ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 5, N° 1 (1980)

CONDITIONS DE PROLONGEMENT HARMONIQUE ET SES APPLICATIONS

NGUYÊN THỪA HỢP
Université de Hanoi

Beaucoup de propriétés des fonctions analytiques se généralisent aux fonction harmoniques à n variables. Parmi eux, on a bien connu des propriétés classiques: l'analycité, le theorème de Liouville, le développement en série etc...

Il est intéressant, dans le domaine des fonctions harmoniques, d'étudier des modèles analogues aux problèmes aux limites des fonctions analytiques comme les problèmes du saut, les problèmes de Riemann et de Hilbert etc... Relativement à ce sujet, les premiers résultats sur les problèmes du saut ont été obtenus dans [5], [6].

Dans la théorie des problèmes aux limites des fonctions analytiques, on sait bien l'importance des conditions de prolongement analytique d'une fonction donnée sur une courbe fermée à l'intérieur ou à l'extérieur de cette courbe [3]. Dans le présent article, nous établissons les conditions analogues: celles de prolongement harmonique. Plus précisément, nous étudions les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe dans un domaine une fonction harmonique telle que les valeurs limites de cette fonction et de sa dérivée normale sur la frontière du domaine soient égales à des fonctions données.

À titre d'applications, nous étudions la résolution effective des diverses équations du potentiel et donnons la représentation intégrale d'une fonction harmonique dans un domaine multiplement connexe.

§1 — CONDITIONS DE PROLONGEMENT HARMONIQUE

Dans la suite, sont adoptées les notations suivantes:

a) E_m: espace euclidien réel à m dimensions avec le point générique $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

b) Ω^+: domaine multiplement connexe, borné, à frontière de Liapounov $S = \bigcup_{i=0}^{n} S_i$ dont toutes les S_i, $i = 0, 1, \dots, n$ sont disjoints et S_0 enferme toutes les S_i restantes dans son intérieur.

c) $\Omega^- = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega_i^-$: complément de $\Omega^+ + S$ par rapport à l'espace entier E_m. Il est formé par $n+1$ parties connexes Ω_i^-, limitées par S_i. Ω_0^- est donc la partie extérieure, contenant le point à l'infini.

d) $f^+(y)$ (resp. $f^-(y)$): valeur limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $y \in S$, tout en restant dans Ω^+ (resp. dans Ω^-).

e) n_y: normale de S au point $y \in S$; n_y^+ (resp. n_y^-): normale n_y, orientée vers Ω^+ (resp. vers Ω^-).

f) $\dfrac{\partial f^{\pm}(y)}{\partial n_y^+}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{\partial f^{\pm}(y)}{\partial n_y^-}\right)$: limite de la dérivée $\dfrac{\partial f(x)}{\partial n_y^+}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{\partial f(x)}{\partial n_y^-}\right)$ lorsque $x \in \Omega^{\pm}$, tend vers $y \in S$, tout en restant sur la normale n_y.

g) $r_{xy} = |x - y|$: distance euclidien de deux points x et y de E_m.

h) $|S_1|$: mesure superficielle de la sphère unité de E_m.

i) $C^k(\Omega^+ + S)$ (resp. $C^k(\Omega^- + S)$): ensemble des fonctions qui avec toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant k$ sont continues dans Ω^+ (resp. dans Ω^-) et continûment prolongeables sur S (le point à l'infini dans Ω^- étant exclus).

Théorème 1. Soient $\mu(y)$ une fonction holdérienne et $\nu(y)$ une fonction continue, données sur une surface Liapounov fermée de l'espace euclidien E_m $m \geqslant 3$. Pour qu'il existe une fonction harmonique $u(x) \in C^1(\Omega^+ + S)$ vérifiant les relations:

$$\left.\begin{aligned} u^+(y) &= \mu(y) \\ \frac{\partial u^+(y)}{\partial n_y^+} &= \nu(y) \end{aligned}\right\} y \in S \tag{1.1}$$

il faut et il suffit que l'égalité

$$\Phi(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial_{xy}^{m-2}} \left(\frac{1}{r_{xy}^{m-2}} \right) - \nu(y) \frac{1}{r_{xy}^{m-2}} \right] dS_y \equiv 0. \tag{1.2}$$

soit satisfaite pour tout $x \in \Omega^-$. La condition (1.2) a la forme équivalente:

$$-\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{y_0y}^{m-2}} \right) - \nu(y) \frac{1}{r_{y_0y}^{m-2}} \right] dS_y = 0, \forall y_0 \in S \tag{1.3}$$

La condition nécessaire est triviale en vertu de l'harmonicité de $u(x)$ dans Ω^+.

Supposons maintenant que l'on ait (1.2). De cette égalité, en faisant tendre $x \in \Omega^-$ vers $y_0 \in S$, on obtient:

$$\Phi^-(y_0) = -\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{y_0y}^{m-2}} \right) - \nu(y) \frac{1}{r_{y_0y}^{m-2}} \right] dS_y = 0$$

D'autre part, en faisant tendre $x \in \Omega^+$ vers $y_0 \in S$, on a:

$$\Phi^+(y_0) = \frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\frac{1}{r_{y_0y}^{m-2}}\right) - \nu(y)\frac{1}{r_{y_0y}^{m-2}}\right] dS_y$$

Par suite

$$\mu(y_0) = \Phi^+(y_0) \quad \forall y_0 \in S \tag{1.4}$$

dans laquelle $\Phi(x)$, défine par l'intégrale (1.2), est manifestement une fonction harmonique de $C^1(\Omega^+ + S)$.

Grâce à l'hypothèse formulée dans le théorème, l'existence de la dérivée normale du potentiel de simple couche

$$\frac{\partial}{\partial n_{y_0}^+}\left(\int_S \nu(y)\frac{1}{r_{xy}^{m-2}}\, dS_y\right)^-_{x=y_0}$$

est évidente, ce qui implique, en vertu de (1.2), l'existence de la dérivée normale du potentiel de double couche

$$\frac{\partial}{\partial n_{y_0}^+}\left(\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\right)\left(\frac{\partial}{r_{xy}^{m-2}}\, dS_y\right)^-_{x=y_0}$$

Par suite, avec les conditions imposées, il résulte du théorème de Liapounov [1]:

$$\frac{\partial}{\partial n_{y_0}^+}\left(\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\frac{1}{r_{xy}^{m-2}}\right) dS_y\right)^+_{x=y_0} = \frac{\partial}{\partial n_{y_0}^+}\left(\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\frac{1}{r_{xy}^{m-2}}\right) dS_y\right)^-_{x=y_0} \tag{1.5}$$

En dérivant $\Phi(x)$ suivant la direction normale $n_{y_0}^+$, en faisant tendre $x \in \Omega^- \cap n_{y_0}$, puis $x \in \Omega^+ \cap n_{y_0}$ vers $y_0 \in S$, et en soustrayant les résultats obtenus, on tire de (1.2) et de (1.5):

$$\nu(y_0) = \frac{\partial\Phi^+_{(y_0)}}{\partial n_{y_0}^+}, \quad \forall y_0 \in S \tag{1.6}$$

(1.4) et (1.6) nous donnent (1.1).

L'équivalence de (1.2) et (1.3) s'établit aisément si l'on remarque que l'égalité (1.3) exprime le fait que:

$$\Phi^-(y_0) = 0, \quad \forall y_0 \in S$$

on ce qui revient au même:

$$\Phi(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \Omega^-$$

puisque $\Phi(x)$ est harmonique dans Ω^- et régulière à l'infini. Le théorème est donc démontré.

Remarque. Dans [1], le théorème de Liapounov est démontré pour le cas de E_3, mais le raisonnement y est valable pour E_m avec m quelconque.

Théorème 2. Soient $\mu(y)$ une fonction holdérienne, $\nu(y)$ une fonction continue, données sur une surface de Liapounov fermée S de l'espace euclidien E_m, $m \geqslant 3$, Pour qu'il existe une fonction harmonique $u(x) \in C^1(\Omega^- + S)$ régulière à l'infini ($u(\infty) = 0$), vérifiant les relations

$$\left.\begin{aligned} u^-(y) &= \mu(y) \\ \frac{\partial u^-(y)}{\partial n^-_y} &= \nu(y) \end{aligned}\right\} \forall y \in S \qquad (1\text{-}7)$$

il faut et il suffit que l'égalité

$$\Phi(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n^-_y}\left(\frac{1}{r^{m-2}_{xy}}\right) - \nu(y) \frac{1}{r^{m-2}_{xy}}\right] dSy \equiv 0 \qquad (1\text{-}8)$$

soit satisfaite pour tout $x \in \Omega^+$. La condition a la forme équivalente (1-8)

$$-\frac{1}{2}\mu(y_o) + \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n^-_y}\left(\frac{1}{r^{m-2}_{y_oy}}\right) - \nu(y) \frac{1}{r^{m-2}_{y_oy}}\right] dS_y = 0, \forall y_o \in S. \qquad (1\text{-}9)$$

Supposons que (1.7) soit réalisée. Alors, pour tout $x \in \Omega^+$ on a en vertu de l'harmonicité de $u(x)$:

$$\frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n^-_y}\left(\frac{1}{r^{m-2}_{xy}}\right) - \nu(y) \frac{1}{r^{m-2}_{xy}}\right] dS_y +$$

$$+ \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_{S_R} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial n^+_y}\left(\frac{1}{r^{m-2}_{xy}}\right) - \frac{\partial u(y)}{\partial n^+_y} \frac{1}{r^{m-2}_{xy}}\right] dS_y = 0$$

où S_R est une sphère de centre O et de rayon R assez grand, n^+_y est la normale de S_R au point y, orientée vers le centre O de la sphère. Sur S_R, on a bien:

$$|u(y)| \leqslant \frac{C}{R^{m-2}}, \quad \left|\frac{\partial u(y)}{\partial n^+_y}\right| \leqslant \frac{C}{R^{m-1}}$$

Par conséquent, l'intégrale sur S_R tend vers zéro lorsque $R \to \infty$ et on obtient (1.8).

Réciproquement, supposons que l'on ait (1.8) En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, on a:

$$\left.\begin{aligned} \mu(y_o) &= \Phi^-(y_o) \\ \nu(y_o) &= \frac{\partial \Phi^-(y_o)}{\partial n^-_{y_o}} \end{aligned}\right\} \forall y_o \in S$$

où $\Phi(x)$ est l'intégrale considérée dans (1.8). L'équivalence de (1.8) et de (1.9) est manifeste. Le théorème est démontré.

Théorème 3. Soient $\mu(y)$ une fonction holdérienne et $\nu(y)$ une fonction continue, données sur une surface de Liapounov fermée S de l'espace euclidien E_m, $m \geqslant 3$. Pour qu'il existe une fonction $u(x) \in C^1(\Omega^- + S)$, harmonique dans Ω^-, ayant à l'infini la partie principale donnée $P_r(x)$:

$$u(x) = P_r(x) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

($P_r(x)$ est un polynôme harmonique d'ordre r) et vérifiant les conditions:

$$\left.\begin{aligned} u^-(y) &= \mu(y) \\ \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-} &= \nu(y) \end{aligned}\right\} \forall y \in S \tag{1.10}$$

il faut et il suffit que l'égalité

$$\Phi(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_S \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^-} \left(\frac{1}{r_{xy}^{m-2}} \right) - \nu(y) \frac{1}{r_{xy}^{m-2}} \right] dS_y + P_r(x) \equiv 0 \tag{1.11}$$

soit satisfaite pour tout $x \in \Omega+$. La condition (1.11) a la forme équivalente:

$$-\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_S \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^-} \left(\frac{1}{r_{y_0 y}^{m-2}} \right) - \nu(y) \frac{1}{r_{y_0 y}^{m-2}} \right] dS_y + P_r(y_0) = 0,$$

$$\forall y_0 \in S. \tag{1.12}$$

On démontre aisément le théorème en remarquant que la fonction $u(x) - P_r(x)$ vérifie les conditions du théorème 2 et que pour tout $x \in \Omega^+$, on a

$$P_r(x) = -\frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_S \left[P_r(y) \frac{\partial}{\partial n_y^-} \left(\frac{1}{r_{xy}^{m-2}} \right) - \frac{\partial P_r(y)}{\partial n_y^-} \frac{1}{r_{xy}^{m-2}} \right] . dS_y$$

La formulation des théorèmes analogues pour l'espace euclidien E_2 exige une étude un peu plus délicate.

Théorème 2'. Soient $\mu(y)$ une fonction holdérienne, $\nu(y)$ une fonction continue, données sur une courbe de Liapounov fermée Γ de l'espace euclidien E_2. Pour qu'il existe une fonction $u(x) \in C^1(\Omega^- + \Gamma)$, harmonique dans Ω^-, régulière à l'infini ou y admettant au plus le pôle logarithmique et vérifiant les relations

$$\left.\begin{aligned} u^-(y) &= \mu(y) \\ \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-} &= \nu(y) \end{aligned}\right\} \forall y \in \Gamma \tag{1.13}$$

il faut et il suffit que l'égalité:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \left[\pi(y) \frac{\partial}{\partial n_y^-} \left(\log \frac{1}{r_{xy}} \right) - \nu(y) \log \frac{1}{r_{xy}} \right] ds_y \equiv const. \tag{1.14}$$

soit satisfaite pour tout $x \in \Omega^+$. La condition (1.14) a la forme équivalente:

$$-\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^-} \left(\log \frac{1}{r_{y_0 y}} \right) - \nu(y). \log \frac{1}{r_{y_0 y}} \right] ds_y = const,$$

$$\forall y_0 \in \Gamma. \tag{1.15}$$

Admettons que (1.13) soit satisfaite. Grâce à l'harmonicité de $u(x)$ dans Ω^-, on a pout $x \in \Omega^+$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^-}\left(\log\frac{1}{r_{xy}}\right)-\nu(y)\log\frac{1}{r_{xy}}\right]ds_y+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left[u(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log\frac{1}{r_{xy}}\right)-\frac{\partial u}{\partial n_y^+}.\log\frac{1}{r_{xy}}\right]ds_y=0 \tag{1.16}$$

où Γ_R est une circonférence de centre $A(a_1, a_2) \in \Omega^+$ et de rayon R assez grand, n_y^+ est la normale de Γ_R au point y, orientée vers A. Par hypothèse, la fonction harmonique $u(x)$ admet à l'infini au plus le pôle logarithmique, par suite elle a le développement :

$$u(x) = k \log R(x) + \varphi(x)$$

où $R(x) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$ et $\varphi(x)$ est une fonction harmonique dans Ω^-, régulière à l' infini.

D' autre part, on peut écrire :

$$\log\frac{1}{r_{xy}} = -\log r_{xy} = -\log R(y) + \psi(x, y)$$

dans lequel $R(y) = \sqrt{(y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2}$ et $\psi(x, y)$ est une fonction harmonique en y dans Ω^- et tend vers zéro uniformément par rapport à tout $x \in \Omega^+$ lorsque $R(y) \to \infty$. Il en résulte :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left[u(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log\frac{1}{r_{xy}}\right)-\frac{\partial u}{\partial n_y^+}(y).\log\frac{1}{r_{xy}}\right]ds_y=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left[\varphi(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\log R(y)-\frac{\partial\varphi(y)}{\partial n_y^+}\log R(y)\right]ds_y+$$

$$+\frac{k}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left[\log R(y).\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial n_y^+}-\psi(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\log R(y)\right]ds_y+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left[\varphi(y)\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial n_y^+}-\psi(x,y).\frac{\partial\varphi(y)}{\partial n_y^+}\right]ds_y = I_1 + I_2 + I_3.$$

I_2, I_3, tendent vers zéro lorsque $R \to \infty$, puisque pour $y \in \Gamma_R$, $\varphi(y)$ et $\psi(x, y)$ admettent des évaluations uniformes par rapport à tout $x \in \Omega^+$:

$$|\varphi(y)| \leqslant A, \left|\frac{\partial\varphi(y)}{\partial n_y^+}\right| \leqslant \frac{A}{R^2}, |\psi(x,y)| \leqslant \frac{A}{R}, \left|\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial n_y^+}\right| \leqslant \frac{A}{R^2}.$$

Par suite :

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left[u(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log\frac{1}{r_{xy}}\right)-\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+}.\log\frac{1}{r_{xy}}\right]ds_y=$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left[\varphi(y)\frac{\partial}{\partial n^+_y}\log R(y) - \log R(y)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial n^+_y}\right] ds_y =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi R}\int_{\Gamma_R}\varphi(y)\, ds_y = \varphi(\infty).$$

Alors (1.16) nous donne:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n^-_y}\left(\log\frac{1}{r_{xy}}\right) - \nu(y)\log\frac{1}{r_{xy}}\right] ds_y = -\varphi(\infty),\ \ \forall x\in\Omega^+ \qquad (1.17)$$

et (1.14) est donc démontré avec la valeur de la constante égale à $-\varphi(\infty)$.

Réciproquement, supposons que l'on ait (1.14). En désignant la constante du second membre de (1.14) par C, nous considérons la fonction:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n^-_y}\left(\log\frac{1}{r_{xy}}\right) - \nu(y)\log\frac{1}{r_{xy}}\right] ds_y - C$$

Alors, en faisant tendre $x\in\Omega^+$, puis $x\in\Omega^-$, vers $y_0\in S$ et en soustrayant les résultats obtenus, nous avons en utilisant (1.14):

$$\Psi^-(y_0) - \Psi^+(y_0) = \psi^-(y_0) = \mu(y_0) \qquad (1.18)$$

De même. en dérivant $\Psi(x)$ suivant la direction normale n^-_y, et faisant usage du raisonnement déjà connu, nous trouvons:

$$\frac{\partial\Psi^-(y_0)}{\partial n^-_{y_0}} - \frac{\partial\Psi^+(y_0)}{\partial n^-_{y_0}} = \frac{\partial\Psi^-(y_0)}{\partial n^-_{y_0}} = \nu(y_0) \qquad (1.19)$$

(1.18) et (1.19) nous donnent (1.13) avec $u(x) = \Psi(x)$. Cette fonction admet à l'infini le pôle au plus logarithmique. Enfin l'équivalence de (1.14) et (1.15) est manifeste.

Exemple — Soient $A\,(a_1, a_2)\in\Omega^+$ et $R(x) = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}$. Considérons la fonction de Green du problème de Dirichlet extérieur de l'équation de Laplace, ayant le pôle à l'infini:

$$G(x,\infty) = \frac{1}{2\pi}\log R(x) + g(x) \qquad (1.20)$$

où $g(x)\in C^1(\Omega^- + \Gamma)$ est harmonique dans Ω^-. régulière à l'infini. Elle vérifie la condition limite:

$$G(y,\infty) = 0 \qquad \forall y\in\Gamma \qquad (1.21)$$

D'après le théorème 2', il s'ensuit:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\log\frac{1}{r_{xy}}\cdot\frac{\partial G(y,\infty)}{\partial n^-_y}\, ds_y = g(\infty),\ \forall x\in\Omega^+ \qquad (1.22)$$

L'égalité (1.22) nous sera très utile dans la suite.

Remarque. Il est à remarquer que

$$G(x,\infty) = 0,\quad \forall x\in\Omega^-_i,\quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (1.23)$$

Théorème 1'. Soient $\mu(y)$ une fonction holdérienne, $\nu(y)$ une fonction continue, données sur une courbe de Liapounov fermée Γ de l'espace euclidien E_2. Supposons que Γ soit telle que la fonction $g(x)$ dans l'expression de la fonction de Green (1.20) vérifie la condition

$$g(\infty) \neq 0 \tag{1.24}$$

Alors pour qu'il existe une fonction $u(x) \in C^1(\Omega^+ + \Gamma)$, vérifiant les relations:

$$\left.\begin{aligned} u^+(y) &= \mu(y) \\ \frac{\partial u^+(y)}{\partial n_y^+} &= \nu(y) \end{aligned}\right\} \forall y \in \Gamma. \tag{1.25}$$

il faut et il suffit que l'égalité

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\log \frac{1}{r_{xy}}\right) - \nu(y) \log \frac{1}{r_{xy}} \right] ds_y \equiv 0 \tag{1.26}$$

soit satisfaite pour tout $x \in \Omega^-$. La condition (1.26) a la forme équivalente:

$$-\frac{1}{2} \mu(y_o) + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\log \frac{1}{r_{yoy}}\right) - \nu(y) \log \frac{1}{r_{yoy}}\right] ds_y = 0, \ \forall y_o \in \Gamma \tag{1.27}$$

La démonstration de l'équivalence de (1.25) et (1.26) s'établit exactement comme dans le cas du théorème 1. Mais l'équivalence de (1.26) et (1.27) ne se démontre pas immédiatement. On tire de (1.26) sans peine (1.27). Mais la réciproque, la démonstration de (1.26) à partir de (1.27), nécessite un raisonnement plus délicat.

En effet, supposons que (1.27) soit réalisée. On peut écrire (1.27) sous la forme d'une équation de Fredholm par rapport à $\mu(y)$:

$$K\mu = \frac{1}{2} \mu(y_o) - \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\log \frac{1}{r_{yoy}}\right) ds_y = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \nu(y) \log \frac{1}{r_{yoy}} dy \tag{1.28}$$

L'équation homogène correspondante:

$$K\mu = 0$$

admet la solution évidente

$$\mu(y) = 1 \ , \ \forall y \in S$$

et par suite, l'équation homogène adjointe à (1.28):

$$K'\chi = \frac{1}{2} \chi(y_o) - \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \chi(y) \frac{\partial}{\partial n_{yo}^+} \left(\log \frac{1}{r_{yoy}}\right) ds_y = 0 \tag*{(1.28)$_0^*$}$$

a au moins une solution non banale $\chi(y) \not\equiv 0$. (Nous démontrerons au §2, que $(1.28)_0^*$ a exactement une solution comme dans le cas où Ω^+ est simplement connexe). D'ailleurs, $(1.28)_0^*$ s'écrit:

$$\frac{\partial V^+(y_o)}{\partial n_{yo}^+} = 0 \tag{1.29}$$

où $V(x)$ est le potentiel de simple couche:

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \chi(y) \log \frac{1}{r_{xy}} ds_y \ , \ x \in \Omega^+ \tag{1.30}$$

D'où :

$$V(x) \equiv C\,,\ x \in \Omega^+ \tag{1.31}$$

La constante C est différente de zéro, sinon on aurait $V(x) \equiv 0$. et par raison de continuité :

$$V^-(y_o) = 0 \qquad \forall y_o \in S$$

de telle sorte que :

$$V(x) = kG(x, \infty)\ ,\ x \in \Omega^- \tag{1.32}$$

où $G(x, \infty)$ est la fonction de Green (1.20). Il en résulte :

$$\chi((y_o) = \frac{\partial V^-(y_o)}{\partial n^+_{y_o}} - \frac{\partial V^+(y_o)}{\partial n^+_{y_o}} = -k\ \frac{\partial G(y_o, \infty)}{\partial n^-_{y_o}} \tag{1.33}$$

c'est à dire que

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial G(y, \infty)}{\partial n^-_y} \cdot \log \frac{1}{r_{yoy}}\, ds_y = 0$$

D'après (1.22), on aurait alors :

$$g(\infty) = 0$$

ce qui contradit à (1.24). Donc $C \neq 0$ et on a :

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \chi(y) \log \frac{1}{r_{yoy}}\, ds_y\ ,\ \forall y_o \in \Gamma. \tag{1.34}$$

Par hypothèse, l'équation (1.28) est résoluble et son second membre vérifie donc la relation

$$\int_\Gamma \chi(y_o)\, ds_{yo} \int_\Gamma v(y) \log \frac{1}{r_{yoy}}\, ds_y = 0$$

ou en tenant compte de (1.34):

$$\int_\Gamma v(y)\, ds_y \int_\Gamma \chi(y_o) \log \frac{1}{r_{yoy}}\, ds_{yo} = C\int_\Gamma v(y)\, ds_y = 0$$

d'où, puisque $C \neq 0$:

$$\int_\Gamma v(y) ds_y = 0 \tag{1.35}$$

Cela étant, (1.27) nous donne :

$$\Phi^-(y_o) = 0 \qquad \forall y_o \in \Gamma \tag{1.36}$$

où $\Phi(x)$ est l' intégrale dans (1.26).

Soit $R(x) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$, $A(a_1, a_2) \in \Omega^+$. On a le développement :

$$\log r_{xy} = \log R(x) + \varphi(x, y) \tag{1.37}$$

Pour tout $y \in \Gamma$, $\varphi(x, y)$ est harmonique par rapport à x, et tend uniformément vers zéro à l' infini. Par suite :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma v(y)\, ds_y\ \log R(x) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left[\mu(y)\ \frac{\partial}{\partial n^+_y}\ \left(\log \frac{1}{r_{xy}}\right) + \varphi(x,y)\, v(y)\right] ds_y$$

ou grâce à (1.35):

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log \frac{1}{r_{xy}}\right) + \varphi(x, y). \nu(y)\right] ds_y$$

Sous cette forme, on voit aisément que $\Phi(x)$ représente une fonction harmonique dans Ω^- et s'annule à l'infini. Par suite, il résulte de (1.36):

$$\Phi(x) \equiv 0 \qquad \forall x \in \Omega^- \tag{1.38}$$

(1.26) est donc démontré. L'équivalence de (1.26) et de (1.27) s'est établie.

Théorème 1''. Soient $\mu(y)$ une fonction holdérienne, $\nu(y)$ une fonction continue, données sur une courbe de Liapounov fermée Γ de l'espace euclidien E_2. Supposons que Γ soit telle que la fonction $g(x)$ dans l'expression de la fonction Green (1.20) vérifie la condition

$$g(\infty) = 0 \tag{1.39}$$

Alors, pour qu'il existe une fonction $u(x) \in C^1(\Omega^+ + \Gamma)$, vérifiant les relations:

$$\left.\begin{aligned} u^+(y) &= \mu(y) \\ \frac{\partial u^+(y)}{\partial n_y^+} &= \nu(y) - k\,\frac{\partial G(y, \infty)}{\partial n_y^-} \end{aligned}\right\} \forall y \in \Gamma \tag{1.40}$$

où $k = \int_\Gamma \nu(y)\, ds_y$, il faut et il suffit que l'égalité:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log \frac{1}{r_{xy}}\right) - \nu(y) \log \frac{1}{r_{xy}}\right] ds_y \equiv kG(x, \infty) \tag{1.41}$$

soit satisfaite pour tout $x \in \Omega^-$. La condition (1.41) a la forme équivalente:

$$-\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left[\mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log \frac{1}{r_{y_0 y}}\right) - \nu(y) \log \frac{1}{r_{y_0 y}}\right] ds_y = 0 \quad \forall y_0 \in \Gamma \tag{1.42}$$

Remarquons immédiatement que si $\int_\Gamma \nu(y)\, ds_y = 0$, les conclusions dans les théorèmes 1' et 1'' sont les mêmes et la démonstration du théorème 1' reste valable dans notre cas, puisque l'essentiel du raisonnement s'appuie sur la relation (1.35).

Supposons maintenant que $k = \int_\Gamma \nu(y)\, ds_y \neq 0$ et que (1.40) soit remplie. En vertu de l'harmonicité de $u(x)$, on a:

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left[u(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log \frac{1}{r_{xy}}\right) - \left(\nu(y) - k\,\frac{\partial G(y, \infty)}{\partial n_y^-}\right) \log \frac{1}{r_{xy}}\right] ds_y \equiv 0 \tag{1.42}$$

pour tout $x \in \Omega^-$. Pour démontrer (1.41), il nous reste à montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial G(y, \infty)}{\partial n_y^-} \log \frac{1}{r_{xy}}\, ds_y = -G(x, \infty), \quad x \in \Omega^- \tag{1.43}$$

En faisant usage de (1.37) et de l'égalité évidente

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial G(y, \infty)}{\partial n_y^-}\, ds_y = 1$$

on voit aisément que la partie principale de l'intégrale dans (1.43) est de la forme $-\frac{1}{2\pi}\log R(x)$. Cette intégrale est manifestement harmonique dans Ω^- et par suite, pour démontrer (1.43), il suffit de vérifier la condition limite :

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial G(y,\infty)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{y_0y}}\,ds_y = 0, \qquad \forall y_0 \in \Gamma \tag{1.44}$$

Mais (1.44) s'obtient aisément à l'aide de (1.39) et de (1.22) si l'on fait tendre $x \in \Omega^+$ vers $y_0 \in \Gamma$. L'assertion est démontrée.

Réciproquement, admettons que l'on ait (1.41), ou ce qui revient au même, que l'égalité (1.42) ait lieu. Désignons par $\psi(x)$ l'intégrale :

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(log\frac{1}{r_{xy}}\right)-\left(\nu(y)-k\frac{\partial G(y,\infty)}{\partial n_y^-}\right)log\frac{1}{r_{xy}}\right]ds_y \tag{1.45}$$

on déduit de (1-45), (1-42), (1-22), (1-39) :

$$\Psi^+(y_0) - \Psi^-(y_0) = \Psi^+(y_0) = \mu(y_0)$$

$$\frac{\partial\psi^+(y_0)}{\partial n^+_{y_0}} - \frac{\partial\Psi^-(y_0)}{\partial n^-_{y_0}} = \frac{\partial\psi^+(y_0)}{\partial n^+_{y_0}} = \nu(y_0) - k\frac{\partial G(y_0,\infty)}{\partial n^-_{y_0}}.$$

d'où les égalités (1-40) avec $u(x) = \psi(x)$, $x \in \Omega^+$.

Théorème 3. Soient $\mu(y)$ une fonction holdérienne, $\nu(y)$ une fonction continue, données sur une courbe de Liapounov fermée de l'espace euclidien E_2. Pour qu'il existe une fonction $u(x) \in C^1(\Omega^- + \Gamma)$ harmonique dans Ω^-, ayant à l'infini la partie principale $k\log R(x) + P_r(x)$:

$$u(x) = k log R(x) + P_r(x) + O(1)$$

($P_r(x)$ est un polynôme harmonique d'ordre r) et vérifiant les conditions

$$\left.\begin{aligned} u^-(y) &= \mu(y) \\ \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-} &= \nu(y) \end{aligned}\right\}\ \forall y \in \Gamma \tag{1.46}$$

il faut et il suffit que l'égalité

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^-}\left(log\frac{1}{r_{xy}}\right) - \nu(y)\,log\frac{1}{r_{xy}}\right]ds_y + P_r(x) = \text{const.} \tag{1.47}$$

soit satisfaite pour tout $x \in \Omega+$. La condition (1.47) a la forme équivalente :

$$-\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^-}\left(log\frac{1}{r_{y_0y}}\right)-\nu(y)\,log\frac{1}{r_{y_0y}}\right]ds_y + P_r(y_0) = const.,$$

$$\forall y_0 \in \Gamma \tag{1.48}$$

On démontre le théorème en appliquant le théorème 2' à la fonction $u(x) - P_r(x)$.

§2. RÉSOLUTION EFFECTIVE DES ÉQUATIONS DU POTENTIEL

Dans la résolution des problèmes de Dirichlet et de Neumann de l'équation de Laplace dans l'espace E_m, $m \geqslant 3$ par la méthode des potentiels, on se familiarise bien avec des équations de Fredholm suivantes (nous considérons seulement les équations homogènes) :

1, Equation D_i (problème de Dirichlet intérieur) :

$$\frac{1}{2}\mu(y_o) + \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\frac{1}{r_{y_oy}^{m-2}}\right)ds_y = 0 \qquad y_o \in S \tag{2.1}$$

2. Equation N_e (problème de Neumann extérieur) :

$$\frac{1}{2}\nu(y_o) + \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_{y_o}^+}\left(\frac{1}{r_{yy_o}^{m-2}}\right)ds_y = 0 \qquad y_o \in S \tag{2.2}$$

3. Equation N_i (problème de Neumann intérieur) :

$$\frac{1}{2}\nu(y_o) - \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_{y_o}^+}\left(\frac{1}{r_{y_oy}^{m-2}}\right)ds_y = 0 \qquad y_o \in S \tag{2.3}$$

4. Equation D_e (problème de Dirichlet extérieur) :

$$\frac{1}{2}\mu(y_o) - \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\frac{1}{r_{y_oy}^{m-2}}\right)ds_y = 0 \qquad y_o \in S \tag{2-4}$$

On a déjà connu que les deux premières, ainsi que les deux dernières sont conjuguées l'une de l'autre. La résolution effective de ces équations a été donnée partiellement dans [1], à savoir seulement pour la première et la quatrième.

Dans ce paragraphe, nous étudions les quatres équations citées plus haut dans le cas où $\Omega+$ est multiplement connexe et nous en donnons les solutions concrètes.

1. Equation D_i. L'équation (2.1) peut s'écrire sous la forme (1.9) avec $\nu(y) \equiv 0$. D'après le théorème 2, la résolution de l'équation (2-1) consiste à trouver les fonctions harmoniques $u(x)$ dans Ω^-, régulières à l'infini, telles que :

$$\left.\begin{aligned} u^-(y) &= \mu(y) \qquad &(2.5)\\ \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-} &= 0 \qquad &(2.6)\end{aligned}\right\} \forall y \in S$$

La condition (2-6) nous donne immédiatement :

$$u(x) = C_i \ , \ x \in \Omega_i^- \ , \ i = 0, 1, \dots, n$$

où C_i, $i = 1, 2, \dots, n$ sont les constantes arbitraires et $C_o = 0$ (puisque $u(x)$ est régulière à l'infini). Par suite (2.5) nous donne exactement n solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.1).

$$\mu_1(y) = \begin{cases} 0 & y \in S_o \\ 1, & y \in S_1 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & y \in S_n \end{cases} \quad \dots\dots \quad \mu_n(y) = \begin{cases} 0 & y \in S_o \\ 0 & y \in S_1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & y \in S_n \end{cases} \tag{2.7}$$

On peut vérifies directement que les fonctions (2.7) sont vraiment solutions de (2.1) en s'appuyant sur la propriété bien connue de l'intégrale de Gauss.

Equation N_e. L'équation (2.2) est équivalente à

$$\frac{\partial}{\partial n^+_{y_o}}\left(\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S v(y)\frac{1}{r^{m-2}_{xy}}\,dS_y\right)^-_{x=y_o} = 0 \qquad \forall y_o \in S$$

ou ce qui revient au même

$$\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S v(y)\frac{1}{r^{m-2}_{xy}}\,dS_y = -a(x) \quad x \in \Omega^- \tag{2.8}$$

où

$$a(x) = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^-_o \\ C_i & x \in \Omega^-_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

C_i sont les constantes arbitraires. $a(x) = 0$ pour $x \in \Omega^-_o$, puisque le potentiel de simple couche à densité continue est régulière à l'infini.

L'égalité (2.8) peut s'écrire sous la forme (1-2) avec $\mu(y) = a(y)$. Il suffit donc de chercher les fonctions harmoniques, telles que:

$$u^+(y) = a(y) \tag{2,9}$$

$$\frac{\partial u^+(y)}{\partial n^+_y} = v(y) \tag{2.10}$$

La condition (2.9) nous donne immédiatement n solutions linéairement indépendantes $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ qui sont respectivement les mesures harmoniques des surfaces S_i, $i = 1, \ldots, n$ par rapport à Ω^+. Nous les appelons fonctions harmoniques fondamentales du domaine Ω^+. Donc on conclut de (2.10), que l'équation (2.2) a exactement n solutions linéairement indépendantes:

$$v_i(y) = \frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n^+_y} \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.11}$$

Il est à remarquer que les solutions $\mu_i(y)$ de l'équation (2.1) sont les valeurs limites de $u_i(x)$:

$$\mu_i(y) = u_i^+(y) \quad i = 1, \ldots, n$$

Donc nous avons démontré le théorème:

Théorème 4. Soient $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ les fonctions harmoniques fondamentales dans Ω^+, c'est à dire que

$$u_i^+(y) = \begin{cases} 0 & \text{sur } S_o \text{ et sur } S_k,\ k \neq i \\ 1 & \text{sur } S_i \end{cases}$$

Alors, les valeurs limites $\{u_i^+(y)\}$ et $\left\{\frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n^+_y}\right\}$, $i = 1, \ldots, n$ forment respectivement les systèmes complets des solutions linéairement indépendantes des équations D_i et N_e.

Théorème 5. Les solutions linéairement indépendantes des équations D_i ou N_e peuvent se déduire les unes des autres par la relation:

$$u_i^+(y_o) + \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+}\frac{1}{r_{y_oy}^{m-2}}\,dS_y = 0,\ i=1,2,\dots,n \qquad (2.12)$$

En effet, d'après le théorème 1 et le théorème 4 on déduit que les solutions linéairement indépendantes (2.1) et (2.2) peuvent être choisies par couples $\{\mu_i(y)\}$, $\{\nu_i(y)\}$, $i=1,\dots,n$ qui vérifient l'équation (1.3):

$$-\frac{1}{2}\mu_i(y_o) + \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S\left[\mu_i(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\frac{1}{r_{y_oy}^{m-2}}\right) - \nu_i(y)\frac{1}{r_{y_oy}^{m-2}}\right]dS_y=0,\ y_o\in S \qquad (2.13)$$

La relation (2.12) est la conséquence de (2.13) et de (2.1).

Remarque. Puisque les équations (2.1) et (2.2) admettent des solutions non banales, il résulte que, dans un domaine Ω^+ multiplement connexe, une fonction harmonique ne peut pas, en général, être représentée par un potentiel de double couche.

Equation N_i. L'équation (2.3) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial n_{y_o}^+}\left(\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \nu(y)\frac{1}{r_{xy}^{m-2}}\,dS_y\right)_{x=y_o}^+ = 0,\ \forall y_o\in S$$

ou ce qui revient au même

$$\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \nu(y)\frac{1}{r_{xy}^{m-2}}\,dS_y = C \qquad \forall x\in\Omega^+ \qquad (2.14)$$

où C est la constante arbitraire. L'équation (2.14) peut s'écrire sous la forme (1.8) avec $\mu(y)=C$, ce qui est équivalent à l'existence de la fonction harmonique $u(x)$ dans Ω^-, telle que:

$$\left.\begin{aligned} u^-(y) &= C & (2.15)\\ \frac{\partial u(y)}{\partial n_y^-} &= \nu(y) & (2.16)\end{aligned}\right\}\ \forall y\in S$$

Appelons $u_o(x)$ la fonction harmonique dans Ω_o^-, régulière à l'infini, prenant sur S_o la valeur limite

$$u_o^-(y) = 1 \qquad y\in S_o \qquad (2.17)$$

Alors (2.15) nous donne immédiatement

$$u(x) = \begin{cases} Cu_o(x) & x\in\Omega_o^- \\ C & x\in\Omega_i^-,\ i=1,2,\dots,n.\end{cases} \qquad (2.18)$$

et par suite

$$\nu(y) = \begin{cases} C\dfrac{\partial u_o^-(y)}{\partial n_y^-} & y\in S_o \\ 0 & y\in S_i,\ i=1,\dots,n\end{cases} \qquad (2.19)$$

L'équation (2.3) a donc une solution linéairement indépendante donnée par (2.19).

Equation D_e. L'équation (2.4) peut s'écrire sous la forme (1.3) avec $\nu(y)=0$. Alors pour trouver $\mu(y)$, il suffit de résoudre le système :

$$\left.\begin{aligned} u^+(y) &= \mu(y) \\ \frac{\partial u^+(y)}{\partial n_y^+} &= 0 \end{aligned}\right\} \forall\, y \in S$$

ce qui donne $u(x) =$ const., $x \in \Omega^+$ et

$$\mu(y) = C \tag{2.20}$$

L'équation (2.4) a donc une solution linéairement indépendante qui est la constante. Ce résultat est classique.

De (2.15), (2.16), (2.17), (2.8) on déduit :

Théorème 6. Soit $u(x)$ la fonction harmonique dans Ω^-, régulière à l'infini, telle que

$$u^-(y)=1 \;,\; \forall\, y \in S$$

Alors les valeurs limites $\{ u^-(y) \}$ et $\left\{ \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-} \right\}$ constituent respectivement les systèmes complets des solutions linéairement indépendantes des équations D_e et N_i.

D'après le théorème 2, on déduit du théorème 6 le suivant dont la démonstration est analogue à celle du théorème 5.

Théorème 7. Les solutions des équations D_e et N_i peuvent se déduire l'une de l'autre par la relation

$$u^-(y_o) + \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_S \frac{1}{r_{y_o y}^{m-2}} \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-} dS_y = 0,\ \forall y_o \in S. \tag{2.21}$$

Ainsi dans le cas des équations dans l'espace E_m, $m \geqslant 3$, les relations (2.12) et (2.21) entre les solutions des couples conjuguées (2.1), (2.2) et (2.3), (2.4) ont la même forme.

Passons maintenant au cas du plan. Nous nous bornerons aux traits généraux, puisque la méthode est la même comme dans le cas E_m, $m \geqslant 3$. Les équations du potentiel sont respectivement :

Equation D_i : $$\frac{1}{2}\mu(y_o) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log \frac{1}{r_{y_o y}}\right) ds_y = 0 \tag{2.22}$$

Equation N_e : $$\frac{1}{2}\nu(y_o) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_{y_o}^+}\left(\log \frac{1}{r_{y y_o}}\right) ds_y = 0 \tag{2.23}$$

Equation N_i : $$\frac{1}{2}\nu(y_o) - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_{y_o}^+}\left(\log \frac{1}{r_{y y_o}}\right) ds_y = 0 \tag{2.24}$$

Equation D_e : $$\frac{1}{2}\mu(y_o) - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log \frac{1}{r_{y y_o}}\right) ds_y = 0 \tag{2.25}$$

Equation D_i. En utilisant le théorème 2', on ramène l'équation (2.22) à la forme

$$\left.\begin{aligned} u^-(y) &= \mu(y) \\ \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-} &= 0 \end{aligned}\right\} \forall y \in \Gamma \qquad \begin{aligned}(2.26)\\(2.27)\end{aligned}$$

d'où $u(x) = C_i$, $x \in \Omega_i^-$, $i = 1,\dots, n$, $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_o^-$. En effet, dans Ω_o^-, $u(x)$ admet le développement

$$u(x) = k \log R(x) + \varphi(x)$$

avec

$$\varphi(\infty) = 0$$

(puisque la constante dans (1.15) est égale à $-\varphi(\infty)$). Il en résulte

$$\frac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-} = k\,\frac{\partial \log R(y)}{\partial n_y^-} + \frac{\partial \varphi^-(y)}{\partial n_y^-} \tag{2.28}$$

En intégrant (2.28) le long de Γ et en remarquant que

$$\int_\Gamma \frac{\partial \log R(y)}{\partial n_y^-}\, ds = 2\pi \neq 0$$

on obtient aisément $k = 0$. Par suite, $u(x) = \text{const}$, $x \in \Omega_o^-$ et la condition $\varphi(\infty)=0$ nous montre que $u(x) = 0$, $x \in \Omega_o^-$. Donc la conclusion est la même comme dans E_m, $m \geqslant 3$.

L'équation D_i a n solutions linéairement indépendantes :

$$\mu_i(y) = \begin{cases} 0 & y \in \Gamma_o,\ y \in \Gamma_k,\ k \neq i \\ 1 & y \in \Gamma_i \end{cases}$$

Ce résultat est classique [4].

Equation N_e. Même raisonnement comme dans le cas E_m, $m \geqslant 3$ et on obtient le même résultat. Le théorème 4 reste valable dans le cas du plan et le théorème 5 s'énonce d'une manière analogue. Autrement dit, au lieu de (2.12), on a :

$$u_i^+(y_o) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+} \log \frac{1}{r_{y_o y}}\, ds_y = 0 \tag{2.29}$$

Equation N_i. L'équation est équivalente à

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(y) \log \frac{1}{r_{xy}}\, ds_y = \text{const}, \quad \forall x \in \Omega^+$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} u(x) &= \text{const} + k\, G(x,\infty) \qquad & x \in \Omega_o^- \\ u(x) &= C_i & x \in \Omega_i^- \end{aligned}$$

D'où

$$v(y) = \begin{cases} k \dfrac{\partial G(y,\infty)}{\partial n_y^-} & y \in \Gamma_0 \\ 0 & y \in \Gamma_i,\ i = 1,\dots, n \end{cases} \tag{2.30}$$

Donc l'équation N_i a une solution linéairement indépendante donnée par (2-30).

Equation D_e. Suivant le cas, on doit appliquer le théorème 1' ou 1''. Mais on obtient le même résultat comme dans E_m, $m \geqslant 3$. à savoir $\mu(y) = C$, $\forall y \in \Gamma$ L'analogue du théorème 6 est le suivant :

Théorème 6'. Soit $u(x)$ la fonction harmonique dans Ω^-, admettant à l'infini le pôle logarithmique, telle que :

$$u^-(y) = 1 \qquad \forall y \in S$$

Alors les valeurs limites $u^-(y)$ et $\dfrac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-}$ constituent respectivement les solutions non banales des équations D_e et N_i.

Au lieu de (2.20), on a dans ce cas :

$$u^-(y_0) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_y^-} \log \frac{1}{r_{y_0y}} ds_y = 1 + k\, g(\infty) \tag{2.31}$$

ce qui est manifeste grâce à (1,22), (2.30).

§3. REPRÉSENTATION INTÉGRALE D'UNE FONCTION HARMONIQUE DANS UN DOMAINE MULTIPLEMENT CONNEXE

Soit $u(x)$ une fonction harmonique, donnée dans un domaine Ω^+ multiplement connexe, décrit dans les paragraphes précédents. Comme l'on a déjà remarqué plus haut on ne peut pas, en général, la représenter par un potentiel de double couche. Cependant on a le suivant :

Théorème 8 : Toute fonction harmonique $u(x) \in C\ (\Omega^+ + S)$ peut être représentée sous la forme

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{xy}^{m-2}} \right) dS_y + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x) \tag{3.1}$$

où $\{u_i(x)\}$, $i = 1,\dots, n$ sont les fonctions harmoniques fondamentales du domaine Ω^+. Les constantes C_i, $i = 1,\dots, n$ sont déterminées d'une façon unique par $u(x)$ et quant à $\mu(y)$ — à une combinaison linéaire quelconque près des solutions $\{\mu_i(y)\}$, $i = 1,\dots, n$ de l' équation (2.1).

En effet, soit $f(y_0)$ la valeur limite de $u(x)$ sur S :

$$\lim_{x \to y_0} u(x) = f(y_0) \qquad y_0 \in S$$

Supposons que $u(x)$ soit représentée par (3.1). En faisant tendre $x \in \Omega^+$ vers $y_0 \in S$, on a :

$$\frac{1}{2}\mu(y_o) + \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\frac{1}{r_{y_oy}^{m-2}}\right)dS_y = f(y_o) - \sum_{i=1}^{n} C_i u_i^+(y_o) \tag{3.2}$$

L' équation (3.2) est résoluble si et seulement si le second membre est orthogonal aux solutions de (2.2), ce qui s'écrit à l'aide du théorème 4 :

$$\int_S [f(y) - \sum_{i=1}^{n} C_i u_i^+(y)] \frac{\partial u_j^+(y)}{\partial n_y^+} dS_y = 0 , \; j=1,\dots n \tag{3.3}$$

(3.3) est un système algébrique linéaire qui détermine d'une façon unique les inconnues C_i, $i = 1,\dots, n$. En effet, le déterminant Δ du système est différent de zéro, puisque les éléments a_{ij} de ce déterminant, grâce à la formule de Green des fonctions harmoniques, peuvent s'écrire :

$$a_{ij} = \int u_i^+(y) \frac{\partial u_j^+(y)}{\partial n_y^+} dS_y = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx = (\overrightarrow{grad}\, u_i, \overrightarrow{grad}\, u_j)$$

Donc Δ est le déterminant de Gramme des vecteurs $\overrightarrow{grad}\, u_i$, $i = 1,\dots, n$. Si Δ est égal à zéro, nous aurions la dépendance linéaire :

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \overrightarrow{grad}\, u_i(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega^+$$

ce qui entrainerait à :

$$\sum_{i=1}^{n} d_i u_i(x) = \text{const} \qquad \forall x \in \Omega^+$$

La constante au second membre doit être égale à zéro, puisque toutes les $u_i(x)$ prennent la valeur zéro sur S_o et cela contradit à la linéaire indépendance des fonctions $u_i(x)$, $i = 1,\dots, n$.

Avec les valeurs de $\{C_i\}$, $i = 1,\dots, n$ déterminées par (3.3), l'équation (3.2) est résoluble et la solution de celle ci prend la forme :

$$\mu(y) = \mu^*(y) + \sum_{i=1}^{n} b_i \mu_i(y) \tag{3.4}$$

où $\mu^*(y)$ est une solution particulière et b_i sont les constantes arbitraires.

Réciproquement, si dans l'expression (3.1), on remplace $\mu(y)$ par la solution quelconque de (3.2) avec $\{C_i\}$, $i = 1,\dots, n$ vérifiant (3.3) on obtient une fonction harmonique unique $u(x)$ dont la valeur limite est égale à $f(y)$. Le théorème est démontré.

Par là demonstration même, on résout le problème de Dirichlet dans le domaine multiplement connexe Ω^+.

Remarque. Le théorème 8 reste valable dans l'espace euclidien E_2, pourvu que l'on remplace $\frac{1}{(m-2)S_1}\frac{1}{r_{xy}^{m-2}}$ par $\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{xy}}$. La représentation intégrale (3.1) est le modèle analogue de celle:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(t)\,dt}{t-z} + iC$$

pour les fonctions analytiques.

§ 4 — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE

Premier cas. Equation dans l'espace euclidien E_m, $m \geqslant 3$:

Soit à résoudre l'équation du potentiel de simple couche

$$\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \frac{1}{r_{y_0y}^{m-2}}\,\nu(y)\,dS_y = f(y_0), \qquad \forall y_0 \in S \tag{4.1}$$

où S est une surface de Liapounov limitant un domaine multiplement connexe Ω^+, décrit dans les paragraphes précédents. Le second membre $f(y_0)$ est supposé holdérien et la fonction inconnue $\nu(y)$ est supposée continue sur S. L'hypothèse de continuité holdérienne de $f(y_0)$ est nécessaire, puisque le potentiel de simple couche à densité bornée et intégrable sur S est holdérienne sur S [1].

Première méthode. Soient toujours $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ les fonctions harmoniques fondamentales du domaine Ω^+ Tout d'abord, on résout l'équation

$$\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\frac{1}{r_{y_0y}^{m-2}}\right)dS_y =$$

$$= -f(y_0) - \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i^+(y_0) \tag{4.2}$$

où $f(y_0)$ est le second membre de (4.1) et les constantes $\{c_i\}$ $i = 1, \ldots, n$ sont choisies de telle sorte que l'équation soit résoluble. Alors la solution générale de (4.2) prend la forme:

$$\mu(y) = \mu^*(y) + \sum_{i=1}^{n} d_i\mu_i(y) \tag{4.3}$$

On prend une quelconque des fonctions (4.3) et on résout le problème de Dirichlet extérieur:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ w(y) = \mu(y) = \mu^*(y) + \sum_{i=1}^{n} d_i\mu_i(y), & y \in S \\ |w(x)| \leqslant \dfrac{C}{|x|^{m-2}} & |x| \to \infty \end{cases} \tag{4.4}$$

ce qui donne la solution de la forme

$$w(x) = w^*(x) + \sum_{i=1}^{n} d_i w_i(x) \tag{4.5}$$

avec

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_i^- \\ 0 & x \in \Omega_k^-, \; k \neq i \end{cases}$$

Si la solution (4.5) a la dérivée normale ayant la valeur limite continue :

$$\frac{\partial w^-(y)}{\partial n_y^-} = \varphi(y) \tag{4.6}$$

il s'ensuit du théorème 2 :

$$\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_S \left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\frac{1}{r_{y_0 y}^{m-2}}\right) + \varphi(y)\frac{1}{r_{y_0 y}^{m-2}}\right] dS_y = 0, \quad \forall y_0 \in S$$

ou en tenant compte de (4.2) :

$$\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_S \frac{1}{r_{y_0 y}^{m-2}}\,\varphi(y)\,dS_y = f(y_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^+(y_0) \tag{4.7}$$

D'après les théorèmes 4 et 5, l'égalité (4.7) prend la forme :

$$\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_S \frac{1}{r_{y_0 y}^{m-2}}\left(\varphi(y) + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u_i^+(x)}{\partial n_y^+}\right) dS = f(y_0)$$

D'où la solution

$$\nu(y) = \frac{\partial w^-(y)}{\partial n_y^-} + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+} \tag{4.8}$$

et $\{c_i\}$ sont les constantes déterminées. La solution (4.8) est unique, puisque l'équation homogène correspondant à (4.1) peut s'écrire sous la forme (1.3) avec $\mu(y) \equiv 0$, d'où $\nu(y) \equiv 0$.

Il résulte du raisonnement considéré que l'équation (4.1) est résoluble si et seulement si une des solutions du problème (4.4) admet la dérivée normale continue sur S.

Deuxième méthode. Supposons que l'équation (4.1) soit résoluble avec la densité $\nu(y)$ continue sur S. Le potentiel de simple couche

$$V(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_S \frac{1}{r_{xy}^{m-2}}\,\nu(y)\,dS_y \tag{4.9}$$

représente alors une fonction harmonique dans Ω^+ et dans Ω^- séparément, continument prolongeable sur S et par conséquent coincide dans Ω^+ et dans Ω^- respectivement avec les solutions des problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur :

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & dans \quad \Omega^+ \\ U(y_o) = f(y_o) & sur \quad S \end{cases} \tag{4.15)$_1$}$$

$$\begin{cases} \Delta U_1 = 0 & dans \quad \Omega^- \\ U_1(y_o) = f(y_o) & sur \quad S \\ |U_1(x)| \leqslant \dfrac{c}{|x|^{m-2}} & |x| \to \infty \end{cases} \tag{4.10)$_2$}$$

Sous les hypothèses faites, on sait bien que le potentiel (4.9) admet les dérivées normales intérieure et extérieure et bien définies et on a :

$$\frac{\partial V(y_o)}{\partial n_e^+} - \frac{\partial V(y_o)}{\partial n_i^+} = v(y_o)$$

de telle sorte que

$$v(y_o) = -\left(\frac{\partial U(y_o)}{\partial n_{y_o}^+} + \frac{\partial U_1(y_o)}{\partial n_{y_o}^-}\right) \tag{4.11}$$

Réciproquement si les solutions des problèmes $(4.10)_1$, $(4.10)_2$ ont les dérivées normales continues sur S, la fonction (4.11) sera solution de l'équation (4.1). En effet, en ajoutant membre à membre les deux égalités évidentes :

$$\frac{1}{2} U(y_o) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \left[f(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{r_{y_o y}^{m-2}} \right) - \frac{1}{r_{y_o y}^{m-2}} \frac{\partial U(y)}{\partial n_y^+} \right] dS_y, \quad \forall y_o \in S$$

$$\frac{1}{2} U_1(y_o) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \left[f(y) \frac{1}{\partial n_y^-} \left(\frac{1}{r_{y_o y}^{m-2}} \right) - \frac{1}{r_{y_o y}^{m-2}} \frac{\partial U_1(y)}{\partial n_y^-} \right] dS_y, \quad \forall y_o \in S$$

on a :

$$-\frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_S \frac{1}{r_{y_o y}^{m-2}} \left(\frac{\partial U(y)}{\partial n_y^+} + \frac{\partial U_1(y)}{\partial n_y^-} \right) dS_y = \frac{1}{2} U(y_o) + \frac{1}{2} U_1(y_o) = f(y_o)$$

La formule (4.11) permet de trouver la solution $v(y)$ dans ls cas où l'on peut calculer explicitement $U(x)$ et $U_1(x)$, par exemple dans le cas où S est une sphère.

Deuxième cas. Equation dans le plan.

Soit à résoudre l'équation dans le plan :

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma v(y) \log \frac{1}{r_{y_o y}} ds_y = f(y), \ \forall y_o \in \Gamma \tag{4.12}$$

où Γ est une courbe de Liapounov fermée, limitant un domaine Ω^+ multiplement connexe, décrit dans les paragraphes précédents. Soient $v(y)$ une fonction inconnue, continue sur Γ et $f(y_o)$ une fonction holdérienne, donnée sur Γ.

Supposons que $\nu(y)$ soit une solution de (4.12). Désignons par $\mu(y)$ une des solutions de l'équation:

$$\frac{1}{2}\mu(y_o) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(log\frac{1}{r_{y_o y}}\right) ds_y = -f(y_o) - \sum_{i=1}^n c_i u_i^+(y_o) \quad (4.13)$$

où $\{u_i(x)\}$, $i = 1,\dots, n$ sont les fonctions harmoniques fondamentales du domaine Ω^+, et c_i — les constantes choisies de telle sorte que (4.13) soit résoluble. En utilisant (2.29), l'équation (4.13) s'écrit:

$$\frac{1}{2}\mu(y_o) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^-}\left(log\frac{1}{r_{y_o y}}\right) ds_y - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left(\nu(y) - \sum_{i=1}^n c_i\frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+}\right)\times$$

$$\times\, log\frac{1}{r_{y_o y}}\, ds_y = 0$$

D'après le théorème 2', on doit avoir:

$$\left.\begin{aligned} \mu(y) &= \psi^-(y_o) \\ \nu(y_o) - \sum_{i=1}^n c_i\frac{\partial u_i^+(y_o)}{\partial n_{y_o}^+} &= \frac{\partial\psi\ (y_o)}{\partial n_{y_o}^-} \end{aligned}\right\} y_o \in \Gamma \quad (4.15)$$

où

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^-}\left(log\frac{1}{r_{xy}}\right) - \left(\nu(y) - \sum_{i=1}^n c_i\frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+}\right) log\frac{1}{r_{xy}}\right] ds_y$$

La fonction $\psi(x)$ admet le développement à l'infini:

$$\psi(x) = \frac{k}{2\pi}\,log\,R(x) + \varphi(x)$$

avec

$$k = \int_\Gamma\left(\nu(y) - \sum_{i=1}^{n} c_i\frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+}\right) ds,\ R(x) = \sqrt{(x_1\ a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2},\ A(a_1, a_2) \in \Omega^+$$

et $\varphi(x)$ est harmonique dans Ω^-, vérifiant la condition

$$\varphi(\infty) = 0 \quad (4.16)$$

Soit $G(x, \infty)$ la fonction de Green déterminée par (1.20). Alors $\psi(x)$ a la forme:

$$\psi(x) = k\,G(x, \infty) + w(x) \quad (4.17)$$

où

$$w(x) = \varphi(x) - kg(x)$$

La condition (4.16) entraine:

$$w(\infty) + kg(\infty) = 0 \quad (4.18)$$

D'ailleurs, (4.15) et (4.17) nous donnent

$$w^-(y_o) = \psi^-(y_o) - kG(y_o, \infty) = \psi^-(y_o) = \mu(y_o) \quad (4.19$$

$$\frac{\partial\psi^-(y_o)}{\partial n_{y_o}^-} = k\frac{\partial G(y_o,\infty)}{\partial n_{y_o}^-} + \frac{\partial w^-(y_o)}{\partial n_{y_o}^-} = \nu(g_o) - \sum_{i=1}^n c_i\frac{\partial u_i^+(y_o)}{\partial n_{y_o}^+} \quad (4.20)$$

D'après (4.18), (4.20) on trouvera $\nu(y)$, si l'on connait la fonction harmonique $W(x)$.

Donc, pour trouver $v(y)$, tout d'abord on résout l'équation de Fredholm (4.13):

$$\frac{1}{2}\mu(y_0)+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^+}\left(\log\frac{1}{r_{y_0y}}\right)ds_y=-f(y_0)-\sum_{i=1}^n c_i u_i^+(y) \qquad (4.13)$$

qui donnera la solution

$$\mu(y)=\mu^*(y)+\sum_{i=1}^n d_i\mu_i(y)$$

Ensuite on résout le problème de Dirichlet extérieur :

$$\begin{cases}\Delta w=0 & dans\ \ \Omega^-\\ w(y)=\mu(y) & y\in S\\ |w(x)|\leqslant C & |x|\to\infty\end{cases} \qquad (4.21)$$

La solution trouvée est de la forme

$$w(x)=w^*(x)+\sum_{i=1}^n d_i w_i(x) \qquad (4.22)$$

où

$$w_i(x)=\begin{cases}1 & x\in\Omega_i^-\\ 0 & x\in\Omega_k^-,\ k\neq i\end{cases}$$

La solution (4.22) doit vérifier la relation (4.18) :

$$w(\infty)+kg(\infty)=0 \qquad (4.18)$$

On doit distinguer divers cas :

a) $g(\infty)\neq 0$. Alors (4.20) nous montre que la solution de (4.12) doit être de la forme :

$$v(y)=-\frac{w(\infty)}{g(\infty)}\frac{\partial G(y,\infty)}{\partial n_y^-}+\frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}+\sum_{i=1}^n c_i\frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+} \qquad (4.23)$$

Réciproquement, si la solution du problème (4.21) a la dérivée normale $\dfrac{\partial W(y)}{\partial n_y^-}$ continue, on peut vérifier directement que l'expression (4.24) est la solution de l' équation (4.12). En effet, en tenant compte de l'égalité (1.22), (2.29), de (4.23) on obtient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma v(y)\log\frac{1}{r_{y_0y}}ds_y=-\frac{w(\infty)}{g(\infty)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\partial G(y,\infty)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{y_0y}}ds_y+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{y_0y}}ds_y+\sum_{i=1}^n c_i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+}\log\frac{1}{r_{y_0y}}ds_y=$$

$$=-w(\infty)+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{y_0y}}ds_y-\sum_{i=1}^n c_i u_i^+(y_0). \qquad (4.24)$$

D'autre part, on a la représentation évidente :

$$w(x)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[w(y)\frac{\partial}{\partial n_y^-}\left(\log\frac{1}{r_{xy}}\right)-\frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{xy}}\right]ds_y+w(\infty)$$

pour tout $x \in \Omega^-$. Cette relation et la condition limite (4.21) nous donnent quand x tend vers $y_0 \in S$:

$$\mu(y_0) = \frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left[\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y^-}\left(\log\frac{1}{r_{yoy}}\right) - \frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{yoy}}\right] ds_y + w(\infty)$$

Mais $\mu(y)$ vérifie l'équation (4.13), et par suite :

$$-f(y_0) - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^+(y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{yoy}}ds_y + w(\infty)$$

ou enfin

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{yoy}}ds_y - w(\infty) - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^+(y_0) = f(y_0) \tag{4.25}$$

(4.24) et (4.25) nous donnent immédiatement (4.12).

Donc, dans ce cas, l'équation (4.12) a une solution unique (4.24).

b) $g(\infty) = 0,\ w(\infty) = 0$

La valeur de k dans (4.18) est alors indéterminée. On vérifie directement que l'expression

$$v(y) = k\frac{\partial G(y,\infty)}{\partial n_y^-} + \frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-} + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+} \tag{4.26}$$

avec k arbitraire, satisfait l'équation (4.12). Pour cela, il suffit de remarquer que (1.22) s'écrit dans ce cas, quand $x \to y_0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial G(y,\infty)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{yoy}}ds_y = g(\infty) = 0$$

Donc, comme dans (4.24), (4.25), on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma v(y)\log\frac{1}{r_{yoy}}ds_y = \frac{k}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial G(y,\infty)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{yoy}}ds_y + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{yoy}}ds_y$$

$$+\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial u_i^+(y)}{\partial n_y^+}\log\frac{1}{r_{yoy}}ds_y = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{yoy}}ds_y - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^+(y_0)$$

$$= -w(\infty) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}\log\frac{1}{r_{yoy}}ds_y - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^+(y) = f(y_0).$$

c) $g(\infty) = 0,\ w(\infty) \neq 0$. La condition nécessaire (4.18) n'est pas vérifiée et l'équation (4.12) n'a pas de solution.

En résumé, nous obtenons le résultat suivant:

Supposons que la solution du problème (4.21) possède la dérivée normale $\frac{\partial w(y)}{\partial n_y^-}$ continue sur Γ. Soit

$$G(x,\infty) = \frac{1}{2\pi}\log R(x) + g(x)$$

la fonction de Green du domaine extérieur Ω^-, avec le pôle à l'infini.

a) Si $g(\infty) \neq 0$, l'équation (4.12) a une et une seule solution $v(y)$ donnée par la formule (4.23).

b) Si $g(\infty) = 0$, $w(\infty) = 0$, l'équation (4.12) a une infinité de solutions données par (4.26) avec k arbitraire.

c) Si $g(\infty) = 0$, $w(\infty) \neq 0$, l'équation (4.12) n'a pas de solution.

Remarque. Par la même méthode exposée dans le point b) du premier cas on vérifie directement que si l'équation (4.12) est résoluble, sa solution prend alors la forme

$$v(y) = -\left(\frac{\partial U}{\partial n_y^+} + \frac{\partial U_1(y)}{\partial n_y^-}\right) + k\frac{\partial G(y, \infty)}{\partial n_y^-} \tag{4.27}$$

Ici k est la constante vérifiant la relation

$$U_1(\infty) + kg(\infty) = 0 \tag{4.28}$$

et $U(x)$, $U_1(x)$ sont respectivement les solutions des problèmes suivants:

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & dans\ \Omega^+ \\ U(y) = f(y) & y \in \Gamma \end{cases} \tag{4.29$_1$}$$

$$\begin{cases} \Delta U_1 = 0 & dans\ \Omega^- \\ U_1(y) = f(y) & y \in \Gamma \\ |U_1(x)| \leqslant C & |x| \to \infty \end{cases} \tag{4.29$_2$}$$

Cas particulier: Γ est le cercle unité

Dans ce cas nous avons

$$G(x, \infty) = \frac{1}{2\pi} \log R(x), \qquad R(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Donc $g(x) \equiv 0$, par suite $g(\infty) = 0$.

L'équation de Fredholm (4.13) prend maintenant la forme:

$$\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y)\,\frac{\cos(\overrightarrow{n_y^+}, \overrightarrow{r})}{r_{y_0y}}\,ds_y = -f(y_0), \quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{y_0y}$$

ou

$$\frac{1}{2}\mu(y_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y)ds_y = -f(y_0)$$

Il suit de là que

$$\int_\Gamma \mu(y)ds_y = -\int_\Gamma f(y)ds_y \tag{4.30}$$

et

$$\mu(y) = -2f(y) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(y)ds_y \tag{4.31}$$

Distinguons deux cas:

α) $\int_\Gamma f(y)\,ds_y = 0$. Alors la solution $w(x)$ du problème de Dirichlet (4.21) vérifie la relation

$$w(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} w(y)\, ds_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(y)\, ds_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(y)\, ds_y = 0$$

Donc dans ce cas nous avons $g(\infty) = 0$, $w(\infty) = 0$. D'après le résultat du point b), l'équation (4,12) a une infinité de solutions de la forme:

$$\nu(y) = \frac{\partial w(y)}{\partial n_{\bar{y}}} + k \frac{\partial G(y, \infty)}{\partial n_{\bar{y}}} = \frac{\partial w(y)}{\partial n_{\bar{y}}} + const$$

s'il existe la dérivée $\frac{\partial w(y)}{\partial n_{\bar{y}}}$ continue sur Γ.

β) $\int_{\Gamma} f(y) ds_y \neq 0$. En vertu de (4.30)

$$w(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} w(y)\, ds_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(y)\, ds_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(y)\, ds_y \neq 0$$

c'est à dire que $g(\infty) = 0$, $w(\infty) \neq 0$. L'équation n'est pas résoluble. Remarquons ici que si $f(y) > 0$, on a nécessairement $\int_{\Gamma} f(y) ds_y \neq 0$ et par suite l'équation n'a pas de solution. Cette remarque est classique (cf [2], §35, chap. III).

Exemple. Soit à résoudre l'équation

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \nu(y) \log \frac{1}{r_{y_0 y}}\, ds_y = \cos 2\theta.$$

où Γ est le cercle unité et $y_0(1, \theta_0) \in \Gamma$.

Dans ce cas

$$\int_{\Gamma} f(y)\, ds_y = \int_{\Gamma}^{2\pi} \cos 2\theta_0\, d\theta_0 = 0$$

par suite l'équation est résoluble. Il est aisé de voir, par les méthodes exposées plus haut, que

$$\nu(\theta) = 4 \cos 2\theta + \text{const.}$$

BIBLIOGRAPHIES

1. N. M. Gunther. La théorie du potentiel et applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Paris. Gauthiers—Villards 1934.

2. I. G. Pétrovski Leçons sur les équations aux dérivées partielles. Moscou 1961 (en Russe).

3. N. I. Mouskhelisvili Equations intégrales singulières. Moscou 1968 (en Russe).

4. E. M. Saak Problème du saut pour les fonctions harmoniques à n variables. Compte-rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS (DAN SSSR) 1974, T. 218, N° 2 (en Russe).

5. E. M. Saak Problème du saut pour les solutions du système fortement elliptique du second ordre. Communications de l'Académie des sciences de Géorgie (URSS) 1976, 83, N° 3 (en Russe).