PROPRIETES DE MODULE CONSERVEES PAR UNE EQUIVALENCE

VÕ VIẾT CẦN
Ecole superieure de Pédogogie de Hanoi

Soit $T: Mod(A) \xrightarrow{\approx} Mod(A)$

une équivalence de la catégorie des modules sur un anneau unitaire A. On se propose d'étudier les propriétés de module qui sont conservées par T. D'après la proposition 10.1, Chap. II [2], le foncteur T est une équivalence si et seulement s'il existe un foncteur

$S: Mod(A) \longrightarrow Mod(A)$

et des isomorphismes fonctoriels

$$\Phi : 1_{Mod(A)} \simeq TS \quad \text{et} \quad \psi : ST \simeq 1_{Mod(A)}$$

(S est appelé quasi-inverse de T).

Proposition 1 (i) *L'image par T du module O est le module O.*

(ii) *L'image par T de l'homomorphisme O est l'homomorphisme O.*

(iii) *L'image par T d'un monomorphisme (resp. épimorphisme) est un monomorphisme (resp. épimorphisme), d'où l'image par T d'un isomorphisme est un isomorphisme.*

(iv) *T conserve l'exactitude d'une suite.*

Démonstration (i) Si M est un module quelconque, on a

Hom $(TO, M) \simeq$ Hom$(O, SM) = \{O\}$, d'où $TO = O$.

(ii) Résulte des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "o"] \arrow[dr] & & B \\ & O \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TA \arrow[rr, "T(o)"] \arrow[dr] & & TB \\ & TO \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et de (i).

(iii) Prop.10.2, Chap. II [2].

(iv) Soit $X \to Y \to Z$

une suite exacte de modules. Si la suite,

$$TX \to TY \to TZ$$

n'était pas exacte, la suite $STX \to STY \to STZ$ ne serait pas exacte (Prop. 7. 1. Chap. II [2]). Mais dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} STX \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & STY \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & STZ \arrow[d, "\wr"] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

les flèches verticales dont des isomorphismes, la seconde ligne est exacte, donc il en est de même de la première ligne. On obtient une contradiction.

Proposition 2 $T(\varinjlim X_i) \simeq \varinjlim TX_i$

$T(\varprojlim X_i) \simeq \varprojlim TX_i$.

Démonstration Voir Prop. 10.2, Chap. II [2].

Corollaire 2.1 $T(\bigoplus_i X_i) \simeq \bigoplus_i TX_i$, $T(\prod_i X_i) \simeq \prod_i TX_i$.

Proposition 3 *Un module E est de type fini si et seulement si l'homomorphisme canonique*

$$\varphi : \varinjlim_I Hom_A(E, F_i) \to Hom_A(E, \varinjlim_I F_i)$$

est un isomorphisme pour tout système inductif $(F_i)_{i \in I}$ dans lequel I est un ensemble ordonné filtrant à droite et les homomorphismes

$$\mu_{ji} : F_i \to F_j, \ i \leqslant j$$

sont des monomorphismes. De plus l'isomorphisme φ est fonctoriel en E $(F_i)_{i \in I}$.

Démonstration Soient E un module de type fini et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un système de générateurs de E. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & Hom_A(E,F_i) \arrow[dl, "\gamma_i"'] \arrow[dr, "Hom\, id_E \times \mu_i"] & \\ \varinjlim Hom_A(E,F_i) \arrow[rr, "\varphi"] & & Hom_A(E, \varinjlim F_i) \end{tikzcd}$$

avec $\mu_i : F_i \to \lim F_i$. Chaque élément $f \in \varinjlim Hom_A(E, F_i)$ s'ecrit $f = \gamma_i(f_i)$ pour un $i \in I$, d'où $\varphi(f) = Hom(id_E \mu_i)(f_i) = \mu_i f_i$. Supposons qu'on ait $\varphi(f) = 0$. Alors on a $\mu_i f_i(x_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Il existe donc $j \geqslant i$ tel que $\mu_{ji} f_i(x_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. D'où $f = \gamma_i(f_i) = \gamma_j(\mu_{ji} f_i) = 0$. Donc φ est un monomorphisme. Pour tout $g \in Hom_A(E, \varinjlim F_i)$ on a

$$g(x_k) = \mu_{\alpha_k} y_{\alpha_k}, \text{ avec } y_{\alpha_k} \in F_{\alpha_k}, \ k = 1, \ldots, n.$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'indices k et l'ensemble I est filtrant on en déduit qu'il existe $\alpha \in I$ tel que

$$g(x_k) = \mu_\alpha(y_k) \text{ avec } y_k \in F_\alpha, \ k = 1, \ldots, n.$$

Les μ_{ji} étant des monomorphismes, donc les μ_i sont des monomorphismes, par conséquent on peut considérer les F_i comme des parties de $\varinjlim F_i$. D'où $g(E) \subset F_\alpha$, et l'homomorphisme g induit l'homomorphisme $h: E \to F_\alpha$ tel que $\mu_\alpha h = g$. On a $\varphi(\gamma_\alpha h) = \mu_\alpha h = g$, ce qui montre que φ est un épimorphisme. Nous avons donc démontré que φ est un isomorphisme si E est un module de type fini.

Pour démontrer la réciproque, considérons l'ensemble I des parties finies de E ordonné par

$$\forall i, j \in I \quad i \leqslant j \text{ si et seulement si } i \subset j.$$

I est ainsi un ensemble ordonné filtrant à droite. Si F_i est le sous-module de E engendré par i on obtient un système inductif $(F_i)_{i\in I}$ composé de sousmodules de type fini de E dans lequel

$$i \leqslant j \text{ si et seulement si } F_i \subset F_j,$$

et $\mu_{ji} : F_i \to F_j$ est l'injection canonique,

On a $E = \varinjlim F_i$, Dans ce cas supposons que φ soit un isomorphisme. Pour $\mathrm{id}_E \in \mathrm{Hom}_A(E, \varinjlim F_i)$ il existe $f \in \varinjlim \mathrm{Hom}(E, F_i)$ tel que $\varphi(f) = \mathrm{id}_E$, c'est à dire qu'il existe $i \in I$ et $f_i \in \mathrm{Hom}(E, F_i)$ tels que $\mu_i f_i = id_E$, d'où μ_i est un épimorphisme. Mais les μ_j, $j \in I$, sont des injections canoniques

$$\mu_j : F_j \to E$$

$$x \mapsto x$$

Dons μ_i est l'application identique, et on a $E = F_i$, ce qui montre que E est un module de type fini.

Pour montrer que φ est fonctoriel en E et $(F_i)_{i\in I}$ considérons un homomorphisme $u: E' \to E$ et une famille inductive d'homomorphismes $v_i : F_i \to F'_i$, $i \in I$, et prouvons que les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim \mathrm{Hom}(E, F_i) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(E, \varinjlim F_i) \\
{\scriptstyle \varinjlim \mathrm{Hom}(u,\, \mathrm{id}_{F_i})} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{Hom}(u,\, \mathrm{id}_{\varinjlim F_i})} \\
\varinjlim \mathrm{Hom}(E', F_i) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(E', \varinjlim F_i)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim \mathrm{Hom}(E, F_i) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(E, \varinjlim F_i) \\
{\scriptstyle \varinjlim \mathrm{Hom}(\mathrm{id}_E,\, v_i)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{id}_E,\, \varinjlim v_i)} \\
\varinjlim \mathrm{Hom}(E, F'_i) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(E, \varinjlim F'_i)
\end{array}$$

ce que l'on vérifie facilement. Remarquons que la fonctorialité de φ existe sans aucune hypothèse sur E et sur $(F_i)_{i\in I}$.

Corollaire 3.1. TE est un module de type fini si E l'est.

Démonstration. Soit $(F_i)_{i\in I}$ un système inductif de modules dans lequel I est un ensemble ordonné filtrant à droite et les $\mu_{ji}: F_i \to F_j$, $i \leqslant j$, sont des monomorphismes. Nous devons montrer que l'homomorphisme

$$\varphi : \varinjlim \mathrm{Hom}_A(TE, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(TE, \varinjlim F_i)$$

est un isomorphisme. D'abord notons que si S est un quasi-inverse de T, les SF_i, $i \in I$, forment un système inductif dans lequel les $S(\mu_{ij}): SF_i \to SF_j$ sont des monomorphismes (Prop. 1). Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim \operatorname{Hom}(TE, F_i) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(TE, \varinjlim F_i) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ \varinjlim \operatorname{Hom}(STE, SF_i) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(STE, \varinjlim SF_i) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des applications biunivoques déduites du système inductif d'applications biunivoques

$$\operatorname{Hom}(TE, F_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(STE, SF_i),\ i \in I.$$

On vérifie facilement que le diagramme ci-dessus est commutatif. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim \operatorname{Hom}(TE, F_i) & \xrightarrow[\text{(I)}]{\varphi} & \operatorname{Hom}(TE, \varinjlim F_i) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ \varinjlim \operatorname{Hom}(STE, SE_i) & \xrightarrow[\text{(II)}]{\varphi'} & \operatorname{Hom}(STE, \varinjlim SF_i) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ \varinjlim \operatorname{Hom}(E, SF_i) & \xrightarrow{\varphi''} & \operatorname{Hom}(E, \varinjlim SF_i) \end{array}$$

dans lequel le carré (I) est commutatif comme nous l'avons dit, quant au carré (II) dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes à cause de l'isomorphisme $E \simeq STE$, il est aussi commutatif en vertu de la propriété fonctorielle de φ'(Prop. 3), On en conclut que le contour extérieur du diagramme est commutatif. Or φ'' est un isomorphisme d'après la Prop. 3 donc φ est aussi un isomorphisme.

Corollaire 3. 2 Si M est un module sur un anneau commutatif A tel qu'il existe un module N satisfaisant à la condition $M \underset{A}{\otimes} N = A$, M est de type fini.

(M est dit inversible par rapport au produit tensoriel).

Démonstration Considérons l'équivalence

$$\begin{aligned} T: Mod(A) &\to Mod(A) \\ X &\longrightarrow M \underset{A}{\otimes} X \end{aligned}$$

Nous avons $T(A) = M_A \otimes A \simeq M$. Comme A est un A—module de type fini d'après la Prop. 3, $T(A)$ est de type fini, donc M aussi.

Corollaire 3.3 Soit M un module sur un anneau commutatif A. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) M est inversible par rapport au produit tensoriel,

(ii) M est un module projectif de rang 1.

Démonstration Voir [1], Chap. II, § 5 n°4, Théo. 3.

On remarque qu'avec le corollaire 3.2 on peut supprimer l'hypothèse «M est de type fini» dans le théorème 3 de [1].

Proposition 4 *Un module E a une présentation finie si et seulement si l'homomorphisme canonique*

$$\varphi:\ \varinjlim \mathrm{Hom}_A(E, F_i) \to \mathrm{Hom}_A(E, \varinjlim F_i)$$

est un isomorphisme pour tout système inductif $(F_i)_{i\in I}$ *dans lequel I est un ensemble ordonné filtrant à droite.*

Démonstration Soit E un module ayant une présentation finie. D'après l'hypothèse nous avons la suite exacte

$$L_1 \to L_0 \to E \to 0$$

dans lequel L_1 et L_0 sont des modules libres de type fini. Elle induit les suites exates suivantes

$$0 \to \mathrm{Hom}(E, F_i) \to \mathrm{Hom}\ (L_0, F_i) \to \mathrm{Hom}(L_1, F_i),$$
$$0 \to \varinjlim\mathrm{Hom}\,(E, F_i) \to \varinjlim\mathrm{Hom}\,(L_0, F_i) \to \varinjlim\mathrm{Hom}\,(L_1, F_i),$$
$$0 \to \mathrm{Hom}\,(E, \varinjlim F_i) \to \mathrm{Hom}\,(L_0, \varinjlim F_i) \to \mathrm{Hom}\,(L_1, \varinjlim F_i).$$

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \varinjlim\mathrm{Hom}\,(E, F_i) & \to & \varinjlim\mathrm{Hom}\,(L_0, F_i) & \to & \varinjlim\mathrm{Hom}\,(L_1, F_i) \\ & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi_0 & & \downarrow\varphi_1 \\ 0 \to & \mathrm{Hom}\,(E, \varinjlim F_i) & \to & \mathrm{Hom}\,(L_0, \varinjlim F_i) & \to & \mathrm{Hom}\,(L_1, \varinjlim F_i) \end{array} \qquad (2)$$

dans lequel les lignes sont exactes et les carrés sont commutatifs en vertu de la fonctorialité de φ. D'aprés la première partie de la démonstration de la proposition 3 φ_0 et φ_1 du diagramme (2) sont des monomorphismes. Nous allons montrer qu'ils sont des épimorphismes. Soient $g \in \mathrm{Hom}\,(L_0, \lim F_i)$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base du module libre L_0. Nous avons

$$g(e_k) = \mu_{\alpha_k} y_{\alpha_k} \text{ avec } y_{\alpha_k} \in F_{\alpha_k},\ k = 1, \dots, n.$$

Puisque I est filtrant à droite il existe $\alpha \in I$ tel que

$$g(e_k) = \mu_\alpha y_k \quad \text{avec} \quad y_k \in F_\alpha,\ k = 1, \dots, n.$$

Il en résulte qu'il existe un homomorphisme unique $f: L_0 \to F_\alpha$ défini par

$$f(e_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n$$

ce qui donne en tenant compte de la commutativité du triangle (1)

$$g = \mu_\alpha f = \varphi_0 \gamma_\alpha (f) = \varphi_0(\gamma_\alpha f)).$$

Donc φ_0 est un épimorphisme et il en est de même de φ_1 par une démonstration analogue. On en conclut que φ est aussi un isomorphisme.

Pour démontrer la réciproque, notons d'abord que pour tout module E il existe un système inductif de modules ayant une présentation finie $(F_i)_{i\in I}$, dans lequel I est un ensemble ordonné filtrant à droite, tel que $E = \varinjlim F_i$. Supposons que pour ce système inductif l'homomorphisme

$$\varphi:\ \varinjlim\mathrm{Hom}_A\,(E, F_i) \to \mathrm{Hom}_A\,(E, \varinjlim F_i)$$

soit un isomorphisme. Alors il existe $\alpha \in I$ et $f \in \mathrm{Hom}(E, F_\alpha)$ tels que $\mu_\alpha f = \mathrm{id}_E$. D'où μ_α est un épimorphisme et E est un facteur direct de F_α. Soit F un module tel que $F_\alpha = E \oplus F$. Nous avons la suite exacte

$$0 \to F \to F_\alpha \to E \to 0 \tag{3}$$

dans laquelle $F \simeq F_\alpha / E$, d'où F est de type fini. Comme F_α est un module de présentation finie, il existe donc une suite exacte

$$0 \to L_1 \to L_0 \to F_\alpha \to 0 \tag{4}$$

où L_0 est un module libre de type fini et L_1 un module de type fini. On voit facilement qu'on peut immerger (3) et (4) dans le diagramme commutatif suivant où les lignes et les colonnes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & L_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & L_0 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & F_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On en déduit que M est de type fini puisque F et L_1 le sont, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.1 TE a une présentation finie si E en a une.

Démonstration analogue à celle du Corol.3.1.

Définition Un module est dit pseudo-cohérent si tous ses sousmodules de type fini ont une présentation finie. Un module est dit cohérent s'il est pseudocohérent et de type fini.

Corollaire 4.2 TE est pseudo-cohérent(cohérent) si E l'est.

Démonstration Soit E un module pseudo-cohérent et un sous-module de type fini de TE. Nous avons l'injection canonique $\alpha : B \to TE$. Alors $S(\alpha) : SB \to STE \simeq E$ est un monomorphisme (Prop.1) et SB est de type fini(Corol.3.1). $\mathrm{Im}S(\alpha)$ est un sous-module de type fini de $STE \simeq E$ qui est pseudo-cohérent, donc $\mathrm{Im}S(\alpha)$ a une présentation finie, par conséquent SB ($\simeq \mathrm{Im}S(\alpha)$) a une présentation finie. Donc $B \simeq TSB$ a une présentation finie (Corol.4.1).

Proposition 5 *TE est projectif (injectif) si E l'est.*

Démonstration Soit $\sigma : B \to C$ un épimorphisme. Nous devons montrer que

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_{TE}, \sigma) : \mathrm{Hom}(TE, B) \to \mathrm{Hom}(TE, C)$$

est un épimorphisme. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(TE,B) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_{TE},\,\sigma)} & \mathrm{Hom}(TE,C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(E,SB) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_{E},\,S\sigma)} & \mathrm{Hom}(E,SC) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des applications biunivoques. Puisque $S(\sigma)$ est un épimorphisme (Prop.1) et E est un module projectif $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_E,S(\sigma))$ est un épimorphisme. Il en résulte que $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_{TE},\sigma)$ est un épimorphisme et TE est projectif.

On montrera de façon analogue que TE est injectif si E l'est.

Proposition 6 *TE est noethérien si E l'est.*

Démonstration Soit B un sous- module de TE et $\alpha: B \to TE$ l'injection canonique. Alors $S(\alpha): SB \to STE$ est un monomorphisme (Prop.1) et $\mathrm{Im}S(\alpha)$ étant un sous-module le $STE \simeq E$ est de type fini. Il en résulte que SB ($\simeq \mathrm{Im}S(\alpha)$) est de type fini. Par conséquent B ($\simeq TSB$) est de type fini, ce qui montre que TE est noethérien.

Corollaire 6.1 Si M est un module projectif de rang 1 sur un anneau noethérien A, M est noethérien.

Démonstration D'après le Corol 3.3 le module M est inversible par rapport au produit tensoriel et $M \simeq T(A)$ avec T l' équivalence définie dans le Corol.3.2. Puisque $T(A)$ est noethérien (Prop.6)M l'est.

Proposition 7 *TE est artinien si E l'est.*

Démonstration Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-modules de TE. Nous avons les injections canoniques $\alpha_i: B_i \to TE$ et les monomorphismes $S(\alpha_i)$: $SB_i \to STE \simeq E$. STE étant artinien, la famille $(\mathrm{Im}S(\alpha_i))_{i \in I}$ de sous modules de STE possède un élément minimal, soit $\mathrm{Im}S(\alpha_j)$. Nous allons montrer que B_j est un élément minimal de la famille $(B_i)_{i \in I}$. Supposons qu'il existe $k \in I$ tel que $B_k \subset B_j$, $B_k \neq B_j$ Alors avec l'injection canonique $v: B_k \to B_j$, $v \neq 1$, nous avons $\alpha_j v = \alpha_k$, d'où $S(\alpha_k) = S(\alpha_j)S(v)$ et $\mathrm{Im}S(\alpha_k) \subset \mathrm{Im}S(\alpha_j)$. De plus $\mathrm{Im}S(\alpha_k) \neq \mathrm{Im}S(\alpha_j)$ car $S(v)$ n'est pas un isomorphisme.Donc $\mathrm{Im}S(\alpha_j)$ n'est pas un élément minimal, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Proposition 8 *TE est de longueur finie si E l'est.*

Démonstration C'est une conséquence des Prop. 6 et 7 car E est de longueur finie si et seulement si E est en même temps noethérien et artinien.

Corollaire 8.1 Si M est un module inversible par rapport au produit tensoriel sur un anneau commutatif artinien A, M est de longueur finie.

Démonstration Nous avons $M \simeq T(A)$ avec T l'équivalence définie dans le Corol. 3.2. Puisque A est un anneau artinien, il est aussi noethérien d'où $T(A)$

est en même temps artinien et noethérien (Prop. 6 et 7), donc $T(A)$ et par conséquent M est de longueur finie.

Proposition 9 *TE est simple si E l'est.*

Démonstration Soit $B \neq 0$ un sous-module de TE et $\alpha: B \to TE$ l'injection canonique. Alors $S(\alpha): SB \to STE$ est un monomorphisme (Prop. 1) et $SB \neq 0$ (Prop 1(i)). Puisque $\operatorname{Im} S(\alpha)$ est un sous-module du module simple $STE \simeq E$ et puisque $\operatorname{Im} S(\alpha) \neq 0$, nous avons $\operatorname{Im} S(\alpha) = STE$. Ceci montre que $S(\alpha)$ et par conséquent α est un épimorphisme. Donc $B = TE$ et TE est un module simple.

Proposition 10 *TE est semi-simple si E l'est.*

Demonstration Soit $E = \bigoplus_i X_i$ avec X_i modules simples Nous avons $TE \simeq \bigoplus_i TX_i$ (Corol. 2.1) avec TX_i simples (Prop. 9). Donc TE est semi-simple.

REFERENCES

1. N. Bourbaki: *Algèbre commutative* (Traduction russe, 1971)
2. B. Mitchell: *Theory of categories* (New York, Academic Press, 1965)