpha(t)$ $\left(\overline{\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \geqslant t_0}}} \alpha(t)\right)$ la valeur $\inf\limits_{n \in N} \sup\limits_{|t - t_0| < \frac{\delta}{n}} \alpha(t)$ $\left(\inf\limits_{n \in N} \sup\limits_{0 \leqslant t - t_0 < \frac{\delta}{n}} \alpha(t)\right)$

Théorème 2.2. Soient S, T : Graph F $\to 2^X$ deux multiapplications aléatoires telles que

$$S(\omega, F(\omega)) \subset F(\omega),\ T(\omega, F(\omega)) \subset F(\omega)\ (\forall \omega \in \Omega)$$

Supposons qu'il existe une fonction aléatoire

$$\alpha : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}^1_+ \text{ vérifiant } \overline{\lim_{t\to t_0}}\ \alpha(\omega, t) < 1\ \forall(\omega, t_0) \in \Omega \times [0, +\infty) \tag{2.4}$$

ou

$$\overline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\geqslant t_0}}}\ \alpha(\omega, t) < 1 \qquad \forall(\omega, t) \in \Omega \times [0, +\infty) \tag{2.4'}$$

si $F(\omega) \equiv C$ est constant, tels que

$$D(S(\omega, x), T(\omega, y)) \leqslant \alpha(\omega, d(x, y)).$$

$$.\max\{d(x, y), d(x, S(\omega, x)), d(y, T(\omega, y)), \frac{1}{2}[d(x, T(\omega, y)+d(y, S(\omega, x))]\}$$

pour tout couple de point distincts $x, y \in F(\omega)$

Alors on a les conclusions a) et b) du théorème 2.1 où dans b) (2.2) est remplacé par (2.5).

Théorème 2.3. Soit S: Grah $F \to X$ une application aléatoire telle que $S(\omega, F(\omega)) \subset F(\omega)$ Supposons qu'il existe des fonctions aléatoires

$$\alpha_i : \Omega \times (0, +\infty) \to \mathbf{R}^1_+\ (i = \overline{1,5}) \text{ vérifiant}$$

$$\overline{\lim_{t\to t_0}}\ \sum_{i=1}^{5} \alpha_i(\omega, t) < t_0 \quad \forall(\omega, t_0) \in \Omega \times (0, +\infty) \tag{2.6}$$

ou

$$\overline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\geqslant t_0}}}\ \sum_{i=1}^{5} \alpha_i(\omega, t) \leqslant t_0 \quad \forall(\omega, t_0) \in \Omega \times (0, +\infty) \tag{2.6'}$$

si $F(\omega) \equiv C$ est constant, telles que

$$d(S(\omega, x), S(\omega, y)) \leqslant a_1 d(x, S(\omega, x)) + a_2 d(y, S(\omega, y)) + \\ + a_3 d(x, S(\omega, y)) + a_4 d(y, S(\omega, x)) + a_5 d(x, y) \tag{2.7}$$

pour tout couple $x \neq y$, $x, y \in F(\omega)$, $(\forall \omega \in \Omega)$

où $\qquad a_i = \alpha_i(\omega, d(x, y))/d(x, y)\ (i = \overline{1,5})$

Alors S possède un point fixe et un seul.

Remarques.

1. Dans les théorèmes formulés les multiapplications se sont pas supposés continues. Comme un cas particulier du théorème 2.1 où $F(\omega) \equiv C$ est constant, $\alpha_i(\omega, t) \equiv 0$ $(i = 1,4)$, $\alpha_5(\omega, t) = \alpha(\omega)$ $S = T$ on retrouve le resultat de Itoh ([11]) dont la démonstration s'appuit essentiellement sur la continuité lipschitzienne de S.

2. Une version aléatoire d'un résultat récent de Siric peut être obtenue en la ramènant au théorème 2.2 avec S, T univoque, grâce au théorème de selections de Kuratowski—Ryll Nardzewski — Castaing ([12], [3], [10]).

3. Dans le cas déterministe des résultats moins généraux que ceux contenus dans les théorèmes 2.1, 2.2 ont été obtenus dans [14], [17], [1], [9], [21], [22], [19]. Le théorème 2.2 est juste la version aléatoire d'un résultat de Wong ([22]).

§ 3. DÉMONSTRATION DES THÉOREME

3.1. Proposition. Soient $F: \Omega \to 2^x$ une multiapplication séparabte, p-mesurable, $\overline{u_0}(.): \Omega \to X$ une application étagée (*) mesurable, $c_i \in \mathbf{R}^1$ ($i = \overline{1, m}$), $\varphi_i, \psi_i: \Omega \times (0, +\infty) \to \mathbf{R}^1$ ($i = \overline{1, m}$) des fonctions aléatoires telles que

$$\overline{\lim_{t \to t_0}} \varphi_i(\omega, t) < c_i, \quad \lim_{t \to t_0} |\psi_i(\omega, t)| < +\infty \tag{3.1}$$

$$\forall (\omega, t_0) \in \Omega \times (0, +\infty)$$

ou

$$\overline{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \geqslant t_0}}} \varphi_i(\omega, t) < c_i; \quad \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \geqslant t_0}} |\psi_i(\omega, t)| < +\infty \tag{3.1'}$$

$$\forall (\omega, t_0) \in \Omega \times (0, +\infty)$$

si $F(\omega) = C$ est constant.

Alors, pour toute section (**) mesurable $u(.)$ de F, toute fonction mesurable $r(\omega)$ telle que

$$0 < d(u(\omega), \overline{u}_0(\omega)) < r(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

il existe une section étagée mesurable $\overline{u}(.)$ de F telle que ($\forall \omega \in \Omega$)

$$0 < d(\overline{u}(\omega), \overline{u}_0(\omega)) < r(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega) \tag{3.2}$$

$$\varphi_i(\omega, d(\overline{u}(\omega), \overline{u}_0(\omega))) + \psi_i(\omega, d(\overline{u}(\omega), \overline{u}_0(\omega))) . d(\overline{u}(\omega), u(\omega)) < c_i \tag{3.3}$$

pour tout $i = \overline{1, m}$.

Lemme 3.1. Soient F une multi-application séparable p-mesurable, $u(.)$ une section mesurable de F.

Alors, pour toute fonction mesurable $\varepsilon(\omega) > 0$, il existe une section étagée mesurable $\overline{u}(.)$ de F telle que

$$d(\overline{u}(\omega), u(\omega)) < \varepsilon(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

Démonstration. Soit $D = \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ telle que $\overline{D \cap F(\omega)} \supset F(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Posons $\overline{u}(\omega) = u_n$, si n est le plus petit entier tel que $u_n \in F(\omega)$ et $d(u_n, u(\omega)) < \varepsilon(\omega)$. Il est clair que $\overline{u}(.)$ est bien définie et possède toutes les propriétés désirées.

(*) Une application sera dite, par abus de language, étagée, si elle admet au plus un nombre dénombrable de valeurs.

(**) $u(.)$ est dite une section d'une multiapplication $F: \Omega \to X$, si $u(\omega) \in F(\omega)$ ($\forall \omega \in \Omega$).

Le lemme suivant sera utilisé anssi dans la suite.

Lemme 3.2. Soient $F:\Omega \to 2^X$ une multi-application p-mesurable, $\overline{u}(.)$ une section étagée mesurable de F, (Y, ρ) un espace métrique,

Γ : Graph $F \to 2^Y$ une multiapplication aléatoire,

$\Gamma_1 : \Omega \to 2^Y$ la multiapplication définie par $\Gamma_1(\omega) = \Gamma(\omega, \overline{u}(\omega)) \quad (\forall \omega \in \Omega)$

Alors:

1) Γ_1 est mesurable

2) pour toute application mesurable $v(.) : \Omega \to Y$, toute fonction $r(\omega)$ telle que

$$\rho(v(\omega), \Gamma_1(\omega)) < r(\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

il existe une section mesurable $u(.)$ de Γ_1 telle que

$$\rho(v(\omega), u(\omega)) < r(\omega). \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

Démonstration. a) est évidente. En vertu de a) il existe une suite $\{u_n(.)\}_{n=1}^{\infty}$ de sections mesurables de Γ_1 telle que $\overline{\{u_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}} = \Gamma_1(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$([3]) il suffit de poser, pour chaque $\omega \in \Omega$, $u(\omega) = u_n(\omega)$, si n est le plus petit entier tel que $d(v(\omega), u_n(\omega)) < r(\omega)$. Il est clair que $u(.)$ est bien definie et possède toutes les propriétés désirées.

Lemme 3.3. Soient (C, d) un espace métrique séparable, $\overline{u}_0(.) : \Omega \to C$ étagée mesurable, $u(.) : \Omega \to C$ mesurable.

Alors, pour toute fonction mesurable $\varepsilon(\omega) > 0$, il existe une application étagée mesurable $\overline{u}(.) : \Omega \to C$ telle que:

a) $d(\overline{u}(\omega), u(\omega)) < \varepsilon(\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$

b) $d(u(\omega), \overline{u}_0(\omega)) \leqslant d(\overline{u}(\omega), \overline{u}_0(\omega)) \qquad \forall \omega \in \Omega)$

Démonstration. Il est clair qu'on peut supposer que $\overline{u}(\omega) \equiv \overline{u}$, $\varepsilon(\omega) \equiv \varepsilon$ sont constantes.

Soient $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite partout dense dans C,

B_n la'boule de centre u_n et de rayon $\varepsilon/2$, et soit $r_n = \sup\limits_{u \in B_n} d(\overline{u}_0, u)$

Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, fixons un point $v_{\infty}^{(n)} \in B_n$ tel que $d(\overline{u}_0, v_{\infty}^{(n)}) = r$, si un tel point existe, et pour tout $m \in \mathbf{N}$, un point $v_m^{(n)} \in B_n$ tel que

$$r_n\left(1 - \frac{1}{k}\right) \leqslant d(\overline{u}_0, v_m^{(n)}) < r_n\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$$

avec un entier $k = k(m) > m$, dans le cas contraire.

Pour tout $\omega \in \Omega$, soit $n = n(\omega)$ le plus petit, entier tel que $u(\omega) \in B_n$. Posons $\overline{u}(\omega) = v_\infty^{(n)}$, si un tel point $v_\infty^{(n)}$ existe, et $\overline{u}(\omega) = v_m^{(n)}$, où m est l'entier défini par

$$r_n\left(1 - \frac{1}{m}\right) \leqslant d\,(\overline{u}_o,\ u\,(\omega)) < r_n\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)$$

dans le cas contraire.

On vérifie facilement que $\overline{u}(.)$ est bien définie sur Ω et possède toutes les propriétés désirées.

Démonstration de la proposition 3.1.

Posons
$$\alpha(\omega) = r(\omega) - d\,(\overline{u}_o(\omega),\ u\,(\omega))$$
$$\varepsilon(\omega) = \min\,\{\alpha(\omega),\ d\ (\overline{u}_o(\omega),\ u\,(\omega))\}$$

D'après le lemme 3.1, il existe une section étagée mesurable $u_n(\omega)$ de F telle que

$$d\,(\overline{u}_n(\omega),\ u(\omega)) < \frac{1}{n}\,\varepsilon(\omega) \qquad \forall\,\omega \in \Omega) \tag{3.4}$$

Si, de plus, $F(\omega) \equiv C$, d'après le lemme 3.3. on peut supposer que

$$d\,(\overline{u}_n(\omega),\ \overline{u}_o(\omega)) \geqslant d\,(u\,(\omega),\ \overline{u}_o(\omega)) \qquad (\forall\,\omega \in \Omega) \tag{3.5}$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a

$$0 < d\,(\overline{u}_n(\omega),\ \overline{u}_o(\omega)) < r\,(\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega) \tag{3.6}$$

Posons, pour tout $\omega \in \Omega$, $\overline{u}(\omega) = \overline{u}_n(\omega)$, si n est le plus petit entier tel que

$$\varphi_i\,(\omega,\ d\,(\overline{u}_n(\omega),\ \overline{u}_o(\omega))) + \varphi_i\,(\omega,\ d\,(\overline{u}_n(\omega)\ \overline{u}_o(\omega))).d(\overline{u}_n(\omega), u\,(\omega)) < c_i \tag{3.7}$$

pour tout $i = \overline{1,m}$.

Il résulte de (3.1) et (3.4), ou de (3.1'), (3.4) et (3.5) que $\overline{u}(.)$ est bien définie sur Ω.

La mesurabilité de $\overline{u}(.)$ se vérifie facilement en tenant compte du fait que $\overline{u}_n(.)$, $\overline{u}_n(.)$ sont des applications étagées mesurables. Les inégalités (3.2), (3.3) découlent de (3,6), (3.7).

3.2. Démonstration du théorème 2.1.

Lemme 3.4. Sous les hypothèses de l'assertion a) du théoréme, soit $\omega_o \in \Omega$ fixé, et soient $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\overline{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F\,(\omega_o)$, $x_n \to x$, $\overline{x}_n \to x$ *telles que*

$$x_{n+1} \in S\,(\omega_o,\ \overline{x}_n) \qquad \textit{pour tout } n \textit{ pair}. \tag{3.8}$$
$$x_{n+1} \in T\,(\omega_o,\ \overline{x}_n) \qquad \textit{pour tout } n \textit{ impair}. \tag{3.9}$$

Alors, $\qquad x \in S\,(\omega_o, x) \cup T\,(\omega_o,\ x)$

Démonstration. Comme ω_o est fixé, dans ce qui suit on le supprimera dans l'écriture. On peut supposer que $\overline{x}_n \neq x\,(\forall n \in \mathbf{N})$ En effet, dans le cas contraire, il existe une sous-suite $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$ telle que $\overline{x}_{n_i} = x\ (\forall i \in \mathbf{N})$. On peut supposer que tous les n_i sont pairs ou que tous les n_i sont impairs. Dans le premier cas on a $x_{n_{i+1}} \in S(\overline{x}_{n_i}) = S(x)$ $(\forall i \in N)$ Faisant $i \to +\infty$ on a $x \in S(x)$. De la même façon, dans le second cas on a $x \in T(x)$ Ainsi, $x_n = x$ $(\forall n \in N)$. En utilisant (2.2), en vertu (3.8), pour tout n pair on a

$$\begin{aligned} d(\overline{x}_n, T(x)) &\leqslant d(\overline{x}_n, \overline{x}_{n+1}) + d(\overline{x}_{n+1}, x_{n+1}) + D(S(\overline{x}_n), T(x)) \leqslant \\ &\leqslant d(\overline{x}_n, \overline{x}_{n+1}) + d(\overline{x}_{n+1}, x_{n+1}) + a_1 d(\overline{x}_n, x_{n+1}) + a_2 d(x, \overline{x}_n) \\ &+ a_2 d(\overline{x}_n, T(x)) + a_3 d(x, x_{n+1}) + a_4 d(\overline{x}_n, T(x)) + a_5 d(x, \overline{x}_n) \end{aligned}$$

où

$$a_i = \alpha_i(\omega_o, d(\overline{x}_n, x)) \quad (i = \overline{1,5})$$

Donc

$$d(\overline{x}_n, Tx) \leqslant \varepsilon_n b(d(\overline{x}_n, x))$$

où

$$b(t) = 1/[1 - \alpha_2(\omega_o, t) - \alpha_4(\omega_o, t)]$$

$$\varepsilon_n = d(\overline{x}_n, \overline{x}_{n+1}) + d(\overline{x}_{n+1}, x_{n+1}) + a_3 d(x, x_{n+1}) + a_1 d(\overline{x}_n, x_{n+1}) + (a_2 + a_5) d(\overline{x}_n, x)$$

Comme d'aprés 2.1, $\overline{\lim\limits_{t \to +0}}\, b(t) < +\infty$, en faisant $n \to +\infty$ on obtient $d(x, T(x)) = 0$.

Lemme 3.5. Sous les hypothèses de l'assertion b) du Théorème, pour chaque $\omega_o \in \Omega$ fixé l'ensemble des points fixes de $S(\omega_o, .)$ coincide avec celui de $T(\omega_o, .)$

Démonstration Dans ce qui suit, le symbole ω_o sera omis. Supposons que $x \in S(x)$. D'après (2.2) on a

$$d(x, T(x)) \leqslant D(S(x), T(x)) \leqslant [\alpha_2(0) + \alpha_4(0)] d(x, T(x))$$

ce qui, en vertu de (2.1), entraîne que $d(x, T(x)) = 0$. De façon analogue, $x \in T(x)$ entraîne que $d(x, S(x)) = 0$. C. Q. F. D.

Posons

$$\begin{aligned} f(\omega, t) &= \frac{\alpha_1(\omega, t) + \alpha_4(\omega, t) + \alpha_5(\omega, t)}{1 - \alpha_2(\omega, t) - \alpha_4(\omega, t)} \\ g(\omega, t) &= \frac{1 + \alpha_1(\omega, t) + \alpha_3(\omega, t)}{t[1 - \alpha_2(\omega, t) - \alpha_4(\omega, t)]} \\ p(\omega, t) &= \frac{\alpha_2(\omega, t) + \alpha_3(\omega, t) + \alpha_5(\omega, t)}{1 - \alpha_1(\omega, t) - \alpha_3(\omega, t)} \\ q(\omega, t) &= \frac{1 + \alpha_2(\omega, t) + \alpha_4(\omega, t)}{t[1 - \alpha_1(\omega, t) - \alpha_3(\omega, t)]} \\ M(\omega; t, \mu) &= f(\omega, t) + g(\omega, t) . \mu \\ N(\omega, t; \mu) &= p(\omega, t) + q(\omega, t) . \mu \end{aligned}$$

Il est évident que les fonctions $f(\omega, t)$, $p(\omega, t)$ satisfont aux hypothèses sur les fonctions $\varphi_i(\omega, t)$ (avec $c_i = 1$) et les fonctions $g(\omega, t)$, $q(\omega, t)$ satisfont aux hypothèses sur les fonctions $\psi_i(\omega, t)$ dans la Proposition 3.1.

Le point crucial de la démonstration du Théorème 2.1 est le lemme suivant:

Lemme 3.6. Sous les hypothèses du théorème, soient

$$\widetilde{\Omega} \subset \Omega, \quad \widetilde{\Omega} \in \mathcal{A}, \quad \overline{u}_o(.) : \widetilde{\Omega} \to X$$

une section étagée mesurable de F, $r(.) : \widetilde{\Omega} \to \mathbf{R}^1$ une fonction mesurable.

Alors, pour toute application mesurable $u(.)$:

$$\widetilde{\Omega} \to X \text{ telle que } u(\omega) \in S(\omega, \overline{u}_o(\omega))$$

verifiant

$$d(u(\omega), \overline{u}_o(\omega)) < r(\omega) \quad (\forall \omega \in \widetilde{\Omega}) \tag{3.8}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe trois sous-ensembles deux à deux disjoints E, G, $\widetilde{\widetilde{\Omega}} \in \mathcal{A}$ ayant $\widetilde{\Omega}$ pour réunion, une section étagée mesurable $\overline{u}(.)$ de $F\big|_{\widetilde{\Omega} \setminus E}$ telle que

$$\overline{u}_o(\omega) \in S(\omega, \overline{u}_o(\omega)) \quad (\forall \omega \in E) \tag{3.9$_1$}$$

$$\overline{u}(\omega) \in T(\omega, \overline{u}(\omega)) \quad (\forall \omega \in G) \tag{3.9$_2$}$$

$$0 < d(\overline{u}(\omega)), \overline{u}_o(\omega)) < r(\omega) \quad (\forall \omega \in \widetilde{\Omega} \setminus E) \tag{3.10}$$

$$d(\overline{u}(\omega), u(\omega)) < \varepsilon\, d(\overline{u}(\omega), \overline{u}_o(\omega)) \quad (\forall \omega \in \widetilde{\Omega} \setminus E) \tag{3.11}$$

et une application mesurable $v(.)$: $\widetilde{\widetilde{\Omega}} \to X$ telle que $v(\omega) \in T(\omega, u(\omega))$ $(\forall \omega \in \widetilde{\widetilde{\Omega}})$ et

$$d(v(\omega), \overline{u}(\omega)) < r_1(\omega) \quad (\forall \omega \in \widetilde{\widetilde{\Omega}}) \tag{3.12}$$

où

$$r_1(\omega) = \min \{ d(\overline{u}(\omega), \overline{u}_o(\varphi)), r(\omega). M(\omega, d(\overline{u}(\omega), \overline{u}_o(\omega)) : d(\overline{u}(\omega), u(\omega))) \}$$

Démonstration. Posons

$$E = \{ \omega \in \widetilde{\Omega} \mid d(\overline{u}_o(\omega), u(\omega)) = 0 \}$$

D'après la Proposition 3.1 (avec $m = 2$, $\varphi_1(\omega, t) \equiv 0$,

$$\psi_1(\omega, t) \equiv \frac{1}{t}, \quad c_1 = \varepsilon; \quad \varphi_2(\omega, t) \equiv f(\omega, t),$$

$$\psi_2(\omega, t) \equiv g(\omega, t), \quad c_2 = 1)$$

il existe une section étagée mesurable $\overline{u}(.)$ de $F\big|_{\widetilde{\Omega} \setminus E}$ telle qu'on ait (3.10), (3.11) et que

$$M(\omega, d(\overline{u}(\omega), \overline{u}_o(\omega)) ; d(\overline{u}(\omega), u(\omega))) < 1 \quad (\forall \omega \in \widetilde{\Omega} \setminus E) \tag{3.13}$$

En utilisant (2.2) et en tenant compte du fait que

$$d(u(\omega), S(\omega, \overline{u}_o(\omega))) = 0 \quad (\forall \omega \in \widetilde{\Omega}),$$

pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega} \setminus E$ on a

$$d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega)) \leqslant d(\overline{u}(\omega), u(\omega)) + d(u(\omega), T(\omega, \overline{u}\omega))) \leqslant$$
$$d(\overline{u}(\omega), u(\omega)) + D(S(\omega, \overline{u}_o(\omega)), T(\omega, \overline{u}(\omega))) \leqslant$$
$$(a_2 + a_4)\, d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) + (a_1 + a_4 + a_5)\, d(\overline{u}_o(\omega), \overline{u}(\omega)) +$$
$$+ (1 + a_1 + a_3)\, d(\overline{u}(\omega), u(\omega)).$$

où
$$a_i = \alpha_i(\omega, d(\overline{u}_o(\omega), \overline{u}(\omega)))$$

Donc

$$d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) \leqslant d(\overline{u}_o(\omega), \overline{u}(\omega)). M(\omega, d(\overline{u}_o(\omega), \overline{u}(\omega); d(\overline{u}(\omega), u(\omega))) \quad (3.14)$$

Posons

$$G = \{ \omega \in \widetilde{\Omega}\setminus E \mid M(\omega, d(\overline{u}_o(\omega), \overline{u}(\omega)); d(\overline{u}(\omega), u(\omega))) = 0 \}$$

Comme la fonction de ω, $d(\overline{u}_o(\omega), \overline{u}(\omega))$ est étagée mesurable, la fonction de ω, $M(\omega, d(\overline{u}_o(\omega), \overline{u}(\omega))$; $d(u(\omega), \overline{u}(\omega)))$ est mesurable. Donc $G \in \mathcal{A}$. On a évidemment $(3.9)_1$ et $(3.9)_2$. Posons $\widetilde{\widetilde{\Omega}} = \widetilde{\Omega}\setminus(E \cup G)$. On déduit de (3.13), (3.14) et (3.10) que

$$d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) < r_1(\omega) \; (\forall \omega \in \widetilde{\widetilde{\Omega}})$$

L'existence d'une application mesurable $v(.) : \widetilde{\widetilde{\Omega}} \to X$ telle que $v(\omega) \in T(\omega$ $\overline{u}(\omega))$, satisfaisant à (2.10), est alors assurée par le lemme 3.2. C.Q.F.D.

Démonstration du théorème. En vertu du lemme 3.5, il suffit de démontrer l'assertion a). Soient $\overline{x}_0(.)$ une section étagée mesurable de F(*), $x_1(.)$ une section mesurable de la multiapplication $\omega \mapsto S(\omega, \overline{x}_0(\omega))$ (**) et soit $r_o(\omega)$ une fonction mesurable telle que $d(\overline{x}_o(\omega), x_1(\omega)) < r_o(\omega)$.

D'après le lemme (3.6), il existe une partition de Ω en trois sous-ensembles deux à deux disjoints E_1, G_1, $\Omega_1 \in \mathcal{A}$ et une section étagée mesurable $\overline{x_1}(.)$ de $F \mid_{\Omega\setminus E_1}$ telles que

$$\overline{x}_0(\omega) \in S(\omega, \overline{x}_0(\omega)) \qquad (\forall \omega \in E_1)$$
$$\overline{x_1}(\omega) \in T(\omega, \overline{x}_1(\omega)) \qquad (\forall \omega \in G_1)$$
$$o < d(\overline{x_1}(\omega), \overline{x}_0(\omega)) < r(\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega\setminus E_1)$$
$$d(\overline{x_1}(\omega), x(\omega)) < d(\overline{x_1}(\omega), \overline{x}_o(\omega)) \; (\forall \omega \in \Omega\setminus E)$$

Si $\Omega_1 = \phi$ la démonstration est terminée, car l'application

$$x(\omega) = \begin{cases} \overline{x}_0(\omega) & \text{si} \quad \omega \in E_1 \\ \overline{x}_1(\omega) & \text{si} \quad \omega \in G_1 \end{cases}$$

(*) Une telle section $\overline{x}_0(.)$ de F existe toujours. En effet, si $Z = \{ z_n \}_{n-1}^{\infty} \subset X$ est telle que $\overline{Z \cap F(\omega)} = F(\omega)$ il suffit de poser $\overline{x}_0(\omega) = z_n$, si n est le plus petit entier que $z_n \in F(\omega)$.

(**) L'existente d'une telle section $x_1(.)$ est assurée par le lemme 3.2.

possède toutes les propriétés désirées. Dans le cas constraire, prenons une application mesurable $x_2(.) : \Omega_1 \to X$ telle que $x_2(\omega) \in T(\omega, \overline{x_1}(\omega))$ et que

$$d(x_2(\omega), \overline{x_1}(\omega)) < r_1(\omega) \ (\forall \omega \in \Omega_1) \tag{3.15}$$

où

$$r_1(\omega) = \min \{d(\overline{x_1}(\omega), \overline{x}_o(\omega)), r(\omega). M(\omega, d(\overline{x_1}(\omega), \overline{x}_o(\omega); d(\overline{x_1}(\omega), x_1(\omega)))\}$$

L'existencé d'une telle application $x_2(.)$ est assurée aussi par le lemme 3.6.

En vertu de (3.15), en appliquant encore le lemme 3.6, où les rôles de S et T sont interchangés on obtient une partition de Ω_1 en trois sousensembles $E_2, G_2, \Omega_2 \in \mathcal{A}$ et une section étagée mesurable $\overline{x}_2(.)$ de $F|_{\Omega_1 \setminus E_2}$ telles que

$$\overline{x_1}(\omega) \in \mathrm{T}(\omega, \overline{x_1}(\omega)) \qquad (\forall \omega \in E_2)$$
$$\overline{x_2}(\omega) \in \mathrm{S}(\omega, \overline{x_2}(\omega)) \qquad (\forall \omega \in G_2)$$
$$o < d(\overline{x_2}(\omega), \overline{x}_1(\omega)) < r_1(\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega_1 \setminus E_2)$$
$$d(\overline{x}_2(\omega), x_2(\omega)) < \frac{1}{2} d(\overline{x}_2(\omega), \overline{x}_o(\omega)) \qquad (\forall \omega \in \Omega_1 \setminus E_2)$$

Si $\Omega_2 = \phi$ il suffit de poser

$$x(\omega) = \begin{cases} \overline{x}_o(\omega) & \text{si} \quad \omega \in E_1 \\ \overline{x_1}(\omega) & \text{si} \quad \omega \in G_1 \cup E_2 \\ \overline{x_2}(\omega) & \text{si} \quad \omega \in G_2 \end{cases}$$

et la démonstration est terminée. Dans le cas contraire prenons une application mesurable $x_3(.) : \Omega_2 \to X$ telle que $x_3(\omega) \in S(\omega, \overline{x}_2(\omega))$ et que

$$d(x_3(\omega), \overline{x_2}(\omega)) < r_2(\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega_2) \tag{3.16}$$

où

$$r_2(\omega) = \min \{ d(\overline{x_2}(\omega), \overline{x_1}(\omega)), r_1(\omega) N(\omega, d(\overline{x_2}(\omega), x_1(\omega)); d(\overline{x_2}(\omega), \overline{x_2}(\omega)))\} .$$

On se trouve ainsi dans la situation initiale de la démonstration avec Ω_2, $\overline{x}_2(\omega)$, $r_2(\omega)$, $x_3(\omega)$ au lieu de Ω, $\overline{x}_o(\omega)$, $r_o(\omega)$, $x_1(\omega)$. En continuant ce processus, on obtient une suite $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ de sous-ensembles nonvides de Ω avec $\Omega_o = \Omega$, des suites $\{E_{n+1}\}_{o \leqslant n < \alpha}$, $\{G_{n+1}\}_{o \leqslant n < \alpha} \subset \mathcal{A}$, $(\alpha \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\})$ telles que pour tout n $(o \leqslant n < \alpha)$, Ω_{n+1}, F_{n+1}, G_{n+1} soient deux à deux disjoints et aient Ω_n pour réunion, et si $\alpha < +\infty$, $\Omega_{\alpha-1} = F_\alpha \subset G_\alpha$, et des suites $\{x_{n+1}(.)\}_{o \leqslant n < \alpha}$, $\{\overline{x}_{n+1}(.)\}_{-1 \leqslant n < \alpha}$ telles que pour tout n: $o \leqslant n < \alpha$, $x_{n+1}(.) : \Omega_n \to X$ soit une application mesurable, $\overline{x}_{n+1}(.)$ soit une section étagée mesurable de $F|_{\Omega_n \setminus E_{n+1}}$ et qu'on ait

$$x_{n+1}(\omega) \in S(\omega), \overline{x}_n(\omega)) \qquad (\forall \omega \in \Omega_n) \tag{3.17}$$
$$\overline{x}_n(\omega) \in S(\omega, \overline{x}_n(\omega)) \qquad (\forall \omega \in E_{n+1}) \tag{3.18}$$
$$\overline{x}_{n+1}(\omega) \in T(\omega, \overline{x}_{n+1}(\omega)) \qquad (\forall \omega \in G_{n+1}) \tag{3.19}$$

si n est pair,

$$x_{n+1}(\omega) \in T(\omega, \overline{x}_n(\omega)) \qquad (\forall \omega \in \Omega_n) \tag{3.17'}$$

$$\overline{x}_n(\omega) \in T(\omega, \overline{x}_n(\omega)) \qquad (\forall \omega \in E_{n+1}) \tag{3.18'}$$

$$\overline{x}_{n+1}(\omega) \in S(\omega, \overline{x}_{n+1}(\omega)) \qquad (\forall \omega \in G_{n+1}) \tag{3.19'}$$

si n est imdair, et

$$d(\overline{x}_{n+1}(\omega), x_{n+1}(\omega)) \leqslant \frac{1}{n+1} d(\overline{x}_n(\omega), \overline{x}_{n+1}(\omega)) \ (\forall \omega \in \Omega_n \setminus E_{n+1}) \tag{3.20}$$

$$0 < d(\overline{x}_n(\omega), \overline{x}_{n+1}(\omega)) < r_n(\omega) \ (\forall \omega \in \Omega_n \setminus E_{n+1}) \tag{3.21}$$

$$(\forall n : 0 \leqslant n < \alpha)$$

où $r_n(\omega)$ est donnée par la formule de récurrence

$$r_n(\omega) = \min\{d\, \overline{x}_n(\omega), \overline{x}_{n-1}(\omega)), r_{n-1}(\omega)\, K_n(\omega)\} \tag{3.22}$$

$(n = 1, 2, ...)$

avec

$$K_n(\omega) = \begin{cases} M(\omega, d(\overline{x}_{n-1}(\omega), \overline{x}_n(\omega)); d(\overline{x}_n(\omega), x_n(\omega))) \\ \qquad \text{si } n \text{ est impair} \\ N(\omega, d(\overline{x}_{n-1}(\omega), \overline{x}_n(\omega)); d(\overline{x}_n(\omega), x_n(\omega))) \\ \qquad \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Posons

$$x(\omega) = \begin{cases} \overline{x}_n(\omega) & \text{si } \omega \in F_{n+1} \\ \overline{x}_{n+1}(\omega) & \text{si } \omega \in G_{n+1} \end{cases}$$

$$(\forall n : 0 \leqslant n < \alpha)$$

pour tout $\omega \in \Omega'_\alpha \overset{\text{déf}}{=\!=} \bigcup_{0 \leqslant m < \alpha} (F_{m+1} \cup G_{m+1})$

Si $\Omega'_\alpha = \Omega$, on a alors (2.3). Si $\Omega'_\alpha \neq \Omega$ il ést nécessaire que $\alpha = +\infty$. Posons $\Omega_\infty = \Omega \setminus \Omega'_\infty$. Pour tout $\omega \in \Omega_\infty$, en vertu de (3.21), (3.22), la suite numérique $d(\overline{x}_n(\omega), \overline{x}_{n+1}(\omega))$ est décroissante, parsuite, tend vers une limite $\alpha(\omega) \geqslant 0$. Pour chaque $\omega \in \Omega_\infty$, en vertu de (2.1), en tenant compte de (3.20), on obtient

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} K_n(\omega) \leqslant \max \{ \overline{\lim_{t \to \alpha(\omega)}} f(\omega, t), \overline{\lim_{t \to \alpha(\omega)}} p(\omega, t)\} < 1$$

Il résulte alors de (2.22) que pour tout $\omega \in \Omega_\infty$, la suite $\{d(\overline{x}_n(\omega), \overline{x}_{n+1}(\omega))\}_{n=0}^{\infty}$ est majorée par une suite ayant une somme finie. Donc, il exist $\widetilde{x}(\omega) = \lim_{n \to \infty} x_n(\omega)$ Posons $\widetilde{x}(\omega) = x(\omega)$, $\{$si $\omega \in \Omega_\infty$. Il est clair, que $x(\omega)$, ainsi définie sur Ω, est mesurable et, d' après le lemme 3.4, satisfait à (2.3) C.Q.F.D.

3.3. Démonstration du théorème 2.2.

Lemme 3.7. se formule littéralement comme le lemme 3.4.

Démonstration. Par le mêne argument que celui utilisé dans la démonstration du lemme 3.4, on peut supposer que $x_n \neq x$. En utilisant (2.5), pour tout n pair, on a (le symbole ω_0 sera supprimé dans l'écriture)

$$d(x_{n+1}, T(x)) \leqslant D(S(\overline{x}_n), T(x)) \leqslant \alpha(d(\overline{x}_n, x)) \cdot \max \Big\{ d(\overline{x}_n, x), d(\overline{x}_n, S(\overline{x}_n)), d(x, T(x)), \frac{1}{2}\Big[d(\overline{x}_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T(x)) + d(x, x_{n+1})\Big]\Big\}$$

$$\leqslant \alpha(d(\overline{x}_n, x)) \cdot \max \Big\{ d(\overline{x}_n, x), d(\overline{x}_n, x_{n+1}), d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T(x)), \frac{1}{2}[d(\overline{x}_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T(x)) + d(x, x_{n+1})]\Big\}$$

Donc,

$$d(x, Tx) \leqslant \overline{\lim_{t\to 0}}\ \alpha(t)\ d(x, T(x))$$

ce qui n'est possible, en vertu de (2.4), que si $d(x,T(x)) = 0$

Lemme 3.8. se formule littéralement comme le lemme 3.5.

Démonstration. (Dans ce qui suit le symbole ω_0 sera omis). Si $x \in S(x)$ on a

$$d(x, T(x)) \leqslant D(S(x), T(x)) \leqslant \overline{\lim_{t\to 0}}\ \alpha(t)\ d(x, T(x))$$

ce qui n'est possible, en vertu de (2.4.) que si $d(x, T(x)) = 0$. De façon analogue, $x \in T(x)$ entraîne $x \in Sx$. C.Q.F.D.

Posons

$$\beta(\omega, t) = [3 - 2\alpha(\omega, t)] \,/\, t(1 - \alpha(\omega, t)]$$
$$A(\omega, t) = \alpha(\omega, t) + \beta(\omega, t) \cdot \mu$$

Il est évident que $\alpha(\omega, t)$, $\beta(\omega, t)$ satisfont respectivement aux hypothèses sur $\varphi_1(\omega, t)$, $\psi_1(\omega, t)$ de la Proposition 3,1 (avec $c_1 = 1$)

Lemme 3.9. se formule littéralement comme le lemme 3.6, en remplacant (3.12) par

$$r_1(\omega) = \min \{ d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega)),\ r(\omega)\, A(\omega, d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega))\,;\ d(\overline{u}(\omega), u(\omega))) \} \tag{3.23}$$

Démonstration. Posons

$$E = \{ \omega \in \widetilde{\Omega} \mid d(\overline{u}_0(\omega), u(\omega)) = 0 \}$$

D'après la Proposition 3.1, il existe une section étagée mesurable $\overline{u}(.)$ de $F \mid \widetilde{\Omega} \setminus E$ telle qu'on ait (3.10), (3.11) et

$$A(\omega, d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega))\,;\ d(\overline{u}(\omega), u(\omega))) < 1 \qquad (\forall \omega \in \widetilde{\Omega} \setminus E) \tag{3.24}$$

En tenant compte de (2.4) et du fait que $d(u(\omega), S(\omega, \overline{u}_0(\omega))) = 0$ $(\forall \omega \in \widetilde{\Omega})$, on a sur $\widetilde{\Omega} \setminus E$

$$d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) \leqslant d(\overline{u}(\omega), u(\omega)) + D(S(\omega, \overline{u}_0(\omega)), T(\omega, \overline{u}(\omega)))$$

En utilisant (2.5) on obtient

$$\left.\begin{array}{l} d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) \leqslant d(u(\omega), \overline{u}(\omega)) + \\ \alpha(\omega, d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega))) \max \{d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega)) + d(\overline{u}(\omega), u(\omega)), d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))\} \end{array}\right\} \quad (3.25)$$

On a donc

$$d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) \leqslant A(\omega, d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega)) ; d(\overline{u}(\omega), u(\omega))) \,.\, d(\overline{u}_0(\omega); \overline{u}(\omega)) \quad (3.26)$$

En effet, pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega} \setminus E$ si dans l'expression sous le signe maximum de (3.25) le premier terme est plus grand que le second, on a

$$d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) \leqslant \alpha(\omega, d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega))) \,.\, [d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega)) + d(\overline{u}(\omega), u(\omega))]$$

Dans le cas contraire on a

$$d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) \leqslant \alpha(\omega, d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega))) \,.\, d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) + d(\overline{u}(\omega), u(\omega))$$

ou

$$d(\overline{u}(\omega), T(\omega, \overline{u}(\omega))) \leqslant \frac{d(\overline{u}(\omega), u(\omega))}{1 - \alpha(\omega, d(\overline{u}_0(\omega), u(\omega)))}$$

Donc dans tous les deux cas on a (3.26)

Posons

$$G = \{\omega \in \widetilde{\Omega} \setminus E \mid A(\omega, d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega)); d(\overline{u}(\omega), u(\omega))) = 0\}$$

Comme $d(\overline{u}_0(\omega), \overline{u}(\omega))$ est étagée mesurable, on a $G \in \mathcal{A}$ On a évidemment $(3.9)_1 - (3.9)_2$.

Posons $\widetilde{\widetilde{\Omega}} = \widetilde{\Omega} \setminus (E \cup G)$. En vertu de (3.10), (3.24), (3.26), pour tout $\omega \in \widetilde{\widetilde{\Omega}}$ on a :

$$d(\overline{u}(\omega), \ T(\omega, \overline{u}(\omega))) < r_1(\omega) \quad (3.27)$$

òu $r_1(\omega)$ est donnée par (3.23).

L'existence d'une application mesurable $v(.) : \approx\!\!\Omega \to X$ telle que $v(\omega) \in T(\omega, \overline{u}(\omega))$, satisfaisant à (3.12) est alors assurée par le lemme 3.2.

Démonstration du théorème. La même que la démonstration du théorème 2.1, en remplaçant $f(\omega, t)$ et $p(\omega, t)$ par $\alpha(\omega, t)$; $g(\omega, t)$ et $q(\omega, t)$ par $\beta(\omega, t)$; $M(\omega, t; \tau)$ et $N(\omega, t; \tau)$ par $A(\omega, t; \tau)$ et en utilisant les lemmes 3.7 – 3.9 au lieu des lemmes 3.4 — 3.6.

3.4. Démonstration du Théoreme 2.3.

Lemme 3.10. *Sous les hypothèses du théorème, soit $\omega_0 \in \Omega$ fixé. Alors toute suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F(\omega_0)$ telle que*

$$d(z_n, z_{n+1}) \to 0, \ d(z_{n+1}, \ S(\omega_0, z_n))) \to 0 \qquad (n \to +\infty)$$

converge vers un point fixe de $S(\omega_0, .)$.

Demonstraion. (le symbol ω_0 sera omis dans l'écriture). Montrons d'abord que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Supposons au contraire qu'il existe deux sous-suites $\{z_{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_{q_n}\}_{n=1}^{\infty}$ avec $p_n > q_n > o$ telles que $d(z_{p_n}, z_{q_n}) \geqslant r > o$ On peut supposer que $d(z_{p_n-1}, z_{q_n}) < r$. Posons

$$t_k = d(z_k, z_{k-1}), \quad \tau_k = d(z_k, Sz_{k-1}), \quad c_n = d(z_{p_n}, z_{q_n}).$$

On a

$$r \leqslant c_n \leqslant d(z_{p_n-1}, z_{p_n}) + d(z_{p_n-1}, z_{q_n}) \leqslant r + t_{p_n}$$

Donc, $c_n \to r + o$. En utilisant (3.27) on obtient

$$c_n = d(z_{p_n}, z_{q_n}) \leqslant t_{p_n+1} + t_{q_n+1} + \tau_{p_n+1} + \tau_{q_n+1} + d(Sz_{p_n}, Sz_{q_n}) \leqslant$$
$$\leqslant (a_3^{(n)} + a_4^{(n)} + a_5^{(n)})c_n + (1 + a_1^{(n)} + a_4^{(n)})(t_{p_n+1} + \tau_{p_n+1}) +$$
$$(1 + a_2^{(n)} + a_3^{(n)})(t_{q_n+1} + \tau_{q_n+1})$$

où $a_i^{(n)} = \alpha_i(c_n)/c_n \qquad (i = \overline{1,5},\ n = 1, 2, \ldots)$

Faisant $n \to +\infty$, on obtient

$$r^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} c_n^2 \leqslant r.\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ [\alpha_3(c_n) + \alpha_4(c_n) + \alpha_5(c_n)]$$

ce qui, en vertu de (2.6'), est absurde.

Donc, $z_n \to z$, par suite, d'après l'hypothèse du lemme, $S(z_n) \to z$. Montrons que $z \doteq Sz$. Supposons au contraire que $z \neq Sz$. On a alors $z_n \neq z$ pour tout n assez grand, car sinon, $z_{n_i} = z$ pour les n_i d'une sous-suite $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$ et par suite,

$$d(z, Sz) = \lim_{i\to\infty} d(z, Sz_{n_i}) \leqslant \lim_{i\to\infty} d(z, z_{n_i+1}) + \lim_{i\to\infty} d(z_{n_i+1}, Sz_{n_i}) = 0$$

En utilisant (2.7) on a

$$d(z, Sz) \leqslant d(z, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, Sz_n) + d(Sz_n, Sz) \leqslant \frac{\alpha_2(d_n) + \alpha_3(d_n)}{d_n} d(z, Sz) + \varepsilon_n$$

où $\qquad d_n = d(z_n, z) > 0,\ \varepsilon_n \to 0\ (n \to +\infty)$

Donc, $$d(z, Sz) \leqslant \frac{\alpha_2(d_n) + \alpha_3(d_n)}{2} d(z, Sz) + \varepsilon_n \tag{3.28}$$

Comme on peut supposer dans (2.7) que $\alpha_1(t) \equiv \alpha_2(t)$, $\alpha_3(t) \equiv \alpha_4(t)$, on a $\dfrac{\alpha_2(d_n) + \alpha_3(d_n)}{d_n} < \dfrac{1}{2}$.

Il est alors clair que pour tout n suffisament grand, l'inégalité (3.28) mène à une contradiction.

Démonstration du théorème. L'unicité du point fixe découle d'un résultat connu dans le cas déterministe ([22]) Il reste à démontrer l'éxistence. On voit de (2.6), (2.6'), (2.7) qu'on peut supposer que

$$\alpha_1(\omega, t) \equiv \alpha_2(\omega, t), \qquad \alpha_3(\omega, t) \equiv \alpha_4(\omega, t)$$

Posons: $$f(\omega, t) = \frac{\alpha_2(\omega, t) + \alpha_4(\omega, t) + \alpha_5(\omega, t)}{t - \alpha_1(\omega, t) - \alpha_4(\omega, t)}$$
$$h(\omega, t) = \frac{t + \alpha_2(\omega, t) + \alpha_3(\omega, t)}{t[t - \alpha_1(\omega, t) - \alpha_4(\omega, t)]}$$
$$k(\omega, t) = \frac{t + \alpha_1(\omega, t) + \alpha_4(\omega, t)}{t[t - \alpha_1(\omega,) - \alpha_4(\omega, t)]}$$

On va construire des suites $\{\Omega_n\}_{o \leqslant n < \alpha} \subset \mathcal{A}(\alpha \in N \cup \{+\infty\})$ avec $\Omega_o = \Omega$, $\Omega_n \neq \phi$ $(\forall n : 0 \leqslant n < \alpha)$, $\{E_{n+1}\}_{o \leqslant n < \alpha} \subset \mathcal{A}$ telles que pour tout n: $0 \leqslant n < \alpha$ Ω_{n+1} et E_{n+1} soient disjoints et aient Ω_n, pour réunion, et si $\alpha < +\infty$ on ait $\Omega_{\alpha-1} = E_\alpha$, une suite $\{x_n(.)\}_{o \leqslant n < \alpha}$ telle que pour tout n: $o \leqslant n < \alpha$, $\overline{x}_n(.)$ soit une section étagée mesurable de $F|_{\Omega_n}$ et si l'on pose $x_{n+1}(\omega) = S(\omega, \overline{x}_n(\omega))$, alors, $x_{n+1}(\omega) = \overline{x}_n(\omega)$ pour tout $\omega \in E_{n+1}$ $(o \leqslant n < \alpha)$ et on ait:

$$d(\overline{x}_{n-1}(\omega), \overline{x}_n(\omega)) > 0 \tag{3.29$_n$}$$

$$d(\overline{x}_n(\omega), x_n(\omega)) < \frac{1}{n} \tag{3.30$_n$}$$

$$f(\omega, d(\overline{x}_{n-1}(\omega), \overline{x}_{n-2}(\omega))) + h(\omega, d(\overline{x}_{n-1}(\omega), \overline{x}_{n-2}(\omega))) \,.\, d(\overline{x}_{n-1}(\omega), x_{n-1}(\omega)) + \\ + k(\omega, d(\overline{x}_{n-1}(\omega), \overline{x}_{n-2}(\omega))) \,.\, d(\overline{x}_n(\omega), x(\omega)) < 1 \tag{3.31$_n$}$$

$$f(\omega, d(\overline{x}_n(\omega), \overline{x}_{n-1}(\omega))) + h(\omega, d(\overline{x}_n(\omega), \overline{x}_{n-1}(\omega))) \,.\, d(\overline{x}_n(\omega), x_n(\omega)) < 1 \tag{3.32$_n$}$$

pour tout $\omega \in \Omega_n$, si $3 \leqslant n+1 < \alpha$ et on ait $(3{,}29_1)$, (3.30_1), (3.32_1) pour tout $\omega \in \Omega_1$

Pourcela prenons une section étagée mesurable $\overline{x}_o(.)$ de F(*) et posons:

$$E_1 = \{\omega \in \Omega \mid x_1(\omega) = \overline{x}_o(\omega)\}, \text{ où } x_1(\omega) = S(\omega, \overline{x}_o(\omega)),\ \Omega_1 = \Omega \setminus E_1.$$

Il est évident que l'application $x_1(.)$ est mesurable, donc, E_1, $\Omega_1 \in \mathcal{A}_1$. Si $\Omega_1 = \phi$ la construction est achevée avec $\alpha = 1$. Dans le cas contraire, en appliquant la Proposition 3.1. (avec $m = 1$; $c_1 = 1$,

$$\varphi_1(\omega, t) \equiv f(\omega, t),\ \psi_1(\omega, t) \equiv h(\omega, t))$$

on obtient une section étagée mesurable $\overline{x}_1(.)$ de $F|_{\Omega_1}$ satisfaisant à (3.29_1), (3.30_1), et (3.32_1). Supposons qu'on a construit E_n, Ω_n, $\overline{x}_n(.)$ $(n = 0, 1, \ldots, p-1)$ satisfaisant à $(3.29_n) - (3.32_n)$ pour tout $n = 0, 1, \ldots p-1$.

En utilisant seulement (3.29_{p-1}). (3.30_{p-1}), (3.32_{p-1}) on construit Ω_p, E_p, $\overline{x}_p(.)$ comme suit. Il est évident que $x_p(\omega) = S(\omega, \overline{x}_{p-1}(\omega))$ est mesurable, donc

$$E_p \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega_{p-1} \mid \overline{x}_{p-1}(\omega) = x_p(\omega)\} \in \mathcal{A},\ \Omega_p \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{p-1} \setminus E_p \in \mathcal{A}$$

Si $\Omega_p = \phi$ la construction est acheveé avec $\alpha = p$ Dans le cas contraire. en utilisant la Proposition 3.1 (avec $\tilde{\Omega} = \Omega$, $m = 2$, $c_i = 1$, $(i = 1{,}2)$, $\varphi_1(\omega, t) \equiv f(\omega, d(\overline{x}_{p-1}(\omega), \overline{x}_{p-2}(\omega))) + h(\omega, d(\overline{x}_{p-1}(\omega), \overline{x}_{p-2}(\omega))) \,.\, d(\overline{x}_{p-1}(\omega), x_{p-1}(\omega))$

(*) Voir la note en bas de la page 33.

$\varphi_1(\omega, t) \equiv k(\omega, d(\overline{x}_{p-1}(\omega), \overline{x}_{p-2}(\omega)))$
$\varphi_2(\omega, t) \equiv f(\omega, t)$
$\psi_2(\omega, t) \equiv h(\omega, t)$
$\overline{u}_o(\omega) \equiv \overline{x}_{p-1}(x)$
$u(\omega) \equiv x_p(\omega).$

En tenant compte de (3.32_{p-1}), on obtient une section étagée mesurable $\overline{x}_p(.)$ de $F|_{\Omega_p}$ satisfaisant à (3.29_p). — (3.32_p).

Posons $\Omega'_\alpha = \bigcup_{0 \leqslant n < \alpha} E_{n+1}$, $\Omega_\alpha = \Omega \setminus \Omega'_\alpha$, $x(\omega) = \overline{x}_n(\omega)$ si $\omega \in E_{n+1}$. Si $\Omega_\alpha = \phi$, $x(.)$ est définie sur Ω et est un point fixe de S.

Si $\Omega_\alpha \neq \phi$. il est nécessaire que $\alpha = +\infty$

Posons
$$t_n(\omega) = d(\overline{x}_n(\omega), \overline{x}_{n-1}(\omega)) > 0$$
$$\tau_n(\omega) = d(\overline{x}_n(\omega), x_n(\omega)) \quad (\forall \omega \in \Omega_\infty)$$

Montrons que
$$t_n(\omega) \leqslant [f(\omega), t_{n-1}(\omega)) + h(\omega, t_{n-1}(\omega)) . \tau_{n-1}(\omega) + k(\omega, t_{n-1}(\omega)) . \tau_n(\omega)] \, t_{n-1}(\omega) \tag{3.33}$$

En utilisant (2.7) et en tenant compte du fait que $d(x_{n+1}(\omega)\ S(\omega, \overline{x}_n(\omega))) = 0$ pour tout $n \in N$ et pour tout $\omega \in \Omega_\infty$, on a

$$t_n(\omega) \leqslant \tau_n(\omega) + \tau_{n-1}(\omega) + a_1^{(n-1)}\left[t_n(\omega) + \tau_n(\omega)\right] + a_2^{(n-1)}\left[t_{n-1}(\omega) + \tau_{n-1}(\omega)\right] +$$
$$+ a_3^{(n-1)} \tau_{n-1}(\omega) + a_4^{(n)}\left[t_{n-1}(\omega) + t_n(\omega) + \tau_n(\omega)\right] + a_5^{(n-1)} t_{n-1}(\omega),$$

avec $a_i^{(n-1)} = \alpha_i\left(\omega, t_{n-1}(\omega)\right) / t_{n-1}(\omega)$ $(i - \overline{1,5})$. Donc,

$$t_n(\omega) \leqslant \left[\frac{a_1^{(n-1)} + a_4^{(n-1)} + a_5^{(n-1)}}{1 - a_1^{(n-1)} - a_4^{(n-1)}} + \left(\frac{1 + a_2^{(n-1)} + a_3^{(n-1)}}{1 - a_1^{(n-1)} - a_4^{(n-1)}}\right) \frac{\tau_{n-1}(\omega)}{t_{n-1}(\omega)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1 + a_1^{(n-1)} + a_4^{(n-1)}}{1 - a_1^{(n-1)} - a_4^{(n-1)}}\right) \frac{\tau_n(\omega)}{t_{n-1}(\omega)}\right] t_{n-1}(\omega)$$

D'òu, l'inégalité (3.33). Vu (3.31_n) on en conclut que $t_n(\omega) \downarrow t_\infty(\omega)$ ou $t_\infty(\omega) \geqslant 0$. Montrons que $t_\infty(\omega) \equiv 0$ $(\forall_\omega \in \Omega_\infty)$. Supposons au contraire que $t_\infty(\omega_o) > 0$ avec un $\omega_o \in \Omega_\infty$. En tenant compte de (3.30_n) on déduit de (3.33) que

$$t_\infty(\omega_o) \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} f(\omega_o, t_n(\omega_o)) . t_\infty(\omega_o)$$

ce qui, en vertu de (2.6'), n'est pas possible.

D'après le lemme 3.10, il existe $\tilde{x}(\omega) = \lim_{n \to \infty} \overline{x}_n(\omega)$ et $\tilde{x}(\omega) = S(\omega, \tilde{x}(\omega))$.

Il suffit de poser

$$x(\omega) = \begin{cases} x_{n-1}(\omega) & \text{si} \quad \omega \in E_n \\ & (n = 1, 2, \ldots) \\ \tilde{x}(\omega) & \text{si} \quad \omega \in \Omega_\infty \end{cases}$$

Le théorème est démontré.

Recu le 14 Avril 1979

REFERENCES

1. Alesina A., Massa S., Roux D. *Punti uniti di multifunzioni conditioni di tipo Boyd-Wong.* Bull. Un. Mat. Ital. 8 (1973) 29–34.

2. Boyd D., Wong J. *On nonlinear contractions* Amer. Math. Soc. 20 (1969) 458–464.

3. Castaing CH, and Valadier M. *Convex analysis and measurable multifunctions.* Lectures Notes N° 58, Springer – Verlag, 1977.

4. Phan Van Chuong. *Random version of Kakutani—Kyfan's fixed point theorems* (A paraître).

6. Engl E.W. *Random fixed point theorems for multivalued mappings.* Pacific J. Math., 76 (1978) 351–360.

7. Hans O. *Reduzierende zufalinge Transformationen.* Czechoslovak Math. J. 7 (82) 1957, 154–156,

8. Hans O. *Random fixed point theorems.* Czechoslovak Acad. Sci. Prague, 1957, 105 – 125.

9. Hardy G., Rogers T. *A generalisation of a fixed point theorem of Reich.* Canad Math. Bull., 16 (1973) 201–206.

10. Himmelberg C.J. *Measurable relations.* Fundamenta Math. LXXX VII (1975) 53–72.

11. Itoh S. *A Random fixed point theorem for multivalued contraction mappings.* Pac. J. Math. 68 (1977) 85–90.

12. Kuratowski K. and Ryll — Nardzewski C. *A general theorem on selectors.* Bull. Acad. Pol. Sc. (Sér. Math., Astr. et Phys.) XIII (1965) 397–403.

13. Mykherya A. and Reid A.T. Br. *Separable random operators I.* Revue Roumanie Math. Pures and Appl. 14 (1969) 1553–1561.

14. Ray B. *On simultaneous fixed points of multivalued maps.* Monashyte fur Math. (1972) 448–454.

15. Reid A.T. Br. *Random Integral Equations* Academic Press, New York, 1972.

16. Reid A.T. Br. *Fixed point theorems in probabilistic analysis* Bull. of Amer. Math. Soc. N° 82, 5 (1976) 641–657.

17. Reich S. *Fixed points of contractive functions* Bolletino U.M.I. (4) 5 (1972) 26–42.

18. Spacek A. *Zufaltige Gleichungen, Czechoslovak* Math. J. 5 (80) 463–468.

19. Do Hong Tan. *On the contraction principle.* Acta Math. Viet. T. 4, N° 2, (1979), 88–102.

20. Hoang Tuy *Combinatorial method for solving nonlinear equations.* – Preprint ZIMM Berlin, 1978. – Acta Math. Vietnamica, 1979 (à paraitre).

21. Wong C.S. *Common fixed point of two mappings* Pac. J. Math. 48 (1973) 299–312.

22. Wong C.S. *A generalized contractions and fixed point theorems.* Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974) 409–417.