ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 5, N° 1 (1980)

SUR CERTAINES SOMMES BINOMIALES

LE VAN THIEM
Institut de Mathematiques de Hanoi
HO VAN HOA
Université de Hochiminh Ville

Dans la résolution de certains problèmes hydrodynamiques, nous sommes amenés à calculer des sommes telles que

$$A = \sum_{k=0}^{l-q} (-1)^k \binom{n+2l-k-1}{2l-k} \binom{2l-k}{2l-2k} \binom{2l-2k}{l-k+q}, \quad n \geqslant 1,\ l \geqslant q \geqslant 0,$$

$$B = \sum_{k=0}^{l-q+1} (-1)^k \binom{n+2l-k}{2l-k+1} \binom{2l-k+1}{2l-2k+1} \binom{2l-2k+1}{l-k+q}.$$

En posant, dans la première expression :

$$l-q=\beta,\ n-1=N,\ 2l=L$$

nous avons

$$A = \sum_{k=0}^{\beta} (-1)^k \binom{N+L-k}{L-k} \binom{L-k}{L-2k} \binom{L-2k}{L-k-k}, \qquad N \geqslant 0,\ L \geqslant 2\beta.$$

Changeons l'indice de sommation en prenant $k' = \beta - k$, *A devient*

$$A = \sum_{k'=0}^{\beta} (-1)^{\beta-k'} \binom{N+L-\beta+k'}{L-\beta+k'} \binom{L-\beta+k'}{L-2\beta+2k'} \binom{L-2\beta+2k'}{L-2\beta+k'}$$

$$= \sum_{k'=0}^{\beta} \frac{(-1)^{\beta-k'}(N+L-\beta+k')!\,(L-\beta+k')!\,(L-2\beta+2k')!}{(L-\beta+k')!\,(L-2\beta+2k')!\,(\beta-k')!\,(L-2\beta+k')!\,k'!} \cdot \frac{\beta!\,(N+\beta)!}{\beta'!\,(N+\beta)!}$$

$$= (-1)^\beta \binom{N+\beta}{N} \sum_{k'=0}^{\beta} (-1)^{k'} \binom{N+L-\beta+k'}{N+\beta} \binom{\beta}{k'}.$$

Dans un article ultérieur [1], nous avons démontré que l'expression

$$P(\alpha, \beta, a; m) = \sum_{k=\alpha+m}^{\beta} (-1)^k \binom{-\alpha-m+\beta}{-\alpha-m+k} \binom{a-m+k}{a-m+\alpha}$$

est indépendante de m, égale à 0 si $a + \alpha \leqslant \beta - \alpha$ et égale à $(-1)^{\beta} \binom{a+\alpha}{a-\beta+2\alpha}$ si $a + \alpha > \beta - \alpha$.

Il est facile de voir que ceci reste vrai, si dans P nous remplaçons

$$\binom{a-m+k}{a-m+\alpha}$$

par

$$\binom{a'-m+k}{a-m+\alpha}$$

pourvu que $a - a' \leqslant m \leqslant \min(a+\alpha,\ \beta-\alpha)$, c'est à dire que

$$P(\alpha, \beta, a, a'; m) =$$

$$= \sum_{k=\alpha+m}^{\beta} (-1)^k \binom{-\alpha-m+\beta}{-\alpha-m+k} \binom{a'-m+k}{a-m+\alpha} = \begin{cases} 0 \text{ si } a+\alpha \leqslant \beta-\alpha, \\ (-1)^{\beta} \binom{a'+\alpha}{a-\beta+2\alpha} \text{ si } \beta-\alpha \leqslant a+\alpha. \end{cases}$$

Appliquons cette égalité à A, nous avons

$$A = (-1)^{\beta} \binom{N+\beta}{N}^{P} P(0, \beta, N+\beta, N+L-\beta; 0)$$

$$= (-1)^{\beta} \binom{N+\beta}{N} (-1)^{\beta} \binom{N+L-\beta}{N} = \binom{N+\beta}{N} \binom{N+L-\beta}{N}.$$

En revenant à n et l, nous avons

$$\sum_{k=0}^{l-q} (-1)^k \binom{n+2l-k-1}{2l-k} \binom{2l-k}{2l-2k} \binom{2l-2k}{l-k+q} = \binom{n+l-q-1}{n-1} \binom{n+l+q-1}{n-1};$$

Nous trouvons de la même manière que

$$\sum_{k=0}^{l-q+1} (-1)^k \binom{n+2l-k}{2l-k+1} \binom{2l-k+1}{2l-2k+1} \binom{2l-2k+1}{l-k+q} = \binom{n+l+q-1}{n-1} \binom{n+l-q}{n-1}.$$

Reçu le 30 Novembre 1978

BIBLIOGRAPHIE

[1] Le van Thiem et Ho van Hoa: *Sur certaines relations entre les coefficients binomiaux, Acta Mathematica Vietnamica* Tome 2 N°2 (1978), p. 29–34.

[2] Le van Thiem: *Une relation entre les coefficients binomiaux* Tap-chi Toan-hoc, Tome VI, N°1 (1978), p. 29–32 (en Vietnamien).

[3] Ho van Hoa: *Généralisation d'une relation entre les coeffcients binomiaux*, Tap-chi Toan-hoc, Tome VII, N°1 (sous presse).