ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 4, N° 2 (1979)

QUELQUES RESULTATS FONDAMENTAUX D'ANALYSE CONVEXE ET SES APPLICATIONS

CHARLES CASTAING
Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

Ce texte est composé de quatre chapitres et constitue l'ensemble des exposés présentés à l' Ecole d'Eté sur les mathématiques de Contrôle et de la Gestion à Nha Trang.

Le chapitre I contient des résultats récents dont un théorème de représentation intégrale et un théorème de décomposition des formes sous linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé décomposable des fonctions vectorielles mesurables qui sont présentés sans démonstrations au Congrès des mathématiciens à HANOI.

Le chapitre II est, à quelques détails près, la reproduction du chapitre VII de mon livre «Convex analysis and measurable multifunctions» en collaboration avec M. Valadier, paru en Lectures Notes n° 580, Springer Verlag (1977). Comme il s'agit d'un livre récent et difficillement accessible, j'ai cru bon de reproduire cette partie de ce livre ici.

Le chapitre III a trait à quelques applications des résultats des chapitre I et II. On y trouve en particulier un théorème de minimisation sans compacité et un théorème de fermeture qui intervient dans les équations intégrales.

Dans le chapitre IV, je présente quelques problèmes non résolus.

Par ailleurs, pour faciliter la lecture de ce texte, je m'efforce de donner les démonstrations de tous les résultats.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance au Comité Scientifique et à l'Institut de Mathématiques de HANOI me permettant de participer à l'Ecole d'Eté, ainsi qu'à tous les participants de l'Ecole d'Eté qui ont eu la patience de suivre tous mes exposés.

J'exprime ma gratitude à Monsieur le Professeur Hoàng Tuy qui a suivi avec une bienveillante attention le développement de ce travail, m'a encouragé par ses précieux conseils et m'a fourni une aide immense durant mon séjour. Les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui et l'intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à mes travaux m'ont été une stimulation constante.

Je remercie vivement Monsieur Đoàn Minh Tuân pour maintes aides précieuses.

CHAPITRE I

REPRESENTATION INTEGRALE ET DECOMPOSITION DE FORMES SOUS-LINEAIRES CONTINUES SUR UN ESPACE VECTORIEL NORME DECOMPOSABLE DE FONCTIONS VECTORIELLES MESURABLES

Définitions et notations. (T, J, μ) est un espace mesuré avec μ positive σ-finie et J μ-complète. La fonction caractéristique de toute partie A de T est notée χ_A. Etant donnés deux espaces vectoriels réels F et F' mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle .,. \rangle$. pour toute partie C de F, on désigne par $\delta^*(.,C)$ sa fonction d'appui. Pour toute application f de T dans R, on notera $[f \geqslant 0]$ l'ensemble $\{t \in T \mid f(t) \geqslant 0\}$ et on désigne par f^+ la partie positive de f. Si f et g sont deux applications de T dans F et F' respectivement, on note $\langle f, g \rangle : t \to \langle f(t), g(t) \rangle$ $(t \in T)$. De façon générale, si Γ est une multi-application de T à valeurs dans les parties de F', on note $\delta^*(f, \Gamma) : t \to \delta^*(f(t), \Gamma(t))$ $(t \in T)$. Dans ce qui suit E est un espace de Banach séparable et E'_σ son dual faible. On suppose fixée une suite croissante $(T_n)_{n \in N}$ de parties μ-intégrables de T, dont la réunion est T. Pour chaque entier n, on notera U_n la boule unité de $L^\infty_E(T_n, T_n \cap J, \mu)$. On notera $Y_0 = T_0$ et pour tout $n \geqslant 1$ $Y_n = T_n / T_{n-1}$. On convient d'identifier chaque fonction μ-mesurable sur T à valeurs dans E avec sa classe d'équivalence modulo l'égalité μ-presque partout. Un espace vectoriel réel $\mathcal{L}_E$ de classes d'équivalence modulo l'égalité μ-presque partout, d'applications f μ-mesurables de T dans E est décomposable si $\mathcal{L}_E$ vérifie les deux propriétés suivantes:

(*i*) $\quad \forall A \in J, \ \forall f \in \mathcal{L}_E$, on a $\chi_A f \in \mathcal{L}_E$.

(*ii*) $\quad \bigcup_n L^\infty_E(T_n, J \cap T_n, \mu) \subseteq \mathcal{L}_E$.

Il est bien connu que les espaces de Köthe possèdent les propriétés précédentes. On désigne par $\mathcal{L}^*_E$, l'espace vectoriel de toutes les classes d'applications scalairement μ-mesurables f de T dans E' telle que, pour tout $g \in \mathcal{L}_E$, l'application $\langle f, g \rangle$ soit μ-intégrable.

§ 1. REPRÉSENTATION INTÉGRALE D'UNE FORME SOUS LINÉAIRE DÉFINIE SUR UN ESPACE VECTORIEL DÉCOMPOSABLE

Soit $\mathcal{L}_E$ un espace vectoriel décomposable. Le théorème suivant est une généralisation d'un résultat de Macdonald ([6]).

Théorème 1. *Soit l une forme sous linéaire définie sur $\mathcal{L}_E$, admettant les propriétés suivantes:*

(1) *Pour tout $f \in \mathcal{L}_E$, pour tout $A \in J$, pour toute suite croissante $(A_n)_{n \in N}$ d'éléments de J, de réunion A, on a* $\lim_{n \to \infty} l(\chi_{A_n} f) = l(\chi_A f)$.

(2) $l(f_1+f_2) = l(f_1) + l(f_2)$ *si* (*support* f_1) $\cap$ (*support* f_2) $= \phi$, $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}_E \times \mathcal{L}_E$.

(3) *Pour tout n fixé,* $l(U_n)$ *est borné. Alors il existe une multi-application* Γ *à valeurs convexes compactes non vides de* E'_σ, *dont le graphe appartient à* $J \oplus \mathcal{B}(E'_\sigma)$, *telle que* $\forall f \in \mathcal{L}_E$, $l(f) = \int_T \delta^*(f(t), \Gamma(t))\, \mu(dt)$.

Démonstration.

Elle s'inspire de celle du théorème V. 17 ([2]).

Pour n fixé, on se place d'abord sur l'espace mesuré (T_n, J_n, μ) avec $J_n = T_n \cap J$. Pour tout $A \in J_n$, la forme $e \to l(\chi_A, e)$, de E dans $\mathbf{R}$ est sous-linéaire et continue. C'est évident grâce à l'inégalité :

$$|l(\chi_A e) - l(\chi_A e')| \leqslant max \left[l\left(\chi_A \frac{e-e'}{\|e-e'\|}\right),\ l\left(\chi_A \frac{e'-e}{\|e-e'\|}\right)\right] \|e-e'\|$$

avec $e \neq e'$, et à la propriété (3). Donc il existe pour tout $A \in J_n$, un convexe $\sigma(E', E)$ compact $M(A)$ de E', tel que:

$$\delta^*(e, M(A)) = l(\chi_A\, e)$$

pour tout $e \in E$. Il est immédiat, en utilisant les propriétés (*1*) et (2), que la fonction $A \to \delta^*(e, M(A))$, est σ-additive pour tout e fixé dans E. Ceci étant, pour tout $A \in J_n$, désignons par $\mathcal{P}_A$ l'ensemble de toutes les J_n – partitions dénombrables de A, et par B la boule unité de E.

Posons pour tout $A \in J_n$,

$$v(A) = sup \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} l(\chi_{A_i} e_i) \mid (A_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}_A,\ (l_i)_{i \in N} \subset B \right\}.$$

Nous allons montrer que $A \to v(A)$ est une mesure positive sur J_n et que la fonction $A \to \delta^*(e, M(A))$ est, pour tout e fixé dans E, absolument continue par rapport à la mesure positive finie v.

En raison de la définition de v, on a clairemet $v(A) \geqslant 0$ pour tout $A \in J_n$, et d'après la propriété (*3*), on a $v(A) < +\infty$ pour tout $A \in J_n$. Montrons que v est σ-additive. Observons d'abord que, pour toute suite finie disjointe de mesurables (D_j) dans J_n et pour toute suite finie (e_j) dans la boule unité de E, on a

$$\sum_j |l(\chi_{D_j} e_j)| \leqslant \sup_{u \in U_n} l(u) = \alpha_n$$

En effet, on a $$\sum_j |l(\chi_{D_j} e)| \leqslant \sum_j l(\chi_{D_j} a_j e_j) = l(\sum_j \chi_{D_j} a_j e_j)$$

avec $a_j = \pm 1$, compte tenu de la propriété (*2*). Comme $\sum_j \chi_{D_j} a_j e_j \in U_n$, on a, en utilisant la propriété (*3*),

$$l(\sum_j \chi_{D_j} a_j e_j) \leqslant \sup_{u \in U_n} l(u)$$

 TL 121

Soit $A \in J_n$ où A est la réunion disjointe des A_j appartenant à J_n. Montrons d'abord l'inégalité

$$\sum_{j=0}^{\infty} \nu(A_j) \leqslant \nu(A).$$

Soit $\varepsilon > 0$. En raison de la définition de ν, il existe pour chaque indice j, une suite $(A_{ji}) \in \mathcal{P}_{A_j}$ et une suite $(e_{ji}) \subset B$ telles que

$$\nu(A_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} + \sum_{i=0}^{\infty} l(\chi_{A_{ji}} e_{ji}),$$

d'où

$$\sum_{j=0}^{\infty} \nu(A_j) \leqslant \varepsilon + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} l(\chi_{A_{ji}} e_{ji}).$$

Or la suite $(l(\chi_{A_{ji}} e_{ji}))_{(j,i) \in N^2}$ est absolument sommable d'après ce qui précède, on en déduit que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \nu(A_j) \leqslant \varepsilon + \sum_{(j,i) \in N^2} l(\chi_{A_{ji}} e_{ij}) \leqslant \varepsilon + \nu(A).$$

L'inégalité inverse se démontre de la même façon.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(C_k) \in \mathcal{P}_A$ et $(e_k) \subset B$ telle que

$$\nu(A) \leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} l(\chi_{C_k} e_k)$$

D'après les propriétés (1) et (2), on a,

$$l(\chi_{C_k} e_k) = \lim_{p \to \infty} l(\chi_{\bigcup_{j=0}^{p} C_k \cap A_j} e_k) = \sum_{k=0}^{\infty} l(\chi_{C_k \cap A_j} e_k)$$

D'où

$$\nu(A) \leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} l(\chi_{C_k \cap A_j} e_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(\chi_{C_k \cap A_j} e_k) + \varepsilon \leqslant \varepsilon + \sum_{j=0}^{\infty} \nu(A_j)$$

ce qui prouve que ν est une mesure. Par ailleurs, ν est absolument continue par rapport à $l|_{J_n}$. C'est immédiat parce que l est sous linéaire. Comme on a, pour tout $(e, A) \in E \times J_n$,

$$|l(\chi_A e)| \leqslant \nu(A) \| e \|$$

les mesures scalaires $A \to l(\chi_A e)$ sont absolument continues par rapport à ν. En utilisant un argument de relèvement dans $L^\infty(T_n, J_n, \nu)$ (cf. démonstration du théorème $V.17$ ([2])), il existe une multi-application scalairement mesurable Δ_n à valeurs dans les convexes $\sigma(E', E)$ compacts non vides de la boule unité B' de E' telle que

$$\delta^*(e, M(A)) = l(\chi_A\, e) = \int_A \delta^*(e, \Delta_n(t))\nu(dt)$$

pour tout $e \in E$ et tout $A \in J_n$. Comme ν est absolument continue par rapport à $\mu|_{J_n}$ on a $\nu = h_n\, \mu|_{J_n}$ avec $h_n \in L^1_{R^+}(T_n, J_n, \mu|_{J_n})$.

D'où $\quad (I) \quad l(\chi_A\, e) = \int_A \delta^*(e, h_n(t)\, \Delta_n(t))\, \mu(dt)$

pour tout $e \in E$ et tout $A \in J_n$. Posons

$$\Gamma(t) = \Gamma_0(t) \text{ si } t \in T_0 = Y_0$$
$$\Gamma(t) = \Gamma_n(t) = h_n(t)\Delta_n(t) \text{ si } t \in T_n \setminus T_{n-1} = Y_n \quad n \geqslant 1.$$

Par construction, Γ est scalairement mesurable donc son graphe appartient à $J \otimes \mathcal{B}\,(E'_\sigma)$ d'après ([2], théorème III.37). Reste à démontrer que Γ satisfait à la formule de représentation intégrale de l'énoncé.

On commence par étendre la formule (I) aux fonctions étagées nulles hors d'un T_n. Soit $f = \sum_{i=1}^{p} \chi_{A_i} e_i$ où $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une J_n partition de T_n. En vertu de la propriété (2) $l(f) = \sum_{i=1}^{p} l(\chi_{A_i}\, e_i)$ d'où d'après (I)

$$l(f) = \sum_{i=1}^{p} \int_{T_n} \delta^*(\chi_{A_i}(t)\, e_i\,,\, \Gamma(t))\mu(dt)$$

Comme $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une partition de T_n on obtient, quel que soit $t \in T$,
$\delta^*(f(t), \Gamma(t)) = \sum_{i=1}^{p} \delta^*(\chi_{A_i}(t) e_i\,,\, \Gamma(t))$ et par conséquent

$$l(f) = \int_{T_n} \delta^*(f(t),\, \Gamma(t))\mu(dt).$$

Etant donné $f \in \mathcal{L}_E$, pour tout entier n, on a $\chi_{T_n} f \in \mathcal{L}_E$. Comme E est un espace de Banach séparable, il existe une suite $(f_j)_{j \in N}$ de fonctions étagées $J - \mathcal{B}(E)$ mesurables nulles hors de T_n convergeant simplement vers $\chi_{T_n} f$. Alors, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe en vertu du théorème d'Egoroff, $T_{n,\varepsilon} \in J_n$, avec $T_{n,\varepsilon} \subset T_n$, tel que $\mu(T_n \setminus T_{n,\varepsilon}) \leqslant \varepsilon$, et tel que $(\chi_{T_{n,\varepsilon}} f_j)_{j \in N}$ converge uniformément vers $\chi_{T_{n,\varepsilon}} f$. De cette convergence uniforme, on déduit que pour tout $p \in N$, il existe $j_p \in N$ tel que $\chi_{T_{n,\varepsilon}} \mid f - f_j \mid \leqslant 2^{-p} \chi_{T_{n,\varepsilon}}$ pour $j \geqslant j_p$. Or

$\pm\, 2^p \chi_{T_{n,\varepsilon}} (f - f_j) \in U_n$, pour tout $j \geqslant j_p$. D'où d'après la propriété (3)

$$\mid l(\pm\, 2^p \chi_{T_{n,\varepsilon}} (f - f_j)) \mid \leqslant \sup_{u \in U_n} l(u) = \alpha_n\,, \text{ pour } j \geqslant j_p.$$

Compte tenu de l'inégalité $\mid l(f_1) - l(f_2) \mid \leqslant \max\,[l(f_1 - f_2),\, l(f_2 - f_1)]$ pour tout couple $(f_1\,, f_2) \in \mathcal{L}_E \times \mathcal{L}_E$ et du fait que l est positivement homogène, on a

$$\mid l(\chi_{T_{n,\varepsilon}}\, f) - l(\chi_{T_{n,\varepsilon}}\, f_j) \mid \leqslant 2^{-p}\alpha_n\,, \text{ dès que } j \geqslant j_p.$$

Donc on a $l(\chi_{T_{n,\varepsilon}}\, f) = \lim_{j \to +\infty} l(\chi_{T_{n,\varepsilon}}\, f_j)$. Alors en appliquant la formule de représentation précédemment obtenue, on obtient

$$l(\chi_{T_{n,\varepsilon}} f) = \lim_{j\to+\infty} \int_{T_{n,\varepsilon}} \delta^*(f, \Gamma) d\mu$$

Pour tout $t \in T$ et tout $(e_1, e_2) \in E \times E$, on a:

$$| \delta^*(e_1, \Gamma(t)) - \delta^*(e_2, \Gamma(t)) | \leqslant max[\delta^*(e_1 - e_2, \Gamma(t)), \delta^*(e_2 - e_1, \Gamma(t))].$$

Comme $\forall t \in Y_m$ $(m \geqslant 1)$ $\Gamma(t) = \Gamma_m(t) \subset h_m(t)B'$ où $h_m \in L^1_R + (T_m, J_m, \mu)$

$$\forall t \in Y_o \quad \Gamma(t) = \Gamma_o(t) \subset h_o(t)B' \text{ où } h_o \in L^1_R + (T_o, J_o, \mu)$$

on a,

$$\forall t \in T_n, | \delta^*(e_1, \Gamma(t)) - \delta^*(e_2, \Gamma(t)) | \leqslant \| e_1 - e_2 \| (\sum_{m=0}^{n} \chi_{Y_m}(t) h_m(t))$$

D'où en vertu de la convergence uniforme de $(\chi_{T_{n,\varepsilon}} f_j)_{j\in N}$ vers $\chi_{T_{n,\varepsilon}} f$

$$\int_{T_{n,\varepsilon}} \delta^*(f, \Gamma) d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_{T_{n,\varepsilon}} \delta^*(f_j, \Gamma) \, d\mu.$$

Alors compte tenu de ce qui précède on obtient:

$$l(\chi_{T_{n,\varepsilon}} f) = \int_{T_{n,\varepsilon}} \delta^*(f, \Gamma) \, d\mu.$$

D'où pour tout $A \in J$,

$$(II) \quad l(\chi_{T_{n,\varepsilon} \cap A} f) = \int_{T_{n,\varepsilon} \cap A} \delta^* (f, \Gamma) \, d\mu.$$

En résumé pour toute $f \in \mathcal{L}_E$, pour tout n fixé et pour tout $\delta > 0$ donné, il existe $T_{n,\varepsilon} \in J_n$ avec $\mu(T_n \setminus T_{n,\varepsilon}) \leqslant \epsilon$, tel que pour tout $A \in J$, on ait $l(\chi_{T_{n,\varepsilon} \cap A} f) = \int_{T_{n,\varepsilon} \cap A} \delta^*(f, \Gamma) d\mu.$

Pour obtenir la formule de l'énoncé, considérons une suite croissante $(T_{n,k})_{k\in N}$ d'éléments de J_n telle que $\mu(T_n \setminus T_{n,k}) \leqslant 2^{-k}$ et telle que, $\forall A \in J$,

$$l(\chi_{T_{n,k} \cap A} f) = \int_{T_{n,\varepsilon} \cap A} \delta^*(f, \Gamma) \, d\mu, \text{ pour tout } k \in N.$$

Puisque $\mu(T_n \setminus \bigcup_{k\in N} T_{n,k}) = 0$, $l(\chi_{T_n} f) = l(\chi_{\bigcup_{k\in N} T_{n,k}} f)$

D'où, d'après la propriété (1)

$$l(\chi_{[\delta^*(f, \Gamma_n) \geqslant 0]} f) = \lim_{k\to\infty} l(\chi_{[\delta^*(f, \Gamma) \geqslant 0] \cap T_{n,k}} f)$$

Soit en utilisant ce qui précède

$$l(\chi_{T_n \cap [\delta^*(f, \Gamma) \geqslant 0]} f) = \lim_{k\to+\infty} \int_{T_{n,k} \cap [\delta^*(f, \Gamma) \geqslant 0]} \delta^*(f, \Gamma) d\mu.$$

Comme $T_{n,k}$ est une suite croissante, le théorème de convergence monotone implique:

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{T_{n,k}\cap[\delta^*(f,\Gamma)\geqslant 0]} \delta^*(f,\Gamma)\,d\mu = \int_{T_n\cap[\delta^*(f,\Gamma)\geqslant 0]} \delta^*(f,\Gamma)\,d\mu$$

Par conséquent

$$(III) \qquad l(\chi_{T_n\cap[\delta^*(f,\Gamma)\geqslant 0]}f) = \int_{T_n\cap[\delta^*(f,\Gamma)\geqslant 0]} \delta^*(f,\Gamma)\,d\mu.$$

En notant $C = \{t \in T \mid \delta^*(f(t), \Gamma(t)) \geqslant 0\}$, on obtient pour toute $f \in \mathcal{L}_B$, compte tenu de la propriété (2)

$$l(\chi_{T_n}f) = l(\chi_{T_n\cap C}f) + l(\chi_{T_n\cap T\setminus C}f).$$

D'après la propriété (1), $l(\chi_{T_n\cap T\setminus C}f) = \lim\limits_{k\to\infty} l(\chi_{T_{n,k}\cap T\setminus C}f)$

alors, grâce à la formule de représentation (II), on a

$$l(\chi_{T_n\cap C}f) = \lim_{k\to\infty} \int_{T_{n,k}\cap C} \delta^*(f,\Gamma)\,d\mu.$$

Comme $-\delta^*(\chi_{T_n\cap(T\setminus C)}(t)f(t), \Gamma(t)) \geqslant 0$, $\forall t \in T_n \cap (T\setminus C)$, le théorème de convergence monotone implique

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{T_{n,k}\cap(T\setminus C)} -\delta^*(f,\Gamma)\,d\mu = \int_{T_n\cap(T\setminus C)} -\delta^*(f,\Gamma)\,d\mu,$$

par suite

$$\int_{T_n\cap(T\setminus C)} \delta^*(f,\Gamma)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{T_n\cap(T\setminus C)} \delta^*(f,\Gamma)\,d\mu$$

D'où

$$l(\chi_{T_n\cap(T\setminus C)}f) = \int_{T_n\cap(T\setminus C)} \delta^*(f,\Gamma)\,d\mu.$$

et en utilisant (III) on a

$$l(\chi_{T_n}f) = \int_{T_n} \delta^*(f,\Gamma)\,d\mu.$$

On a aussi la même formule lorsque T_n est remplacé par $T_n \cap A$, pour $A \in J$. Pour achever la démonstration du théorème il reste à étendre à T entier le résultat précédemment obtenu sur chaque T_n. Comme $T = \bigcup_n T_n$ avec $T_n \subset T_{n+1}$, on a, en vertu de la propriété (1) en notant $C = \{t \in T \mid \delta^*(f(t), \Gamma(t)) \geqslant 0\}$

$$l(\chi_C f) = \lim_{n\to\infty} l(\chi_{C\cap T_n}f)$$

$$l(\chi_{T\setminus C}f) = \lim_{n\to\infty} l(\chi_{(T\setminus C)\cap T_n}f)$$

d'où

$$l(\chi_C f) = \lim_{n\to\infty} \int_{T_n\cap C} \delta^*(f,\Gamma)\,d\mu$$

soit $l(\chi_C f) = \int_C \delta^*(f, \Gamma)d\mu$ grâce au théorème de convergence monotone. Ce même théorème donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_n\setminus C} \delta^*(f, \Gamma)d\mu = \int_{T\setminus C} \delta^*(f, \Gamma)d\mu$$

et par conséquent $\int_{T\setminus C} \delta^*(f, \Gamma)d\mu = l(\chi_{T\setminus C} f)$ d'où enfin

$l(f) = l(\chi_C f) + l(\chi_{T\setminus C} f) = \int_T \delta^*(f, \Gamma)d\mu$ — ce qui achève la démonstration du théorème.

Dans le cas où l est linéaire on obtient facilement le corollaire suivant.

Corollaire. Soit l une forme linéaire définie sur $\mathcal{L}_E$ admettant les propriétés suivantes:

(i) Pour tout $f \in \mathcal{L}_E$, pour tout $A \in J$, pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in N}$ d'éléments de J, de réunion A, on a $\lim_{n\to+\infty} l(\chi_{A_n} f) = l(\chi_A f)$.

(ii) Pour tout n fixé, $l(U_n)$ est borné,

Alors il existe $g \in \mathcal{L}_E^*$, telle que

$$\forall f \in \mathcal{L}_E,\ l(f) = \int_T <f(t), g(t)> \mu(dt).$$

Démonstration.

l satisfait aux conditions du théorème *1*. Comme il est facile de voir, la linéarité de l implique que pour tout $t \in T$, $\Gamma(t)$ se réduit à un singleton $g(t)$. La formule du théorème *1* s'écrit alors:

$$\forall f \in \mathcal{L}_E,\ l_{(f)} = \int_T \langle f, g \rangle d\mu$$

En raison de la définition de $\mathcal{L}_E^*$, , il est clair que $g \in \mathcal{L}_E^*$, .

§ 2. DÉCOMPOSITION D'UNE FORME SOUS LINÉAIRE CONTINUE SUR UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ DÉCOMPOSABLE.

Le théorème 1 et le théorème de Traynor ([9]) que nous rappelons plus bas nous permettent d'obtenir le théorème de décomposition annoncé.

Théorème (TRAYNOR). Soit (T, J) un espace mesurable. Toute application, m, additive et bornée de J dans R admet une représentation unique de la forme:

$$m = m_\sigma + m_p$$

où m_σ est la mesure bornée définie par $m_\sigma(A) = \lim_{\Pi\in\mathcal{P}_A} \sum_{E\in\Pi} m(E)$, $(A \in J)$, $\mathcal{P}_A$

désignant l'ensemble des J-partitions dénombrables de A ordonné par la relation de finesse: $\Pi < \Pi'$ (Π' plus fine que Π) si et seulement si $\forall E' \in \Pi'$ $\exists E \in \Pi \mid E \supset E'$, et où $m_p = m - m_\sigma$ est une application bornée purement simplement additive de J dans R, c'est à dire, additive et telle que pour toute mesure bornée μ de J dans R, pour tout couple (α, β) dans $R_+^* \times R_+^*$, il existe $A_0 \in J$ tel que l'on ait

$$\forall A \in J, \ |\mu(A \cap A_0)| \leqslant \alpha \text{ et } |m_p(A \setminus A_0)| \leqslant \beta.$$

Remarque. Du fait que m_p est purement simplement additive il est facile de déduire le résultat suivant dont nous ferons usage plus loin: Pour toute mesure positive et bornée λ de J dans R, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite décroissante $(A_n)_{n \in N}$ d'éléments de J, tels que l'on ait pour tout entier $n \in N$,

$$\lambda(A_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ et } m_p(T \setminus A_n) = 0.$$

Proposition. Soit $\mathcal{L}_E$ un espace vectoriel normé décomposable de classes d'applications μ-mesurables de (T, J, μ) dans E, dont la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_E}$ jouit des deux propriétés suivantes:

(i) Pour tout $(A, f) \in J \times \mathcal{L}_E$, on a $\|\chi_A f\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}_E}$.

(ii) Pour tout entier n, la boule unité U_n de $L_E^\infty(T_n, J_n, \mu)$ est borné pour la norme.

Soit l une forme sous linéaire continue additive sur $\mathcal{L}_E$, alors l se décompose en

$$l = l_a + l_s$$

où

(1) l_a est une forme sous linéaire continue sur $\mathcal{L}_E$ telle que

$$l_a(f) = \int_T \delta^*(f, \Gamma)\, \mu(dt), \quad \forall f \in \mathcal{L}_E.$$

où Γ est une multi-application à valeurs convexes $\sigma(E', E)$ compactes non vides de E', dont le graphe appartient à $J \otimes \mathcal{B}(E'_\sigma)$.

(2) l_s est une forme positivement homogène, additive sur L_E, lipchitzienne à l'origine de $\mathcal{L}_E$, singulière au sens suivant: à tout $f \in \mathcal{L}_E$ est associée une suite décroissante $(A_n)_{n \in N}$ d'éléments de J, d'intersection vide, tels que pour tout entier n, on ait $l_s(\chi_{T \setminus A_n} f) = 0$.

Démonstration.

Pour tout $(A, f) \in J \times \mathcal{L}_E$, posons

$$m(A, f) = l(\chi_A f).$$

Pour toute $f \in \mathcal{L}_E$, il est clair que l'application $m(.,f)$ de J dans R est additive et bornée. Appliquons la décomposition de TRAYNOR à $m(.,f)$, on a:

$$m(.,f) = m_\sigma(.,f) + m_p(.,f),$$

où $m_\sigma(.,f)$ et $m_p(.,f)$ sont des applications σ additive et purement simplement additive respectivement. Comme on a

$$m_\sigma(A,f) = \lim_{\Pi \in \mathcal{P}_A} \sum_{E \in \Pi} l(\chi_A f),\ \forall (A,f) \in J \times \mathcal{L}_E,$$

il est clair que $m_\sigma(A,.)$ est sous linéaire continue et additive sur $\mathcal{L}_E$.

D'autre part, puisque $m_p(A,f) = m(A,f) - m_\sigma(A,f)$ pour tout $(A,f) \in J \times \mathcal{L}_E$, il est clair que $m_p(A,.)$ est positivement homogène, additive sur $\mathcal{L}_E$.

Par ailleurs, on vérifie facilement que

$$m_\sigma(T,\ \chi_A f) = m_\sigma(A,f),\ \ (A,f) \in J \times \mathcal{L}_E.$$

d'où

$$m_p(T, \chi_A f) = m_p(A,f),\ \forall (A,f) \in J \times \mathcal{L}_E.$$

Pour $A = T$, on a

$$l(f) = m_\sigma(T,f) + m_p(T,f),\ \forall f \in \mathcal{L}_E.$$

Posons
$$l_a(f) = m_\sigma(T,f),\quad \forall f \in \mathcal{L}_E$$
$$l_s(f) = m_p(T,f),\quad \forall f \in \mathcal{L}_E.$$

Il résulte de ce qui précède que $f \to l_a(f)$ vérifie toutes les conditions d'application du théorème de représentation intégrale (th. *1*). Donc l_a a toutes les propriétés décrites dans l'énoncé. Pour l'étude de l_s, on commence par se placer sur Y_n pour n fixé. En raison des définitions il est clair que pour toute $f \in \mathcal{L}_E$, l'application $m_p(.,f)$ de $S_n = J \cap Y_n$ dans $\mathbf{R}$ est purement simplement additive et bornée. Fixons $f \in \mathcal{L}_E$. Comme il a été remarqué dans l'énoncé du théorème de Traynor, il existe dans S_n une suite décroissante $(A_{n,j})_{j \in N^*}$ telle que, pour tout $j \in N^*$, on ait $m_p(Y_n \setminus A_{n,j}, f) = 0$ et $\mu(A_{n,j}) \leqslant \frac{1}{2^{j+1}}$, ce qui implique que $\mu(\bigcap_{j \in N^*} A_{nj}) = 0$. En choisissant $A_{n,0} = Y_n$ et en posant $B_{n,j} = A_{n,j} \setminus A_{n,\,j+1}$, pour tout $j \in N$, on obtient une suite disjointe $(B_{n,j})_{j \in N}$ dans S_n telle que $\mu(Y_n \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} B_{n,j}) = 0$ (car $Y_n \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} B_{n,j} = \bigcap_{j=0}^{\infty} A_{n,j}$) et telle que $m_p(B_{n,j}, f) = 0$ (car $B_{n,j} \subset Y_n \setminus A_{n,\,j+1},\ \forall j \in N$), c'est à dire $l_s(\chi_{B_{n,j}} f) = 0$.

En résumé, pour $f \in \mathcal{L}_E$ fixée, il existe pour chaque entier n une suite disjointe $(B_{n,j})_{j \in N}$ dans $S_n = J \cap Y_n$, telle que pour tout $j \in N$ $l_s(\chi_{B_{n,j}} f) = 0$ et $\mu(Y_n \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} B_{n,j}) = 0$.

Dans ces conditions, la suite $(B_{n,j})_{(n,j)\in N^2}$ est une suite disjointe dans J telle que pour tout $(n, j) \in N^2$, $l_s(\chi_{B_{n,j}} f) = 0$ et $\mu(T \setminus \bigcap_{(n,j)\in N^2} B_{n,j}) = 0$. En réindexant $(B_{n,j})_{(n,j)\in N^2}$ en $(A'_p)_{p\in N}$ et en posant $A_n = \bigcup_{p\geqslant n} A'_p$ on obtient pour tout $n \in N$ $A_n \in J$, $A_n \subset A_{n+1}$ et de plus $\bigcap_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{p\geqslant n} A'_p = \phi$ puisque la suite $(A'_p)_{p\in N}$ est disjointe.

Comme $T\setminus A_0 = T \setminus \bigcup_{p=0}^{\infty} A'_p = T \setminus \bigcup_{(n,j)\in N^2} B_{n,j}$, on a $\mu(T\setminus A_0) = 0$ d'où $l_s(\chi_{T\setminus A_0} f) = 0$. Pour $n \geqslant 1$, $T\setminus A_n = (T\setminus A_0) \cup \bigcup_{j=0}^{n-1} A_j \setminus A_{j+1}$ avec $\mu(T\setminus A_0) = 0$, ce qui implique $l_s(\chi_{T\setminus A_n} f) = \sum_{j=0}^{n-1} l_s(\chi_{A_j \setminus A_{j+1}} f) = \sum_{j=0}^{n-1} l(\chi_{A'_j} f)$ c'est à dire, $l_s(\chi_{T\setminus A_n} f) = 0$. Puisque $\bigcup_{n\in N} A_n = \bigcup_{p\in N} A'_p = \bigcup_{(n,j)\in N^2} B_{n,j}$, on a $\mu(T \setminus \bigcup_{n\in N} A_n) = 0$.

Avec les notations et hypothèses de la proposition précédente, il est bon d'introduire la définition suivante.

Soit l une forme sous linéaire continue additive sur un espace normé décomposable $\mathcal{L}_E$. On dit que l est régulière si la fonction ν de J dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\nu(A) = \sup_{\|f\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1} m_p(A, f) \qquad (A \in J)$$

est additive, $m_p(.,f)$ étant la composante purement simplement additive dans la décomposition de Traynor de fonction additive bornée $A \mapsto m(A, f) = l(\chi_A f)$ $(A \in J)$.

Théorème 2. Les hypothèses et notations sont celles de la proposition précédente. Soit l une forme sous linéaire continue additive et régulière sur $\mathcal{L}_E$. Alors l se décompose en

$$l = l_a + l_s,$$

où

(*1*) l_a est une forme sous linéaire continue sur $\mathcal{L}_E$, admettant la représentation intégrale

$$l_a(f) = \int \delta^*(f, \Gamma)\, d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{L}_E,$$

où Γ est une multi-application de T à valeurs convexes $\sigma(E', E)$ compactes non vides de E' dont le graphe appartient à $J \otimes \mathcal{B}(E'_\sigma)$

(2) l_s est une forme positivement homogène, additive sur $\mathcal{L}_E$, lipchitzienne à l'origine de $\mathcal{L}_E$, singulière au sens suivant: il existe une suite décroissante $(Z_n)_{n\in N}$ d'éléments de J d'intersection vide telle que

$$l_s(\chi_{T \setminus Z_n} f) = 0$$

pour tout $f \in \mathcal{L}_E$ et tout n.

Démonstration. Fixons n. Nous allons montrer d'abord l'existence d'une suite décroissante $(A_{n,j})_{j\in N^*}$ d'éléments de $S_n = J \cap Y_n$ telle que $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n,j}) = 0$ et telle que $\nu(Y_n) = \nu(A_{n,j})$ pour tout $j \in N^*$.

Par définition de $\nu(Y_n)$, il existe une suite $(f_q)_{q\in N}$ d'éléments de $\mathcal{L}_E$ avec $\|f_q\|_E \leqslant 1$, $\forall q \in N$, telle que

$$\nu(Y_n) = \lim_{q\to+\infty} m_p(f, Y_n).$$

Comme il a été dit plus haut, il existe pour tout $q \in N$, une suite décroissante $(Z_{q,k})_{k\in N}$ d'éléments de S_n tels que

$$\forall k \in N,\ \mu(Z_{q,k}) \leqslant \frac{1}{2^{k+q+2}} \text{ et } m_p(Y_n \setminus Z_{q,k}, f_q) = 0$$

En posant pour tout $j \in N^*$, $A_{n,j} = \bigcup_{\substack{k\geqslant j \\ q\geqslant j}} Z_{k,q}$, on obtient une suite décroissante

d'éléments de S_n, tels que $\forall j \in N^*$, $\mu(A_{n,j}) \leqslant \sum_{\substack{k\geqslant j \\ q\geqslant j}} \mu(Z_{k,q}) \leqslant \sum_{q\geqslant j} \frac{1}{2^{k+1}} \times$

$\times \left(\sum_{k\geqslant j} \frac{1}{2^{k+1}}\right)$ c'est à dire, $\forall\ j \in N^*$, $\mu(A_{n,j}) \leqslant \frac{1}{2^{2j}}$, ce qui implique $\left(\mu \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n,j}\right) = 0$. Reste à prouver que, $\forall j \in N^*$, $\nu(Y_n) = \nu(A_{n,j})$.

Fixons $j \in N^*$. Par définition on a:

$$\forall q \geqslant j \quad A_{n,j} \subset \bigcup_{k\geqslant j} Z_{q,j}.$$

alors $\forall\ q \geqslant j$, $Y_n \setminus A_{n,j}$, $\subset \bigcap_{k\geqslant j} Y_n \setminus Z_q$, $\subset Y_n \setminus Z_{q,j}$ avec $m_p(Y \setminus Z_{q,j}, f_q) = 0$.

En conséquence, on a: $\forall q \geqslant j$, $m_p(Y_n \setminus A_{n,j}, f_q) = 0$, donc $m_p(Y_n, f_q) = m_p(A_{n,j}, f_q)$. Alors puisque $\nu(Y_n) = \lim_{q\to+\infty} m_p(Y_n, f_q)$, on obtient

$\nu(Y_n) = \lim_{q\to+\infty} m_p(A_n, f_q)$, $\leqslant \sup_{\|f\|_{\mathcal{L}_E}\leqslant 1} m_p(A_{n,j}, f) = \nu(A_{n,j})$. D'autre part puisque ν est positive et additive et $A_{n,j} \subset Y_n$, on a $\nu(A_{n,j}) \leqslant \nu(Y_n)$ d'où $\nu(Y_n) = \nu(A_{n,j})$, $\forall\ j \in N^*$. Comme ν est additive et bornée on en déduit,

$\forall j \in N^*$, $v(Y_n \setminus A_{n,j}) = 0$. Comme on a $v(Y_n \setminus A_{n,j}) = \sup_{\|f\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1} m_p(Y_n \setminus A_{n,j}, f)$,

$= \sup_{\|f\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1} |m_p(Y_n \setminus A_{n,j}, f)|$ on déduit que pour toute $f \in \mathcal{L}_E$ avec $\|f\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1$, $m_p(Y_n \setminus A_{n,j}, f) = 0$, $\forall j \in N^*$, et par suite $m_p(Y_n \setminus A_{n,j}, f) = 0$, $\forall j \in N^*$, $\forall f \in \mathcal{L}_E$. puisque $\forall A \in J$, $f \to m_p(A, f)$ est positivement homogène. En choisissant $A_{n,0} = y_n$ et en posant pour tout $j \in N$, $B_{n,j} = A_{n,j} \setminus A_{n,j+1}$, on obtient une suite disjointe d'éléments de S_n tels que $\mu(Y_n \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} B_{n,j}) = 0$ et $\forall j \in N$ $m_p(B_{n,j}, f) = 0$,

$\forall f \in \mathcal{L}_E$, ce qui implique $l_s(\chi_{B_{n,j}} f) = 0$ $\forall j \in N$, $\forall f \in \mathcal{L}_E$. A partir de là on va construire la suite $(Z_n)_{n \in N}$ annoncée, comme on a construit la suite $(A_n)_{n \in N}$ associée à un élément f de $\mathcal{L}_E$ dans la démonstration de proposition précédente. Ceci achève la démonstration du théorème.

Si $\mathcal{L}_E$ est un espace vectoriel normé décomposable dont la norme est une norme de Riesz, c'est à dire, vérifiant:

$$f \in \mathcal{L}_E,\ g \in \mathcal{L}_E,\ |g| \leqslant |f| \Rightarrow \|g\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}_E}$$

et si l est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_E$, on a la variante suivante:

Théorème 3.

On suppose que la norme sur $\mathcal{L}_E$ est une norme de Riesz. On note $\varepsilon_E(J)$ l'espace vectoriel réel des classes d'équivalence modulo l'égalité μ-presque partout des fonctions J-étagées à valeurs dans E, et on suppose que pour tout entier n, $\chi_{Y_n} \mathcal{L}_E$ soit l'adhérence dans $\mathcal{L}_E$ de $\chi_{Y_n} \varepsilon_E(J)$. Alors toute $l \in \mathcal{L}'_E$ (dual de l'espace normé $\mathcal{L}_E$) se décompose en $l = l_a + l_s$ où $l_a \in \mathcal{L}'_E$ est absolument continue et $l_s \in \mathcal{L}'_E$ est singulière au sens suivant: il existe dans J une suite décroissante $(Z_n)_{n \in N}$ d'intersection vide, telle que pour toute $f \in \mathcal{L}_E$ nulle sur Z_n, on ait $l_s(f) = 0$.

Démonstration.

$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$ où $(Y_n)_{n \in N}$ est la J-partition déjà introduite. Soit $\mathcal{S}_n = J \cap Y_n$. Pour n fixé, on se place d'abord sur l'espace mesuré $(Y_n, \mathcal{S}_n, \mu)$ Comme dans le théorème 1, on définit sur $\mathcal{S}_n$ la fonction d'ensembles v:

$$v(A) = \sup \{ \sum_{i=0}^{\infty} l(\chi_{A_i} e_i) \mid (A_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}_A,\ (e_i)_{i \in N} \subset B \},\ \forall A \in \mathcal{S}_n.$$

Alors v est additive et absolument continue par rapport à μ. Il existe donc $v \in (L^{\infty}_R (Y_n, \mathcal{S}_n, \mu))'$ tel que $\forall A \in \mathcal{S}_n$, $v(\chi_A) = v(A)$. En vertu de la décomposition du dual de L^{∞}_R ([2], chap. 8), il existe $h \in L^1_{R+}(Y_n, \mu)$, et $v_s \in (L^{\infty}_R)'$

singulière, tels que, $\forall A \in \mathcal{S}_n$, $v(\chi_A) = \int_A h \, d\mu + v_s(\chi_A)$ v_s est singulière au sens suivant:

il existe dans $\mathcal{S}_n$, une suite décroissante $(Y_{n,j})_{j \in N}$ d'intersection μ-négligeable, telle que pour toute $f \in L^\infty_R(Y_n, \mu)$, nulle sur $Y_{n,j}$ on ait $v_s(f) = 0$. On peut supposer $Y_{n,0} = Y_n$ et on pose pour tout $j \geqslant 0$, $B_{n,j} = Y_{n,j} \setminus Y_{n,j+1}$. On a donc $\mu(Y_n \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} B_{n,j}) = 0$. On obtient donc $\forall A \in \mathcal{S}_{n,j} = \mathcal{S}_n \cap B_{n,j}$, $v(A) = \int_A h \, d\mu$.

Par conséquent v est σ-additive sur $\mathcal{S}_{n,j}$. Alors comme on a, pour tout $(e, A) \in B \times \mathcal{S}_{n,j}$ $|l(\chi_A e)| \leqslant \|e\| v(A)$, pour chaque e, $A \to l(\chi_A e)$ est une mesure réelle sur $\mathcal{S}_{n,j}$, absolument continue par rapport à la mesure positive $v|_{\mathcal{S}_{n,j}}$.
En utilisant un argument de relèvement dans $L^\infty_R(B_{n,j}, \mathcal{S}_{n,j}, v)$, on trouve $g_{n,j}$ scalairement mesurable avec $\| g_{n,j}(t) \| \leqslant 1$, $\forall t \in B_{n,j}$ telle que, $\forall e \in E$, $\forall A \in \mathcal{S}_{n,j}$.

$$l(\chi_A e) = \int_A < e, g_{n,j}(t) > v(dt)$$

Comme $v|_{\mathcal{S}_{n,j}}$ est absolument continue par rapport à $\mu|_{\mathcal{S}_{n,j}}$ on a $v|_{\mathcal{S}_{n,j}} = h_{n,j}$ $\mu|_{\mathcal{S}_{n,j}}$ avec $h_{n,j} \in L^1_{R+}(B_{n,j}, \mathcal{S}_{n,j}, \mu)$. D'où

$$l(\chi_A e) = \int_A \langle e, h_{n,j}(t) g_{n,j}(t) \rangle \mu(dt), \forall e \in E, \ \forall A \in \mathcal{S}_{n,j}.$$

Par recollement on construit $g_n \in E'^{Y_n}$ scalairement mesurable, telle que

$$g_n(t) = h_{n,j} g_{n,j}(t) \quad \text{si} \quad t \in B_{n,j}$$
$$g_n(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

Puis comme $(Y_n)_{n \in N}$ est une partie de T, on définit $g \in E'^T$ scalairement mesurableen prenant

$$g(t) = g_n(t) \quad \text{si} \quad t \in Y_n.$$

D'après la définition de g, pour $(n, j) \in N^2$, $f \in \varepsilon_E(J)$, on a

$$e(\chi_{B_{n,j}} f) = \int_T \langle \chi_{B_{n,j}} f, g \rangle \mu(dt) \tag{1}$$

Montrons que $f \in \mathcal{L}_E \to \int_T \langle f(t), g(t) \rangle \mu(dt)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_E$.

On a pour tout $n \in N$, $\mu(Y_n \setminus \bigcup_{j \in N} B_{n,j}) = 0$. Posons $N = \bigcup_{n \in N} (Y_n \setminus \bigcup_{j \in N} B_{n,j})$, N est μ-négligeable et $(B_{n,j})_{(n,j) \in N^2}$ constitue une J-partition dénombrable de $T \setminus N$. D'où

$$\forall f \in \mathcal{L}_E, \int_T \langle f, g \rangle d\mu = \int_{\underset{(n,j) \in N^2}{\cup B_{n,j}}} \langle f, g \rangle d\mu$$

Soit $D_p = \bigcup_{\substack{0 \leqslant j \leqslant p \\ 0 \leqslant n \leqslant p}} B_{n,j}$, $\forall p$. La suite (D_p) est croissante et $\bigcup_p D_p = T \setminus N$.

Considérons d'abord $f \in \mathcal{L}_E$ telle que $\langle f(t), g(t) \rangle \geqslant 0$, $\forall t \in T$.

Alors on a $0 \leqslant \int_T \langle f, g \rangle \, d\mu = \sup_{p \in N} \int_{D_p} \langle f, g \rangle d\mu$, en vertu du théorème de convergence monotone.

$f \in \mathcal{L}_E$ étant identifiée à sa classe d'équivalence, on peut supposer f J-$\mathcal{B}(E)$ mesurable. Comme E est séparable, il existe une suite $(f_k)_{k \in N}$ dans $\varepsilon_E(J)$ convergeant simplement vers f et telle que $\forall k \in N$, $| f_k | \leqslant 2 \, | f |$ (cf. [7], p. 101). Pour p fixé, la suite $(\chi_{D_p} f_k)_k$ converge simplement vers $\chi_{D_p} f$. De plus $\| \chi_{D_p} f_k \|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 2 \, \| f \|_{\mathcal{L}_E}$ pour tout p et pour tout k d'après la propriété de Riesz de la norme de $\mathcal{L}_E$. Pour tout p, tout m, tout k, on pose

$$h_p = \langle \chi_{D_p} f, g \rangle$$

$$h_{p,m} = \langle \chi_{D_p} f_m, g \rangle$$

$$\Psi_{p,k} = \inf (h_p, \sup_{0 \leqslant m \leqslant k} h^+_{p,m}).$$

Alors pour tout p fixé, $(\Psi_{p,k})_{k \in N}$ est une suite croissante de fonctions positives J-mesurables majorées par h_p telle que

$$0 \leqslant h_p(t) = \sup_k \Psi_{p,k}(t), \ \forall t \in T.$$

D'où en vertu du théorème de convergence monotone

$$0 \leqslant \int_T h_p(t) \, \mu(dt) = \sup_k \int_T \Psi_{p,k}(t) \, \mu(dt).$$

Pour chaque $k \in N$, on a par construction

$$\int_T \Psi_{p,k}(t) \, \mu(dt) \leqslant \int_T (\sup_{0 \leqslant m \leqslant k} h^+_{p,m}) (t) \, \mu(dt).$$

Nous allons montrer que $(\sup_{0 \leqslant m \leqslant k} h^+_{p,m}) (t) = \chi_{D_p}(t) \, \langle \varphi_k(t), g(t) \rangle$, $\forall t \in T$ avec $\varphi_k \in \varepsilon_E(J)$ ce qui permettra d'utiliser la formule (1).

Par définition, on a pour tout $m \in N$, $\forall t \in T$ $h_{p,m}(t) = \chi_{D_p}(t) \, \langle f_m(t), g(t) \rangle$

où $f_m(t) = \sum_{i=0}^{p_m} \chi_{A_{m,i}}(t) \, e_{m,i}$.

En désignant par $C_{m,i} = \{ t \in T \mid \langle e_{m,i}, g(t) \rangle \geqslant 0 \}$, $\forall (m, i) \in \mathcal{N}^2$ on a

$$h^+_{p,m}(t) = \chi_{D_p}(t) \, \langle \sum_{i=0}^{p_m} \chi_{A_{m,i} \cap C_{m,i}}(t) e_{m,i}, \, g(t) \rangle, \ \forall t \in T.$$

Par conséquent, pour tout $m \in N$, il existe $f'_m \in \varepsilon_E(J)$ telle que

$$h^+_{p,m}(t) = \chi_{D_p}(t)\langle f'_m(t), g(t)\rangle, \ \forall t \in T \text{ et } f'_m(T) \subset \{0\} \cup f_m(T).$$

Donc, $\forall t \in T \quad \sup\limits_{0 \leqslant m \leqslant k} h^+_{p,m} = \chi_{D_p} \sup\limits_{0 \leqslant m \leqslant k} \langle f'_m, g\rangle$

L'ensemble F_k des valeurs de $(f'_o, f'_o, \ldots, f'_k)$ est une partie finie de E contenant O. Soit $F_k = \{0 = e_o, e_1, \ldots, e_q\}$. Pour chaque $t \in T$, et pour chaque k, on pose $\varphi_k(t) = e_j$ où j est le plus petit entier $m \in \{0,1, \ldots, q\}$ tel que $\langle e_m, g(t)\rangle = \max\limits_{0 \leqslant r \leqslant k} \langle f'_r(t), g(t)\rangle$.

Dans ces conditions $\varphi_k(t) = \sum\limits_{i=0}^{q} \chi_{\varphi_k^{-1}\{e_i\}}(t) e_i$. Il est clair que $(\varphi_k^{-1}\{e_i\})_{0 \leqslant i \leqslant q}$ est une partition de T; c'est une J-partition car g est scalairement mesurable. En effet pour tout $i \in \{0,1, \ldots, q\}$, on a

$$\varphi_k^{-1}\{e_i\} = \bigcap_{0 \leqslant m < i} \{t \in T \mid \langle e_m, g(t)\rangle < \langle e_i, g(t)\rangle\} \cap \bigcap_{1 \leqslant m \leqslant p} \{t \in T \mid \langle e_m, g(t)\rangle \leqslant \langle e_i, g(t)\rangle\}$$

Par suite l'application $t \mapsto \varphi_k(t)$ de T dans E appartient à $\varepsilon_E(J)$: comme $\varphi_k(T) \subset F_k$ on a $|\varphi_k| \leqslant \sup\limits_{0 \leqslant m \leqslant k} |f_k| \leqslant 2|f|$ et $\chi_{D_p}\langle \varphi_k, g\rangle = \sup\limits_{0 \leqslant m \leqslant k} h^+_{p,m}$

Donc, pour tout $k \in N$, on a

$$0 \leqslant \int_T \Psi_{p,k}(t)\, \mu(dt) \leqslant \int_T \chi_{D_p}(t) \langle \varphi_k(t), g(t)\rangle\, \mu(dt)$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \int_T \chi_{B_{n,j}}(t) \langle \varphi_k(t), g(t)\rangle\, \mu(dt)$$

d'où, en utilisant la formule (1)

$$0 \leqslant \int_T \Psi_{p,k}(t)\, \mu(dt) \leqslant \sum_{n=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} l(\chi_{B_{n,j}} \varphi_k) = l(\chi_{D_p}\varphi_k)$$

ce qui implique $0 \leqslant \int_T \Psi_{p,k}(t)\, \mu(dt) \| l \| \; \| \chi_{D_p}\varphi_k \|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 2 \| l \| \; \| f \|_{\mathcal{L}_E}$

d'après la propriété de la norme de $\mathcal{L}_E$.

Ainsi, si $\langle f(t), g(t)\rangle$ est $\geqslant 0$ pour tout $t \in T$, on a, en vertu de ce qui précède $\int \langle f, g\rangle\, d\mu \leqslant 2 \| l \| \; \| f \|_{\mathcal{L}_E}$. Passons au cas général.

Posons $C = \{t \in T \mid \langle f(t), g(t)\rangle \geqslant 0\}$. Alors on a

$$\int_T \langle f(t), g(t)\rangle\, \mu(dt) = \int_T \langle \chi_C(t) f(t), g(t)\rangle\, \mu(dt) - \int_T \langle -\chi_{T \setminus C}(t) f(t), g(t)\rangle\, \mu(dt)$$

Comme $\chi_C f$ et $-\chi_{T \setminus C} f$ sont des éléments de $\mathcal{L}_E$ pour lesquels on a pour tout $t \in T$, $\langle \chi_C(t) f(t), g(t)\rangle \geqslant 0$ et $\langle -\chi_{T \setminus C}(t) f(t), g(t)\rangle \geqslant 0$

$\left| \int_T \langle f(t), g(t)\rangle \, \mu(dt) \right| \leqslant 4 \, \| l \| \; \| f \|_{\mathcal{L}_E}$. Ceci prouve que $f \to \int_T \langle f(t)\, g(t)\rangle \; \mu(dt)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_E$.

Il en résulte que la formule de représentation intégrale (1) s'étend aux fonctions $f \in \mathcal{L}_E$, puisque pour tout n $\chi_{Y_n} \mathcal{L}_E$ est l'adhérence de $\chi_{Y_n} \varepsilon_E(J)$. Soit

$$(2) \qquad \forall f \in \mathcal{L}_E,\ \forall (n, j) \in N^2 \quad l(\chi_{B_{n,j}} f) = \int_T \langle \chi_{B_{n,j}} f, g\rangle \, d\mu.$$

Posons $l_a(f) = \int_T \langle f(t), g(t)\rangle \; \mu(dt)$, $\forall f \in \mathcal{L}_E$. Alors l_a appartient à $\mathcal{L}'_E$ et l_a est absolument continue. Soit $l_s = l - l_a$. Alors $l_s \in \mathcal{L}'_E$. Il reste à vérifier que l_s est singulière au sens défini dans l'énoncé du théorème.

En réindexant $(B_{n,j})_{n,j \in N^2}$ en $(Z'_n)_{n \in N}$ on obtient une J-partition de $T \setminus N$ avec $\mu(N) = 0$. En posant $Z_n = \bigcup_{j \geqslant n} Z'_j$ on obtient dans J, une suite décroissante d'intersection vide puisque $\bigcap_{n \in N} Z_n = \bigcap_n \bigcup_{j \geqslant n} Z'_j$ où $(Z'_j)_{j \in N}$ est une suite disjointe. Comme $\bigcup_{n \in N} Z_n = \bigcup_{j \in N} Z'_j$ on a $\mu(T \setminus \bigcup_n Z_n) = 0$. Considérons $f \in \mathcal{L}_E$, f nulle sur Z_n. On a $f = \chi_{T \setminus Z_n} f$ soit

$$f = \sum_{k=1}^{n} \chi_{Z_{k-1} \setminus Z_k} f = \sum_{k=1}^{n} \chi_{Z'_k} f. \text{ On a donc } l_s(f) = \sum_{k=1}^{n} l_s(\chi_{Z'_k} f) \text{ d'où}$$

$l_s(f) = 0$ d'après (2). Ceci termine la démonstration.

Remarques. Signalons les variantes suivantes obtenues à partir du théorème 3 et de sa démonstration.

1) Soit $\varepsilon_E(J)$ l'ensemble des classes d'applications J-étagées de T dans E. Soit J_E l'adhérence dans $\mathcal{L}_E$ de $\varepsilon_E(J)$. Alors toute $l \in \mathcal{L}'_E$ (dual de $\mathcal{L}_E$) se décompose en $l = l_a + l_s$ avec $l_a \in \mathcal{L}'_E$ absolument continue et $l_s \in \mathcal{L}'_E$, singulière au sens suivant : il existe dans J une suite décroissante $(Z_n)_{n \in N}$ d'intersection vide telle que $\mu(T \setminus \bigcup_n Z_n) = 0$ et telle que pour toute $f \in J_E$ $l_s(\chi_{T \setminus Z_n} f) = 0$, $\forall n \in N$.

2) On note $\varepsilon^d_E(J)$ l'ensemble des classes d'applications dénombrablement J—étagées de T dans E. On suppose que $\mathcal{L}_E$ soit l'adhérence de $\varepsilon^d_E(J)$. Alors toute $l \in \mathcal{L}'_E$ se décompose en $l = l_a + l_s$ avec $l_a \in \mathcal{L}'_E$ absolument continue et $l_s \in \mathcal{L}'_E$ singulière au sens suivant :

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall A \in J$ de mesure $\mu(A)$ finie, $\exists f_\varepsilon \in \varepsilon^d_E(J)$ et $A_\varepsilon \in J \cap A$ tels que $\mu(A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et $l_s(\chi_{A_\varepsilon} f_\varepsilon) \geqslant \| l_s \| - \varepsilon$.

Ceci se démontre facilement à partir des résultats du théorème 3 (cf. Démonstration du corollaire VIII 12 de [2]).

Ainsi une forme linéaire continue, non nécessairement régulière, l, définie sur un espace normé décomposable $\mathcal{L}_E$ dont la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_E}$ est une norme de Riesz, se décompose en

$$l = l_a + l_s$$

avec l_a absolument continue et l_s singulière dans un sens plus faible. Et la démonstration indiquée dans le théorème 2 ne s'applique pas si l n'est pas régulière. Signalons deux cas particuliers d'espaces normés décomposables $\mathcal{L}_E$ où toute forme sous linéaire continue additive sur $\mathcal{L}_E$ est régulière.

Cas 1. La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_E}$ possède la propriété suivante:

Pour $\|f\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1$, $\|g\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1$, $A \in J$, $B \in J$, $A \cap B = \phi$

On a $\|\chi_A f + \chi_B g\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1$.

Cas 2. Pour toute suite (A_n) dans J avec $A_n \downarrow \phi$, pour toute $f \in \mathcal{L}_E$, il existe un entier n_0 tel que $\|\chi_{A_{n_0}} f\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1$.

La vérification est facile et est laissée au lecteur. (Remarquer que $m_p(A, f) = m_p(T, \chi_A f)$ pour tout $A \in J$ et tout $f \in \mathcal{L}_E$).

Pour terminer donnons une application directe du théorème précédent. On suppose que E est le dual fort d'un espace de Banach réflexif séparable F. Soit $\mathcal{L}_F^*$ l'espace vectoriel des classes d'application μ-mesurables g de T dans F telles que $\langle f, g \rangle$ soit μ — intégrable pour tout $f \in \mathcal{L}_E$. Si $\mathcal{L}_F^*$ est décomposable, on a le

Corollaire. Les hypothèses et notations sont celles du théorème précédent. Soit B un convexe de $\mathcal{L}_F^*$ possédant les propriétés suivantes

(i) B est $\sigma(\mathcal{L}_F^*, \mathcal{L}_E)$ fermé

(ii) $\forall (g_1, g_2) \in B \times B$, $\forall (A_1, A_2) \in J \times J$ avec $A_1 \cap A_2 = \phi$, on a $\chi_{A_1} g_1 + \chi_{A_2} g_2 \in B$.

(iii) B est borné au sens suivant: $\sup\limits_{\|f\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1} \delta^*(f, B) = \alpha < +\infty$.

Alors il existe une multi-application Γ de T dans les convexes non vides $\sigma(F, E)$ compacts de F, dont le graphe appartient à $J \otimes \mathcal{B}(F)$, telle que $B = S_\Gamma$, où S_Γ désigne l'ensemble des classes d'équivalence modulo l'égalité μ-presque partout des sélections μ-mesurables de Γ appartenant à $\mathcal{L}_F^*$.

Démonstration. D'après (iii) $f \to \delta^*(f, B)$ est une forme sous linéaire continue sur $\mathcal{L}_E$, additive en vertu de (ii). Alors en vertu du théorème $\delta^*(., B) = l_a(.) + l_s(.)$ où l_s est singulière au sens suivant: il existe dans J une suite décroissante $(A_n)_{n\in N}$ d'intersection vide telle que $\mu(T\setminus\bigcup_n A_n) = 0$ et $l_s(\chi_{T\setminus A_n} f) = 0$, $\forall n\in N$, $\forall f\in \mathcal{L}_E$, et où $l_s(f) = \int_T \delta^*(f,\Gamma)\,\mu(dt)$, $\forall f\in\mathcal{L}_E$ avec Γ multi-application de T dans les convexes non vides $\sigma(F,E)$ compacts de F, dont le graphe appartient à $J\otimes\mathcal{B}(F)$.

Pour tout $n\in N$, pour tout $f\in\mathcal{L}_E$, on a, en vertu du théorème (*) de dualité ([2], th. VII, 7)

$$\delta^*(f,\chi_{T\setminus A_n}B) = \delta^*(\chi_{T\setminus A_n}f, B) = \int_T \delta^*(\chi_{T\setminus A_n}f,\Gamma)\,\mu(dt)$$

$$= \int_T \delta^*(f,\chi_{T\setminus A_n}\Gamma)\,\mu(dt) = \delta^*(f,\chi_{T\setminus A_n}S_\Gamma)$$

Alors, $\forall n\in N$, $\delta^*(f,\chi_{T\setminus A_n}B) = \delta^*(f,\chi_{T\setminus A_n}S_\Gamma)$, et puisque B et S_Γ sont $\sigma(\mathcal{L}_F^*,\mathcal{L}_E)$ fermés on obtient, $\chi_{T\setminus A_n}B = \chi_{T\setminus A_n}S_\Gamma$, $\forall n\in N$. On a donc, $\forall u\in B$, $\forall n\in \mathbf{N}$, $\exists g_n\in S_\Gamma$ tel que $\chi_{T\setminus A_n}(t)\,u(t) = \chi_{T\setminus A_n}\,g_n(t)$. Alors $g_n(t) = g_{n+1}(t)$, $\forall t\in T\setminus A_n$ car $T\setminus A_n \subset T\setminus A_{n+1}$. Il existe donc $g: T\to F$ μ-mesurable telle que pour tout n, $g|_{T\setminus A_n} = g_n$ p.p.

D'où $g(t)\in\Gamma(t)$ p.p. Alors $u = g$ μ p.p. et $g\in S_\Gamma$.

On a donc $B\subset S_\Gamma$ et on obtient par un raisonnement analogue $S_\Gamma\subset B$. D'où $B = S_\Gamma$ et le corollaire est établi.

Remarque. Si $\mathcal{L}_F^* = L_F^1(T,J,\mu)$ et si $\mathcal{L}_E = L_E^\infty(T,J,\mu)$, le corollaire précédent montre qu'un convexe fermé borné décomposable dans $L_F^1(T,J,\mu)$ est *compact* pour la topologie $\sigma(L_F^1, L_E^\infty)$ (cf BISMUT [1], I, th. 1). On peut consulter ([2], chapitre V) pour d'autres résultats de compacité dans le cas où F n'est pas réflexif.

Commentaires. Le théorème 1 généralise un résultat de Macdonald ([6], th. 7). En ce qui concerne le théorème 2, signalons que Pallu de la Barrière a obtenu un résultat de décomposition des formes sous linéaires continues sur L_E^∞ ([8]) et, plus récemment Kozek ([5]); et Giner ([4]) ont obtenu des résultats de décomposition de formes linéaires continues sur les espaces d'Orlicz; (cf. aussi, [2], th. VIII.5) pour le cas où l'espace mesuré (T,J,μ) n'est pas σ-finie.

(*) Ce théorème et sa démonstration sont reproduites dans le chapitre II.

REFERENCES

[1] BISMUT J.M., Intégrales convexes et Probabilités. J. Math. Analysis and applications 42, P. 639-673 (1973).

[2] CASTAING C. et VALADIER M., Convex Analysis and Measurable multifunctions. Lecture Notes N° 580. Springer Verlag (1977)

[3] DE JONGE, Représentation of linear functionals on a class of normed Köthe spaces, Math. Institute Universiteit Toernosiveld (1975).

[4] GINER E., Decomposition et dualité des espaces d'Orlicz. Séminaire d'Analyse convexe Montpellier 1976, exposé 16.

[5] KOZEK A., Convex integral functional on Orlicz spaces, Institute of mathematics, Polish Acad. Sc. Preprint 89. (1976).

[6] MACDONALD A.D., Vector valued Köthe function spaces I, Illinois J. of Math. vol. 17, N° 4, p. 531-545 (1973).

[7] NEVEU J., Martingales à temps discret. Masson (1972).

[8] PALLU DE LA BARRIERE, Etude de quelques espaces liés à l'intégration multivoque C.R. Acad. Sc. 278, p. 1491—1494 (1974).

[9] TRAYNOR T., A general Hewitt-Yosida decomposition, Canadian J. Math. vol. XXIV, N°6, p. 1164-1169 (1972).

CHAPITRE II

INTÉGRANDES CONVEXES SUR DES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Dans ce chapitre, on développe la théorie des intégrales convexes de la forme

$$I_f(u) = \int_T f(t, u(t))\, \mu(dt)$$

qui a été étudiée par Rockafellar ([3], [4], [5]) pour les espaces de Banach réflexifs séparables. Dans le paragraphe 1, on donne quelques résultats de mesurabilité concernant les intégrandes convexes normaux. Dans le paragraphe 2, on étend la défilion des espaces décomposables due à Rockafellar aux espaces localement convexes et on obtient un théorème de dualité des intégrales convexes définies sur un couple d'espaces décomposables, lequel théorème généralise le théorème obtenu par Rockafellar ([5]).

Dans ce qui suit, (T, J, μ) est un espace mesuré σ-finie avec μ-positive et J μ-complète et E un espace localement convexe séparé. On rappelle qu'un espace topologique séparé S est *souslinien* s'il existe un espace métrique séparable complet P et une application continue surjective $h: P \to S$. Pour tout espace topologique X, $\mathcal{B}(X)$ désigne sa tribu borélienne.

§ 1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES DE MESURABILITÉ.

Définition. Une application $f : T \times E \to]-\infty, +\infty]$ est un *intégrande normal* si pour tout t fixé dans T, $f(t,.)$ est semi-continue inférieurement sur E et f est $J \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ; f est un *intégrande convexe normal* si f est normal et si pour tout t fixé dans T, $f(t,.)$ est convexe.

Dans tout ce qui suit, on suppose que E et son dual E' sont sousliniens pour des topologies localement convexes compatibles avec la dualité. On rappelle un théorème d'existence de sections mesurables suivant.

Théorème (en rappel) ([2]). Soient S un espace souslinien et Γ une application de T dans l'ensemble des parties non vides de S. Si le graphe de Γ appartient à $J \otimes \mathcal{B}(S)$, alors il existe une suite (σ_n) d'applications $(J, \mathcal{B}(S))$-mesurables de T dans S telle que, pour tout $t \in T$, $(\sigma_n(t))_n$ soit dense dans $\Gamma(t)$; chacune des σ_n ne prenant qu'un nombre fini de valeurs dans S.

1. Lemme 1. Soit f une application de $T \times E$ dans $]-\infty, +\infty]$. Alors f est un intégrande normal si et seulement si pour tout t fixé dans T, l'ensemble

$$\text{épi} \quad f_t = \{(x, r) \in E \times R \mid f(t, x) \leqslant r\}$$

est fermé et le graphe de la multi-application $t \mapsto \text{épi}\, f_t$ appartient à $J \otimes \mathcal{B}(E \otimes R)$.

Démonstration. Tout d'abord, $f(t,.)$ est semi-continue inférieurement si et seulement si *épi* f_t est fermé dans l'espace produit $E \times R$.

Supposons f normal. Alors l'ensemble

$$G = \{(t, x, r) \mid T \times E \times R \mid f(t, x) \leqslant r\}$$

qui est le graphe de la multi-application $t \mapsto \text{épi}\, f_t$, appartient à $J \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(R)$. Par ailleurs, $J \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(R)$ est égal à $J \otimes \mathcal{B}(E \times R)$ parce que $\mathcal{B}(E \times R)$ est égal à $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(R)$ en utilisant le fait que R est un espace de Lindelöff car R possède une base dénombrable d'ensembles ouverts.

Inversement, si le graphe G de la multi-application $t \mapsto \text{épi}\, f_t$ appartient à $(J \otimes \mathcal{B}(E)) \otimes \mathcal{B}(R)$, alors, pour tout r fixé dans R, il est classiquement connu que la coupe suivant r de G,

$$\{(t, x) \in T \times E \mid (t, x, r) \in G\}$$

appartient à $J \times \mathcal{B}(E)$. Comme

$$\{(t, x) \in T \times E \mid (t, x, r) \in G\} = \{(t, x) \in T \times E \mid f(t, x) \leqslant r\}$$

l'application f est $J \otimes \mathcal{B}(E)$ - mesurable.

2. Corollaire. Soit f un intégrande normal sur $T \times E$, alors la fonction $f^* : T \times E' \to]-\infty, +\infty]$

$$f^*(t, x') = sup[\langle x', x \rangle - f(t, x) \mid x \in E]$$

est un intégrande convexe normal sur $T \times E'$.

Démonstration. Il est clair, en vertu de la définition de f^*, qu'on a

$$f^*(t, x') = sup\{\langle x' - x \rangle - r \mid (x, r) \in \text{épi}\, f_t\}$$

Comme f est normal, le lemme précédent montre que le graphe de la multi-application $t \mapsto épi\ f_t$ appartient à $J \otimes \mathcal{B}(E \times R)$. Puisque $E \times R$ est souslinien, il existe, d'après le théorème en rappel, une suite d'applications (u_n, r_n), $(J, \mathcal{B}(E) \times \mathcal{B}(R))$-mesurables de T dans $E \times R$ telle que pour tout $t \in T$, $(u_n(t), r_n(t))_n$ soit dense dans $épi\ f_t$. D'où

$$f^*(t, x') = \sup_n [\langle x', u_n(t)\rangle - r_n(t)]$$

Donc f^* est $J \otimes \mathcal{B}(E')$-mesurable puisque chacune des $(t, x') \mapsto \langle x', u_n(t)\rangle$ est $J \otimes \mathcal{B}(E')$-mesurable en appliquant le théorème en rappel à chacune des u_n.

3. Définition. Soit $\mathcal{L}_E$ (resp. $\mathcal{L}_{E'}$) un espace vectoriel des applications $(J, \mathcal{B}(E))$ (resp. $(J, \mathcal{B}(E'))$) mesurables de T dans E (resp. E') tel que pour tout u (resp. v) appartenant à $\mathcal{L}_E$ (resp. $\mathcal{L}_{E'}$) la fonction scalaire $t \mapsto \langle u(t), v(t)\rangle$ soit intégrable sur T. En vertu du théorème cité en rappel, la fonction $t \mapsto \langle u(t), v(t)\rangle$ est automatiquement J-mesurable. Soit A un ensemble dans J tel que $\mu(A)$ soit finie. Soit $m_E(A, A \cap J, \mu)$ (resp. $m_{E'}(A, A \cap J, \mu)$) l'espace vectoriel des applications f $(J, \mathcal{B}(E))$ (resp. $(J, \mathcal{B}(E'))$) mesurables de A dans E (resp. E') tel que $f(A)$ soit relativement compact dans E (resp. E').

Nous allons donner maintenant la définition d'espace décomposable qui étend celle de Rockafellar. L'espace mesuré (T, J, μ) étant σ-finie, il existe une suite croissante (T_n) de parties intégrables de T avec $T = \bigcup_n T_n$. $\mathcal{L}_E$ est décomposable si

(i) $\forall A \in J$, $\forall f \in \mathcal{L}_E$, on a $\chi_A f \in \mathcal{L}_E$.

(ii) $\bigcup_n m_E(T_n, T_n \cap J, \mu) \subset \mathcal{L}_E$

Si $\mathcal{L}_E$ est décomposable, pour tout $A \in J$, tout $g \in \mathcal{L}_{E'}$, on a $\chi_A g \in \mathcal{L}_{E'}$. $\mathcal{L}_{E'}$ est décomposable si $\mathcal{L}_{E'}$ vérifie

(j) $\forall A \in J$, $\forall g \in \mathcal{L}_{E'}$. on a $\chi_A g \in \mathcal{L}_E$.

(jj) $\bigcup_n m_{E'}(T_n, T_n \cap J, \mu) \subset \mathcal{L}_{E'}$.

Remarque. Si E est un espace de Banach réflexif séparable et si E_σ est l'espace vectoriel E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$, alors E_σ est souslinien parce que la topologie de E est plus fine que la topologie faible $\sigma(E, E')$ de sorte que notre définition de décomposabilité étend celle de Rockafellar puisque $m_{E_\sigma}(T_n, T_n \cap J, \mu)$ est l'espace $\mathcal{L}_E^\infty(T_n, T_n \cap J, \mu)$.

4 — La proposition suivante qui repose sur une propriété spéciale des espaces sousliniens intervient dans la démonstration du théorème de dualité des intégrales convexes.

Proposition 4. Soit E un espace localement convexe souslinien et soit u une application mesurable de T dans E. Alors il existe une suite (A_n) d'ensembles J-mesurables telle que

$$\begin{cases} A_n \cap A_m = \phi \text{ si } n \neq m \\ \mu(T \setminus \bigcup_n A_n) = 0 \\ \forall n.\ \overline{u(A_n)} \text{ est compact.} \end{cases}$$

Démonstration. Comme μ et σ-finie, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où μ est bornée. Considérons la mesure borélienne définie ν sur $\mathcal{B}(E)$ par

$$\nu(B) = \mu[u^{-1}(B)], \quad \forall B \in \mathcal{B}(E).$$

Comme E est souslinien, ν est une mesure de Radon d'après (Bourbaki, [1], prop. 3, P. 49). Donc il existe une suite (K_n) de compacts dans E telle que

$$\begin{cases} K_n \cap K_m = \phi \quad \text{si } n \neq m \\ \nu(\bigcup_n K_n) = \nu(E) \end{cases}$$

Posant $A_n = u^{-1}(K_n)$, $\forall n$; il est clair que la suite (A_n) répond à l'énoncé.

5. **Proposition 5.** Supposons $\mathcal{L}_E$ décomposable. Soit v un élément de $\mathcal{L}_{E'}$ tel que

$$\langle v, u\rangle = \int_T \langle v(t), u(t)\rangle \, \mu(dt) = 0$$

pour tout $u \in \mathcal{L}_E$. Alors v est égale à zéro presque partout.

Démonstration. Comme E est le dual de E', il existe dans E une suite (e_m) séparant les points de E'. Il suffit alors de montrer que, pour tout n fixé, pour tout x fixé dans E, $\langle v(t), x\rangle = 0$ presque partout sur T_n.

Soit $A \in T_n \cap J$. En vertu de la décomposabilité de $\mathcal{L}_E$, la fonction vectorielle $\chi_A x$ appartient à $m_E(T_n, T_n \cap J, \mu)$, donc $\chi_A x$ appartient à $\mathcal{L}_E$. Ceci implique

$$\int_A \langle v(t), x\rangle \, \mu(dt) = 0.$$

Par suite $\langle v(t), x\rangle = 0$ presque partout sur T_n. D'où notre proposition.

6. **Corollaire.** Soit L_E (resp. $L_{E'}$) le quotient de $\mathcal{L}_E$ (resp. $\mathcal{L}_{E'}$) par la relation «égalité presque partout». Si $\mathcal{L}_E$ et $\mathcal{L}_{E'}$ sont décomposables, alors la forme bilinéaire

$$\langle u, v\rangle = \int_T \langle u(t), v(t)\rangle \, \mu(dt)$$

définit une dualité séparante entre L_E et $L_{E'}$.

Démonstration. Ceci résulte directement de la proposition précédente.

§2. THÉORÈME DE DUALITÉ DES INTÉGRALES CONVEXES POUR DES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

7. **Convention.** Si f est un intégrande normal et si μ appartient à $\mathcal{L}_E$, nous adoptons la convention suivante.

$$I_f(u) = \begin{cases} \int_T f(t, u(t)) \, \mu(dt) & \text{si } \int_T f(t, u(t))^+ \, \mu(dt) < +\infty \\ +\infty & \text{si } \int_T f(t, u(t))^+ \, \mu(dt) = +\infty \end{cases}$$

Si f est normal, alors f^* est normal d'après le corollaire 2. Ainsi nous pouvons adopter la même convention pour l'intégrande duale f^*.

Théorème. Si $\mathcal{L}_E$ est décomposable et si la fonctionnelle intégrale I_f définie ci-dessus sur $\mathcal{L}_E$ est finie pour au moins un élément u_0 dans $\mathcal{L}_E$, alors la fonctionnelle intégrale I_{f^*} définie sur $\mathcal{L}_{E'}$ par

$$I_{f^*}(v) = \begin{cases} \int_T f^*(t, v(t))\ \mu(dt) & \text{si } \int_T f^*(t, v(t))^+\ \mu(dt) < +\infty \\ +\infty & \text{si } \int_T f^*(t, v(t))^+\ \mu(dt) = +\infty \end{cases}$$

est conjuguée de I_f, c'est à dire,

$$I_{f^*}(v) = \sup \{\langle u, v\rangle - I_f(u) \mid u \in \mathcal{L}_E\}$$

pour tout $v \in \mathcal{L}_{E'}$.

De plus, si f_t est convexe sur E pour tout $t \in T$, si $\mathcal{L}_{E'}$ est décomposable et I_{f^*} est finie pour au moins un élément $v_0 \in \mathcal{L}_{E'}$, alors I_f et I_{f^*} sont convexes, semi-continue inférieurement pour toutes topologies compatibles avec la dualité sur L_E et $L_{E'}$, et duales l'une de l'autre.

Démonstration. Il suffit de prouver que pour tout v dans $\mathcal{L}_{E'}$, l'inégalité

$$\int_T f^*(t, v(t))\ \mu(dt) \leq \sup \{\langle v, u\rangle - I_f(u) \mid u \in \mathcal{L}_E\}$$

car l'inégalité $\geq$ est évidente. Soit β un nombre réel tel que $\beta < I_{f^*}(v)$. Il s'agit de prouver l'existence d'un élément $u \in \mathcal{L}_E$ tel que

$$\beta \leq \langle u, v\rangle - I_f(u)$$

Comme $I_f(u_0)$ est finie, il existe une fonction réelle intégrable α telque

$$\langle v(t), u_0(t)\rangle - f(t, u_0(t)) \geq \alpha(t)$$

pour tout $t \in T$. D'où, pour tout $t \in T$.

$$f^*(t, v(t)) \geq \alpha(t)$$

Nous allons montrer maintenant l'existence d'une fonction réelle intégrable Υ telle que

$$\begin{cases} \int_T \Upsilon(t)\ \mu(dt) > \beta \\ \Upsilon(t) < f^*(t, v(t)) \text{ pour tout } t \in T. \end{cases}$$

Comme μ est σ-finie, il existe une fonction positive intégrable h définie sur T. Si $I_{f^*}(v)$ est finie ; prenons

$$\Upsilon(t) = f^*(t, v(t)) - \varepsilon\ h(t)$$

où ε est un nombre réel strictement positif suffisamment petit. Si $I_{f^*}(v)$ vaut $+\infty$, considérons la suite (ξ_n) de fonctions intégrables sur T ainsi définies,

$$\xi_n(t) = \begin{cases} \inf\ [n\ h(t), \frac{1}{2} f^*(t, v(t))] \text{ si } f^*(t, v(t)) > 0 \\ f^*(t, v(t)) - h(t) \text{ si } f^*(t, v(t)) \leqslant 0 \end{cases}$$

Par définiion des ξ_n, on a

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = \frac{1}{2} f^*(t, v(t)) \text{ si } f^*(t, v(t)) > 0$$

de sorte que $\lim_{n\to\infty} \int_T \xi_n(t)\ \mu(dt) = +\infty$ en vertu du théorème de convergence monotone. Parsuite, il existe un entier N_0 tel que

$$\int_T \xi_{N_0}(t)\ \mu(dt) > \beta$$

Il suffit de prendre $\gamma(t) = \xi_{N_0}(t)$ $(t \in T)$ pour obtenir l'inégalité $\gamma(t) < f^*(t, v(t))$ pour tout $t \in T$. Considérons alors la multi-application

$$\Gamma(t) = \{x \in E | \langle v(t), x\rangle - f(t,x) \geqslant \gamma(t)\}, \quad \forall t \in T.$$

Alors Γ est à valeurs fermées non vides de E et le graphe de Γ appartient à $J \otimes \mathcal{B}(E)$. Donc Γ admet une section $(J, \mathcal{B}(E))$ - mesurable, s, d'après le théorème cité en rappel. En vertu de la proposition 4 et du fait que μ est σ-finie, il existe une suite croissante d'ensembles intégrables (Z_m) telle que

$$\begin{cases} \mu(T \setminus \bigcup_m Z_m) = 0 \\ \forall m,\ \chi_{Z_m} s \in \bigcup_n m_E(T_n, T_n \cap J, \mu) \end{cases}$$

En vertu de la décomposabilité de $\mathcal{L}_{E'}$ pour tout m, l'application

$$u_m(t) = \chi_{Z_m}(t)\ s(t) + \chi_{T\setminus Z_m}(t)\ u_0(t)$$

appartient à $\mathcal{L}_E$. Et l' on a

$$\langle V(t), u_m(t)\rangle - f(t, u_m(t)) \geqslant \gamma(t) \quad \text{si} \quad t \in Z_m$$
$$\langle V(t), u_m(t)\rangle - f(t, u_m(t)) \geqslant \alpha(t) \quad \text{si} \quad t \in T\setminus Z_m$$

Donc

$$\int_T \langle B(t), u_m(t)\rangle\ \mu(dt) - \int_T f(t, u_m(t))\ \mu(dt) \geqslant \int_{Z_m} \gamma(t)\ \mu(dt) + \int_{T\setminus Z_m} \alpha(t)\mu\ (dt).$$

Pour m assez grand, on a alors

$$\int_T \langle v(t), u_m(t)\rangle\ \mu(dt) - \int_T f(t, u_m(t))\ \mu(dt) \geqslant \beta.$$

D'où

$$I_{f^*}(v) = \sup \{ \langle v, u\rangle - I_f(u) \mid u \in \mathcal{L}_E \}$$

Remarques

1) Lorsque E est un espace de Banach séparable et E' son dual faible, on peut remplacer dans la définition des espaces $m_E(T_n, T_n \cap J, \mu)$ et $m_{E'}(T_n, T_n \cap J, \mu)$ le mot « compact » par borné ». Et la notion de décomposabilité de $\mathcal{L}_E$ et $\mathcal{L}_{E'}$, reste valable ainsi que la démonstration du théorème précédent.

Cependant, il n'est pas nécessaire d'utiliser la proposition 4 dans le cas considéré, en remarquant que, pour toute application scalairement mesurable v de T dans E (resp. E'), la fonction $t \mapsto \|v(t)\|_E$ (resp. $\|v(t)\|_{E'_b}$) est mesurable, E'_b étant le dual fort de E'.

2) La notion de décomposabilité introduite dans ce chapitre est, enfait, plus générale que celle introduite dans le livre de Castaing-Valadier. ([2]) Cette notion a l'avantage de s'appliquer aux espaces d'Orlicz.

3) Il y a une variante du théorème de dualité précédent, à savoir le cas où E est un espace de Banach réflexif non nécessairement séparable. Pour ne pas alourdir ce chapitre, je n'ai pas développé ce point ici. Je signale que cette variante s'obtient en utilisant les mêmes arguments de la démonstration du théorème de dualité et un théorème de section mesurable pour un espace de Banach réflexif non séparable. Cependant, les technique de démonstration données dans le paragraphe 1 ne restent plus valables. Mais on peut démontrer, moyennant des hypothèses de régularité sur l'intégrande f, que pour toute application mesurable v de T dans E'_b, la fonction composée

$$t \mapsto f^*(t, v(t)) = sup\,[\langle v(t), x \rangle - f(t, x) \mid x \in E]$$

est mesurable sur T; lorsque T est un espace compact muni d'une mesure de Radon positive μ.

Pour terminer, je signale que les démonstrations détaillées de cette variante sont données dans le chapitre VII du livre de Castaing-Valadier ([2]) et ont été traitées dans un exposé oral à l'Ecole d'Eté de Nha Trang.

REFERENCES

[1] BOURBAKI, N., Intégration sur les espaces topologiques séparés. Chap. 9, Hermann Paris 1969

[2] CASTAING C. et VALADIER M., Convex Analysis and measurable multifunctions. Lectures Notes N° 580 Springer Verlag. Berlin–Heidelberg–New York 1977.

[3] ROCKAFELLAR, R.T., Integrals which are convex functionals, Pacific Journal of Math. 24-3, 525-539 (1968).

[4] ROCKAFELLAR, R.T., Integrals which are convex functionls II. Pacific Journal of Math. 39-2, 439-469 (1971).

[5] ROCKAFELLAR, R. T., Convex integral functionals and duality. Contribution to non linear functional analysis. Academic Press, 215-236 (1971).

CHAPITRE III

APPLICATIONS DE LA DECOMPOSITION DES FORMES SOUS-LINEAIRES CONTINUES DEFINIES SUR UN ESPACE DECOMPOSABLE ET DE LA DUALITE DES INTEGRALES CONVEXES

Les notations et définitions étant celles des chapitres précédents, on présente dans ce chapitre quelques applications des résultats obtenus dans les chapitres I et II. On donne dans le paragraphe 1, la formule de polarité des intégrales convexes définies sur un espace vectoriel normé décomposable de fonctions vectorielles mesurables et on en déduit la décomposition des sous gradients des intégrales convexes définies sur cet espace et un *théorème de minimisation sans compacité.*

Dans le paragraphe 2, on présente des applications directes du théorème de décomposition obtenu dans le chapitre I. On y trouve notamment un théorème de fermeture qui intervient dans les équations différentielles, généralisant des résultats obtenus par ARSTEIN ([1]) et WAKEMANN ([8]).

Enfin, dans le paragraphe 3, on présente l'existence des solutions d'une équation l'évolution aléatoire du type

$$-\dot{X}(\omega, t) \in \partial\Psi_{\Gamma(\omega, t)}(X(\omega, t))$$

où ω parcourt l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et t parcourt l'intervalle $[0, T]$, $\Gamma(\omega, t)$ est un convexe aléatoire, à variation continue à droite par rapport au paramètre t et $\partial\Psi_{\Gamma(\omega,t)}(X(\omega,t))$ est le cône normal de $\Gamma(\omega, t)$ en $X(\omega,t)$. L'existence des solutions d'une telle équation a été également démontrée de façon indépendante par Moreau ([5]) dans le cas où le convexe $\Gamma(\omega, t)$ ne dépend pas du paramètre ω.

§ 1. POLARITÉ INTÉGRALES CONVEXES ET THÉORÈME DE MINIMISATION SANS COMPACITÉ.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que $\mathcal{L}_E$ est un espace vectoriel normé décomposable au sens donné dans des chapitres précédents. On suppose de plus que la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_E}$ possède l'une des deux propriétés suivantes.

(1) Pour tout u et tout v appartenant à la boule unité U de $\mathcal{L}_E$ et pour tout A et tout B dans J, on a $\chi_A u + \chi_B v \in U$.*)

(2) Pour toute suite décroissante (A_n) dans J, d'intersection ϕ, pour tout $u \in \mathcal{L}_E$, il existe un entier n tel que $\|\chi_{A_{x_0}} u\|_{\mathcal{L}_E} \leqslant 1$.

Soit $\mathcal{L}_{E'}$ l'espace vectoriel des classes d'application scalairement mesurables v de T dans E' telles que $\langle v, u\rangle$ soit intégrable pour tout $u \in \mathcal{L}_{E'}$ Dans ce qui suit, on suppose que $\mathcal{L}_{E'}$ est décomposable comme $\mathcal{L}_E$. Soit $\mathcal{L}'_E$ le dual topologique de $\mathcal{L}_E$.

1. Théorème 1. Soient f un intégrande convexe normal sur $T \times E$ et f^* l'intégrande convexe normal, dual de f. Soient I_f et I_{f^*} les intégrandes convexes définies respectivement sur $\mathcal{L}_E$ et $\mathcal{L}_{E'}$ et satisfaisant au théorème de dualité indiqué dans le chapitre II. Pour tout $l \in \mathcal{L}'_E$, on pose

$$(I_f)^*(l) = sup\,\{l(u) - I_f(u) \mid u \in \mathcal{L}_E\}$$

Alors on a la formule de polarité suivante:

$$(I_f)^*(l) = I_{f^*}(v) + \delta^*(l_s \mid dom\ I_f) \text{ où}$$

(*) Pour tout mesurable $A \in J$, χ_A désigne sa fonction caractéristique.

$l = l_a + l_s$, où l_a absolument continue de densité v, c'est à dire, $l_a(u) = \int \langle u, v\rangle \, d\mu$, $\forall u \in \mathcal{L}_E$, et l_s singulière.

Démonstration. En vertu du théorème de dualité, I_f et I_{f^*} sont duales l'une de l'autre pour la dualité $(\mathcal{L}_E, \mathcal{L}_{E'})$. Par définition de $(I_f)^*$, on a

$$(I_f)^*(l) = \sup \, [l(u) - I_f(u) \mid u \in dom\ I_f]$$

En vertu du théorème de décomposition donné dans le chapitre *I*, l se décompose en $l = l_a + l_s$ avec

$$l_a(u) = \int \langle u, v\rangle \, d\mu, \ \forall u \in \mathcal{L}_E$$

et l_s singulière au sens: il existe dans J une suite décroissante (Z_n) d'intersection vide telle que, pour tout n, pour tout $f \in \mathcal{L}_E$, $l_s(\chi_{T\setminus Z_n} f) = 0$. On a alors

$$(I_f)^*(l) = \sup_{u \in \mathrm{dom}\, I_f} \Big[\int_T \langle u, v\rangle \, d\mu - I_f(u) + l_s(u)\Big]$$

$$\leqslant \sup_{u \in \mathrm{dom}\, I_f} \Big[\int_T \langle u, v\rangle \, d\mu - I_f(u)\Big] + \sup_{u \in \mathrm{dom}\, I_f} l_s(u)$$

Donc

$$(I_f)^*(l) = I_{f^*}(v) + \delta^*(l_s \mid \mathrm{dom}\ I_f)$$

Pour établir l'inégalité inversé, remarquons que pour chaque $u \in \mathrm{dom}\ I_f$, $\int_T \langle u, v\rangle \, d\mu - I_f(u)$ est finie, donc il existe un réel a tel que $I_{f^*}(v) > a$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $u_1 \in dom\ I_f$, il existe $n(\varepsilon, u_1)$ tel que

$$n \geqslant n_{(\varepsilon,\, u_1)} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{T\setminus Z_n} f^*(t, v(t)) \, \mu(dt) > a \\ \displaystyle\int_{Z_n} \langle u_1(t), v(t)\rangle - f(t, u_1(t)) \, \mu(dt) > -\varepsilon \end{cases}$$

Fixons $u_1 \in dom\ I_f$ et soit $n_0 > n_{(\varepsilon,\, u_1)}$. On a

$$(I_f)^*(l) = \sup_{u \in \mathcal{L}_E} \Big[l(u) - \int_{Z_{n_0}} f(t, u(t)) \, \mu(dt) - \int_{T\setminus Z_{n_0}} f(t, u(t)) \, \mu(dt)\Big]$$

D'où grace à la linéarité de l et à la convexité de $f(t,.)$ pour $t \in T$,

$$(I_f)^*(l) = \sup_{u \in \chi_{Z_n} \mathcal{L}_E} \Big[l(u) - \int_{Z_{n_0}} f(t, u(t)) \mu(dt)\Big] + \sup_{u \in \chi_{T\setminus Z_{n_0}} \mathcal{L}_E} \Big[l(u) - \int_{T\setminus Z_{n_0}} f(t, u(t)) \, \mu(dt)\Big]$$

Compte tenu de la décomposition de $l = l_a + l_s$ on obtient

$$(I_f)^*(l) = \sup_{u \in \chi_{Z_{n_0}} \mathcal{L}_E} \Big[\int_{Z_{n_0}} \langle u, v\rangle d\mu - \int_{Z_{n_0}} f(t, u(t)) \, \mu(dt) + l_s(u)\Big]$$

$$+ \sup_{u \in \chi_{T\setminus Z_{n_0}} \mathcal{L}_E} \Big[\int_{T\setminus Z_{n_0}} \langle u, v\rangle \, d\mu - \int_{T\setminus Z_{n_0}} f(t, u(t)) \, \mu(dt)\Big]$$

Par suite on a :

$$(I_f)^*(l) = \int_{T\setminus Z_{n_0}} f^*(t, v(t))\,\mu(dt) + \sup_{u\in\chi_{Z_{n_0}}\mathcal{L}_E} \left[\int_{Z_{n_0}} [\langle u(t), v(t)\rangle - f(t, u(t))]\,\mu(dt) + l_s(u)\right]$$

d'où $(I_f)^*(l) \geqslant \int_{T\setminus Z_{n_0}} f^*(t, v(t))\,\mu(dt) + \int_{Z_{n_0}} \langle u_1(t), v(t)\rangle - f(t, u_1(t))\,\mu(dt) + l_s(u_1)$

Vu le choix de a et de n_0, on a

$$(I_f)^*(l) \geqslant a - \varepsilon + l_s(u_1)$$

Comme u_1 est arbitrairement choisi dans dom I_f, on a

$$(I_f)^*(l) \geqslant a - \varepsilon + \delta^*(l_s \mid \operatorname{dom} I_f)$$

D'où

$$(I_f)^*(l) \geqslant a + \delta^*(l_s \mid \operatorname{dom} I_f)$$

pour tout a tel que $I_{f^*}(v) > a$. Par conséquent

$$(I_f)^*(l) \geqslant I_{f^*}(v) + \delta^*(l \mid \operatorname{dom} I_f)$$

ce qui termine la démonstration.

2. Théorème 2. Les hypothèses et notations étant celles du théorème 1, on pose, pour $u_0 \in \operatorname{dom} I_f$,

$$\partial I_f(u_0) = \{v \in \mathcal{L}'_E \mid v(u - u_0) \leqslant I_f(u) - I_f(u_0),\ \forall u \in \mathcal{L}_E\}$$

Alors tout $v \in \partial I_f(u_0)$ se décompose en $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in \partial I_f(u_0)$, absolument continu de densité $g \in \mathcal{L}_{E'}$ telle que $g(t) \in \partial f(t, u(t))$ presque partout et $v_2 \in N(u_0 \mid \operatorname{dom} I_f) = \{v \in \mathcal{L}'_E \mid v(u - u_0) \leqslant 0,\ \forall u \in \operatorname{dom} I_f\}$.

Démonstration. On a

$$v \in \partial I_f(u_0) \Leftrightarrow I_f(u_0) + (I_f)^*(v) = v(u_0).$$

D'après le théorème de décomposition donné dans le chapitre *I*, v se décompose en $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in \mathcal{L}'_E$, absolument continue de densité $g \in \mathcal{L}_{E'}$ et $v_2 \in \mathcal{L}'_E$ singulière. D'après le théorème précédent, on a

$$(I_f)^*(v) = I_{f^*}(v) + \delta^*(v_2 \mid \operatorname{dom} I_f)$$

Donc

$$v \in \partial I_f(u_0) \Leftrightarrow v_1(u_0) + v_2(u_0) = I_f(u_0) + I_{f^*}(g) + \delta(v_2 \mid \operatorname{dom} I_f)$$

Soit

$$v \in \partial I_f(u_0) \Leftrightarrow 0 = I_{f^*}(g) + I_f(u_0) - \int_T \langle u_0, g\rangle\, d\mu + \delta^*(v_2 \mid \operatorname{dom} I_f) - v_2(u_0)$$

Puisque $u_0 \in \operatorname{dom} I_f$, on a

$$\delta^*(v_2 \mid \operatorname{dom} I_f) - v_2(u_0) \geqslant 0$$

et puisque I_f et I_{f^*} sont duales l'une de l'autre pour la dualité $(\mathcal{L}_E, \mathcal{L}_{E'})$ d'après le théorème de dualité donné dans le chapitre *II*, on a

$$I_{f^*}(g) - \int_T \langle u_0, g\rangle\, d\mu - I_f(u_0) \geqslant 0$$

d'où

$$v \in \partial I_f(u_0) \Leftrightarrow \begin{cases} v_2(u_0) = \delta^*(v_2 \mid \text{dom } I_f) \\ I_{f^*}(g) - I_f(u_0) = \int_T \langle u_0, g \rangle \, d\mu \end{cases}$$

La première égalité implique

$$v_2(u - u_0) = v_2(u) - v_2(u_0) \leqslant 0, \quad \forall u \in \text{dom } I_f$$

c'est à dire

$$v_2 \in N(u_0 \mid dom\ I_f)$$

et la deuxième égalité implique $g \in \partial I_f(u_0) \leftrightarrow g(t) \in \partial f_t(u_0(t))$ presque partout et $v_1 \in \partial I_f(u_0)$ car I_f et I^* sont duales l'une de l'autre pour la dualité $(\mathcal{L}_E, \mathcal{L}_{E'})$.

Remarques

1) Dans le cas considéré ici, le théorème 2 généralise le théorème de LEVIN ([4]); la différence entre le théorème 2 et le théorème de LEVIN est:

1°) le couple $(\mathcal{L}_E, \mathcal{L}^*_E)$ englobe le cas $(\mathcal{L}^\infty_E, L^1_{[E']})$. 2°) Ici, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-finie alors que dans ([4]), $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. n' est pas nécessairement σ-finie. 3°) Dans le théorème 2, il n'y a pas d'hypothèse de continuité portant sur f_t.

2) Le théorème 2 intervient dans l'intégration des multi-applications mesurables à valeurs convexes formés et en particulier, le théorème 2 s'applique à la comparaison des mesures (Voir [3]). Je n'ai pas développé ce point ici qui n'a pas été traité à l'Ecole d'Eté et qui dépasse le programme prévu.

3. Minimisation sans compacité

Les hypothèses et notations sont celle du théorème 1. Soit A un ensemble de formes linéaires absolument continues définies sur $\mathcal{L}_E$ et soit B l'ensemble des densités correspondant. On a par definition, $B \in \mathcal{L}_E$ et $A = \{l_v \in (\mathcal{L}_E), \forall v \in B\}$ où

$$l_v(u) = \int_T \langle v, u \rangle \, d\mu, \ \forall u \in \mathcal{L}_E.$$

Théorème 3. On suppose que l'adhérence $\overline{A}$ de A dans $(\mathcal{L}_E)'$ pour la dualité $\sigma((\mathcal{L}_E)', (\mathcal{L}_E))$ soit compact et que $\overline{A}$ soit inclus dans $A + L_s$, L_s étant l'ensemble des formes linéaires continues singulières sur $\mathcal{L}_E$. Soient I_f et I_f^* les intégrales convexes définies sur $\mathcal{L}_E$ et $\mathcal{L}_E'$ et vérifiant les hypothèses du théorème 1. Si $O \in dom\ I_{f^*} = \{u \in \mathcal{L}_E \mid I_f(u) < +\infty\}$ alors la fonctionnelle intégrale I_f^* atteint son minimum sur B.

Démonstration. On a, pour $v \in B$,

$$\begin{aligned} I_f^*(v) &= \sup \{\langle l_v, u \rangle - (I_f)(u) \mid u \in \mathcal{L}_E\} \\ &= (I_f)^*(l_v) \end{aligned}$$

où $(I_f)^*$ est la duale de I_f pour la dualité $((\mathcal{L}_E)', \mathcal{L}_E)$. Comme $A = \{l_v \mid v \in B\}$ est relativement compact pour $\sigma((\mathcal{L}_E)', \mathcal{L}_E)$, il existe donc $\tilde{l} \in \overline{A}$ tel que

$$\inf_{l \in \overline{A}} (I_f)^* (l) = (I_f)^*(\tilde{l})$$

Soit $\tilde{l} = \tilde{l}^a + \tilde{l}^s$ la décomposition de $\tilde{l}$. Par hypothèse, $\tilde{l}^a \in A$. Il existe donc $\tilde{v} \in B$ tel que $\tilde{l}^a(u) = \int_T \langle u, \tilde{v} \rangle d\mu$, $\forall u \in \mathcal{L}_E$. Or, en appliquant le théorème de polarité à $(I_f)^*$,

$$(I_f)^* (l) = I_f^*(v) + \delta^* (l^s \mid \mathrm{dom}\, I_f)$$

où $l = l^a + l^s$ est la décomposition de l avec

$$l^a(u) = \int \langle v, u \rangle \, d\mu, \quad \forall u \in \mathcal{L}_E$$

Comme $O \in dom\, I_f'$ on a

$$(I_f)^*(l) \geqslant I_f^*(v)$$

D'où

$$\inf_{v \in B} I_{f^*}(v) \leqslant I_{f^*}(\tilde{v}) \leqslant (I_f)^* (\tilde{l}) = \inf_{l \in \overline{A}} (I_f)^* (l)$$

$$\leqslant \inf_{v \in B} (I_f)^* (l_v) = \inf_{v \in B} I_{f^*}(v)$$

§2. APPLICATION DE LA DÉCOMPOSITION DES FORMES SOUS LINÉAIRES ADDITIVES CONTINUES À UN THÉORÈME DE FERMETURE

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{L}_E$ est un espace vectoriel normé décomposable dont la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_E}$ possède l'une des deux propriétés (1) ou (2) indiqués dans le début du paragraphe 1.

La proposition suivante intervient directement dans le théorème de fermeture que nous avons en vue.

4. Proposition 4. Soit (l_n) une suite de formes sous-linéaires additives continues sur $\mathcal{L}_E$, absolument continues de densité Γ_n, c'est à dire

$$l_n(f) = \int_T \delta^*(f(t), \Gamma(t))\, \mu(dt), \quad \forall f \in \mathcal{L}_E$$

On suppose que $\sup_n |\, l_n(f) \,| \leqslant \alpha \| f \|_{\mathcal{L}_E}$ pour $\forall f \in \mathcal{L}_E$, où α est un nombre réel strictement positif. Alors il existe une multi-application Δ à valeurs convexes compactes non vides de E'_σ dont le graphe appartient à $J \otimes \mathcal{B}(E'_\sigma)$ qui vérifie

a) $$\left| \int_T \delta^*(f, \Delta)\, \mu \right| \leqslant \alpha \| f \|_{\mathcal{L}_E}, \quad \forall f \in \mathcal{L}_E$$

b) Si S_Δ (resp. S_{Γ_n}) désigne l'ensemble des classes de sélections scalairement mesurables de Δ (resp. Γ_n), si (h_n) est une suite dans $\mathcal{L}_E$, telle que $h_n \in S_{\Gamma_n}$ pour tout n, convergeant vers h pour $\sigma(\mathcal{L}_{E'}, \mathcal{L}_E)$, alors $h \in S_\Delta$.

Démonstration. Comme $\sup_n | l_n(f) | \leqslant \alpha \| f \|_{\mathcal{L}_E}$, la suite (l_n) est relativement compacte dans l'espace des applications de $\mathcal{L}_E$ dans R, muni de la topologie de la convergence simple. Soit alors l une valeur d'adhérence de l pour cette topologie. Il existe un fitre $\mathbf{F}$ plus fin que le filtre de Fréchet tel que

$$\lim_{\mathbf{F}} l_n(f) = l(f), \quad \forall f \in \mathcal{L}_E$$

Alors il est clair que l est une forme sous linéaire, additive continue sur $\mathcal{L}_E$ car on a $| l(f) | \leqslant \alpha \| f \|_{\mathcal{L}_E}$ pour tout $f \in \mathcal{L}_E$. Par application du théorème de décomposition, l se décompose en $l = l^a + l^s$ où l^a est sous linéaire additive continue sur $\mathcal{L}_E$ et absolument continue de densité Δ, c'est à dire $l^a(f) = \int_T \delta^*(f, \Delta)\mu$, $\forall f \in \mathcal{L}_E$, et l^s est positivement homogène, additive sur $\mathcal{L}_E$, singulière au sens : il existe dans J une suite décroissante (A_q), d'intersection vide, telle que $l^s(\chi_{T \setminus A_q} f) = 0$, pour tout q et tout $f \in \mathcal{L}_E$. Par suite, on a $| l^a(f) | \leqslant \alpha \| f \|_{\mathcal{L}_E}$ pour tout $f \in \mathcal{L}_E$.

Soit (h_n) une suite dans $\mathcal{L}_E$, vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On a

$$\forall q \in N, \ \forall f \in \mathcal{L}_E, \ \lim_{\mathbf{F}} \int_{T \setminus A_q} \langle f, h_n \rangle d\mu = \int_{T \setminus A_q} \langle f, h \rangle d\mu$$

d'où

$$\forall q \in N, \ \forall f \in \mathcal{L}_E, \ \int_{T \setminus A_q} \langle f, h \rangle d\mu \leqslant \lim_{\mathbf{F}} \int_{T \setminus A_q} \delta^*(f, \Gamma_n) d\mu.$$

Par suite

$$\forall q \in N, \ \forall f \in \mathcal{L}_E, \ \int_{T \setminus A_q} \langle f, h \rangle d\mu \leqslant l(\chi_{T \setminus A_q} f) = l^a(\chi_{T \setminus A_q} f)$$

Soit

$$\int_{T \setminus A_q} \langle f, h \rangle d\mu \leqslant \int_{T \setminus A_q} \delta^*(f, \Delta) d\mu$$

pour tout $f \in \mathcal{L}_E$ et tout q. En utilisant la décomposabilité de $\mathcal{L}_E$ et la séparabilité de E, on déduit facilement de l'inégalité précédente que $h(t) \in \Delta(t)$ presque partout.

Pour alléger l'énoncé de la proposition suivante, introduisons quelques définitions et notations. Soit (F, d) un espace métrique séparable et D une partie dénombrale partout dense de F. Sur l'ensemble des applications de $T \times F$ dans E', on définit la relation d'équivalence $\backsim$

$$g \sim g' \Leftrightarrow \forall y \in D, \ \tilde{g}\, y = \tilde{g}' y$$

où $\tilde{g}\, y = \{ h : T \to E' \mid h(t) = g(t, y), \ \forall t \notin N_h, \ \mu(N_h) = 0 \}$

soit $\dot{g} \doteq \{ g' : T \times F \to E' \mid g' \sim g \}$.

5. Théorème 5. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des $\dot{g}$ dont un représentant g satisfait aux conditions suivantes.

1) $\forall y \in F, \quad \tilde{g}y \in \mathcal{L}_{E'}$

2) Il existe une multi-application scalairement mesurable Γ_g de T à valeurs convexes compactes non vides de E'_σ telle que

$$\left|\int_T \delta^*(f, \Gamma_g)\, d\mu\right| \leqslant \alpha \, \| f \|_{\mathcal{L}_E}, \ \forall f \in \mathcal{L}_E$$

où α est un réel strictement positif et telle que

$$\forall (y, z) \in F \times F, \quad g(t, y) - g(t, z) \in d(y, z)\, \Gamma_g(t)$$
$$\forall t \notin N \text{ avec } \mu(N) = 0.$$

Alors $\mathcal{G}$ est séquentiellement fermé au sens suivant: si $(\dot{g}_n)$ est une suite dans $\mathcal{G}$ convergeant vers $\dot{g}$, c'est à dire, si, $\forall y \in D$, $(\tilde{g}_n^y)$ converge vers $\tilde{g}y$ pour $\sigma(\mathcal{L}_{E'}, \mathcal{L}_E)$, alors $\dot{g} \in \mathcal{G}$.

Démonstration Soit $(\dot{g}_n)$ une suite dans $\mathcal{G}$ convergeant vers $\dot{g}$. Montrons que $\dot{g} \in \mathcal{G}$. Pour tout n, posons $\Delta_n = \Gamma g_n$. Alors la suite (Δ_n) est la suite des densités de formes sous-linéaires additives continues sur $\mathcal{L}_E$ satisfaisant aux conditions de la proposition 4. Par suite, il existe une multi-application Δ scalairement mesurable à valeurs convexes compactes non vides de E'_σ telle que

$$\left|\int_T \delta^*(f, \Delta)\, d\mu\right| \leqslant \| f \|_{\mathcal{L}_E}, \ \forall f \in \mathcal{L}_E \text{ et}$$

vérifiant la propriété 2) indiquée de la proposition 4. Pour tout couple $(y, z) \in D \times D$ avec $y \neq z$, posons

$$\varphi_n^{y, z}(t) = \frac{g_n(t, y) - g_n(t, z)}{d(y, z)}$$

$g_n \in \dot{g}_n$. Alors on a $\tilde{\varphi}_n^{y, z} \in S_{\Delta_n}, \ \forall n$.

En vertu de l'hypothèse, $(\tilde{\varphi}_n^{y, z})$ converge vers $\tilde{\varphi}^{y, z}$ pour $\sigma(\mathcal{L}_{E'}, \mathcal{L}_E)$ où

$$\tilde{\varphi}^{y, z} = \frac{\tilde{g}^y - \tilde{g}^z}{d(y, z)}$$

donc $\tilde{\varphi}^{y, z} \in S_\Delta$ par application de la proposition 4, c'est à dire, il existe $N_{y, z} \in J$ avec $\mu(N_{y, z}) = 0$ tel que

$$\forall t \in N_{y, z}, \ \frac{g(t, y) - g(t, z)}{d(y, z)} \in \Delta(t) \quad (g \in \dot{g})$$

Pour prouver que $\dot{g} \in \mathcal{G}$, il reste à montrer l'existence $g' : T \times F \to E'$ vérifiant les conditions 1) et 2) de l'énoncé avec $g' \sim g$.

$$\text{Soit } N = \bigcup_{\substack{(y, z) \in D^2 \\ y \neq z}} N_{(y, z)}. \text{ On a } \mu(N) = 0$$

Définissons

$$g'(t, x) = 0, \qquad \forall t \in N, \ \forall x \in F$$
$$g'(t, x) = g(t, x), \qquad \forall t \notin N, \ \forall x \in D$$
$$g'(t, x) = \lim_{j\to\infty} g(t, x_j), \ \forall t \in N$$

si $x = \lim_{j\to\infty} y_j$, $(y_j) \subset D$.

Alors il est clair que $g' \sim g$. Montrons que, pour $t \notin N$, pour $(x_1, x_2) \in F \times F$ avec $x_1 \neq x_2$, on a

$$\frac{g'(t, x_1) - g'(t, x_2)}{d(x_1, x_2)} \in \Delta(t)$$

Pour $t \notin N$, $(x_1, x_2) \in D \times D$ avec $x_1 \neq x_2$, on a $g'(t, x_i) = g(t, x_i)$. Donc la propriété est vraie. Pour $(x_1, x_2) \in F \times F$ avec $x_1 \neq x_2$ et $(x_1, x_2) \notin D \times D$, considérons les suites (y^i_j) $(i = 1,2)$ dans D telle que

$$x_1 = \lim_{j\to\infty} y^1_j \quad \text{et} \quad x_2 = \lim_{j\to\infty} y^2_j$$

On a, pour $t \notin N$, pour tout j,

$$g(t, y^1_j) - g(t, y^2_j) \in d(y^1_j, y^2_j)\ \Delta(t)$$

Comme la multiapplication $(x, y) \to d(x, y)\Delta(t)$ est de graphe fermé de $F \times F$ dans E'_b, lorsque $j \to +\infty$, on a

$$g'(t, x_1) - g'(t, x_2) \in d(x_1, x_2)\ \Delta(t)$$

Comme $\tilde{g}^y \in \mathcal{L}_E$, $\forall y \in D$, ceci termine la démonstration.

§ 3. EXISTENCE DE SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION D'EVOLUTION ALÉATOIRE.

Soient I l'intervalle $[0, T]$ de R et (Ω, G, P) un espace probabilisé complet. Soit F un espace hilbertien réel identifié à son dual et soit F_σ l'espace vectoriel F muni de la topologie affaiblie $\sigma(F, F)$. Une multi-application C de I à valeurs convexes fermées non vides de F est à variation continue à droite sur I s'il existe une fonction réelle croissante continue à droite sur I, v, telle que

$$h(C(t), C(\tau)) \leqslant v(t) - v(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$$

où h désigne la distance de Hausdorff des fermés non vides de F ; remarquons qu'il revient au même de se donner une mesure de Radon positive μ sur $[0, T]$ telle que

$$h(C(t), C(\tau)) \leqslant \mu(]\tau, t]), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T.$$

Soit C une muti-application à variation continue à droite sur I. Pour tout x dans F et tout t dans I, on pose

$$\delta^*(x, C(t)) = \sup \{\langle x, u\rangle \mid u \in C(t)\}.$$

Il est facile d'exprimer la distance de Hausdorff des convexes $C(t)$ et $C(\tau)$ à l'aide des fonctions d'appui $\delta^*(.\,, C(t))$ et $\delta^*(.\,, C(\tau))$,

$$h(C(t), C(\tau)) = \sup_{x \in B \cap D} | \delta^*(x, C(t)) - \delta^*(x, C(\tau)) |$$

où D est le domaine des fonctions convexes $\delta^*(.\,, C(t))$ et B la boule unité de F'. De plus, pour tout x et tout y dans F, on a

$$| d(x, C(t)) - d(y, C(\tau)) | \leqslant \sup_{x' \in B \cap D} | \langle x', x \rangle - \delta^*(x', C(t)) - \langle x', y \rangle + \delta^*(x', C(\tau)) |$$

$$\leqslant \| x - y \| + | v(t) - v(\tau) |$$

de sorte que les fonctions $\delta^*(x, C(.))$ (pour $x \in D$) et les fonctions $d(x, C(.))$ (pour $x \in F$) sont continues à droite sur I. Il en résulte que la fonction $(t, x) \to d(x, C(t))$ de $I \times F$ dans R^+ est séparément continue à droite sur I et séparément continue sur F, donc elle est borélienne sur le produit $I \times F$; ceci est un résultat bien connu car on sait qu'une fonction séparément continue à droite et séparément borélienne est globalement borélienne (cf. Lemme 7). Ainsi le graphe de la multi-application C,

$$G(C) = \{(t, x) \in I \times F \mid d(x, C(t)) = 0\}$$

est un borélien de $I \times F$. Si ν est une mesure de Radon positive sur I, J_ν la tribu des ensembles ν-mesurables de I, alors les intégrandes convexes

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C(t) \\ +\infty & \text{si } x \notin C(t) \end{cases}$$

$$f^*(t, y) = \delta^*(y, C(t))$$

sont $J_\nu \otimes \mathcal{B}(F)$-mesurables où $\mathcal{B}(F)$ est la tribu borélienne de F, sous réserve que F soit séparable car la fonction f est borélienne sur $I \times F$, donc $J_\nu \otimes \mathcal{B}(F)$ mesurable (ceci pour tout mesure de Radon positive ν sur I).

Dans le cas particulier où v est continue, on voit aisément par des considérations précédentes que les fonctions $\delta^*(x, C(.))$ (pour $x \in D$) et $d(x, C(.))$ (pour $x \in F$) sont continues sur I de sorte que le graphe de C,

$$G(C) = \bigcap_{x \in D} \{(t, y) \in I \times F \mid \langle x, y \rangle \leqslant \delta^*(x, C(t))\}$$

est fermé dans $I \times F_\sigma$. Par suite la fonction

$$(t, x) \mapsto f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C(t) \\ +\infty & \text{si } x \notin C(t) \end{cases}$$

est semi-continue inférieurement sur $I \times F_\sigma$. Signalons que la fonction

$$(t, y) \mapsto f^*(t, y) = \delta^*(y, C(t))$$

n'est pas globalement semi-continue inférieurement sur $I \times F_\sigma$; cependant pour toute fonction mesurable, u, de I dans F, la fonction $t \mapsto f^*(t, u(t))$ est mesurable (voir lemme 2). Remarquons enfin qu'une fonction réelle à variation bornée est universellement mesurable en tant que différence de deux fonctions nonotones. Par suite, si C est une multi-application à variation bornée sur I, :'est à dire, il existe une fonction réelle à variation bornée, v, sur I telle que

$$h(C(t), C(\tau)) \leqslant | v(t) - v(\tau) |, \ (\tau, t) \in I^2$$

alors, grâce à la précédente remarque et des considérations indiquées plus haut, on peut montrer que pour toute fonction mesurable, u, de I dans F, les fonctions $t \mapsto f(t, u(t))$ et $t \mapsto f^*(t, u(t))$ sont mesurables de sorte qu'on puisse utiliser le théorème de dualité ([2]) des intégrales convexes définies à partir des intégrandes f et f^*. Pour la commodité du lecteur, je donnerai l'énoncé de ce théorème avec une hypothèse légèrement plus faible parce que cet énoncé s'applique directement au problème traité ici. Si ν est une mesure de Radon positive sur I, J_ν la tribu des ensembles ν-mesurables de I, on notera par $\mathcal{A} \hat{\otimes} J_\nu$ la tribu $P \otimes \nu$-complétée de la tribu produit $\mathcal{A} \otimes J_\nu$.

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

6. Théorème 6. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé complet, F un espace hilbertien réel séparable. Soit Γ une multi-application de $\Omega \times [0, T]$ à valeurs dans les convexes fermés localement compacts non vides ne contenant pas de droites (L.C.S.D.) de F_σ. On suppose:

(i) Pour tout ω dans Ω et pour $0 \leqslant \tau \leqslant T$,

$$h(\Gamma(\omega, t), \Gamma(\omega, \tau)) \leqslant \mu([\tau, t])$$

où μ est une mesure de Radon positive sur $[0, T]$.

(ii) Pour tout t fixé dans $[0, T]$, la multi-application $\Gamma(t,.)$ a son graphe dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(F)$, où $\mathcal{B}(F)$ est la tribu borélienne de F.

(iii) Il existe une application scalairement P-intégrable y_0 de Ω dans F telle que $y_0(\omega) \subset \Gamma(\omega, 0)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Alors il existe une application X de $\Omega \times [0, T]$ dans F de la forme

a) $X(\omega, t) = y_0(\omega) + \int_{]0, t]} \dot{X}(\omega, s) \ \mu(ds)$ où $\dot{X}$ est une application $\mathcal{A} \hat{\otimes} J$-mesurable de $\Omega \times [0, T]$ dans F telle que $\| \dot{X}(\omega, x) \| \leqslant 1$, $P \otimes \mu$-p.p. et vérifiant.

b) Pour tout t fixé dans $[0, T]$, il existe un ensemble P-négligeable $N(t)$ tel que $X(\omega, t) \in \Gamma(\omega, t)$ pour $\omega \notin N(t)$.

Démonstration. Je reprends ici la démonstration d'un théorème analogue donné dans ([2]) car cette démonstration conduit aux théorèmes d'existence de l'équation (E) et permet de fixer en même temps les notations qui seront utilisées dans la suite.

Soit (S_n) une suite de subdivision de $[0, T]$:

$$0 = t_0^n < t_1^n \dots < t_i^n \dots < t_{2^n}^n = T$$

définie par

$$t_i^n = i\,\frac{T}{2^n}.$$

Comme les multi-applications $\Gamma(t,.)$ sont de graphe mesurable, on construit grâce aux théorèmes d'existence de sections mesurables (cf. théorème cité en rappel dans le chapitre II) une suite d'applications $\mathcal{A}$ - mesurables $y_i^n (i = 0, 1, ..., 2^n)$ associées à chaque subdivision S_n telle que

$$\begin{cases} \forall\omega \in \Omega,\ y_i^n(\omega) \in \Gamma(\omega, t_i^n),\ 0 \leqslant i \leqslant 2^n \\ \forall\omega \in \Omega,\ \|y_{i-1}^n(\omega) - y_i^n(\omega)\| = d(y_{i-1}^n(\omega), \Gamma(\omega, t_i^n)),\ 1 \leqslant i \leqslant 2^n. \end{cases}$$

D'après la condition (i), on a, pour $1 \leqslant i \leqslant 2^n$,

$$(1) \qquad \forall\omega \in \Omega, \|y_{i-1}^n(\omega) - y_i^n(\omega)\| \leqslant \mu(]t_{i-1}^n, t_i^n]).$$

Avec les notations de l'énoncé, notons

$$v(t) - v(\tau) = \mu(]\tau, t]), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T.$$

Pour $(\omega, t) \in \Omega \times [t_{i-1}^n, t_i^n[$ et pour $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, posons

$$X_n(\omega, t) = \begin{cases} \dfrac{v(t_i^n) - v(t)}{v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n)}\, y_{i-1}^n(\omega) + \dfrac{v(t) - v(t_{i-1}^n)}{v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n)}\, y_i^n(\omega) \text{ si } v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n) > 0 \\ y_i^n(\omega) \quad \text{si} \quad v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n) = 0 \end{cases}$$

Enfin on pose $X_n(\omega, T) = y_{2^n}^n(\omega)$ pour tout ω dans Ω. Vu l'inégalité (1), X_n est de la forme

$$X_n(\omega, t) = y_0(\omega) + \int_{]0,\, t]} f_n(\omega, s)\,\mu(ds), \quad (\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$$

où f_n est une application $\mathcal{A} \otimes J_\mu$ - mesurable de $\Omega \times [0, T]$ à valeurs dans la boule unité B de F. Soit $\mathcal{U}$ la boule unité de $L_F^\infty(\Omega \times I, \mathcal{A} \hat{\otimes} J_\mu, P \otimes \mu)$. C'est un ensemble convexe compact pour la topologie $\sigma(L_F^1(\Omega \times I, \mathcal{A} \hat{\otimes} J_\mu, P \otimes \mu), L_F^\infty(\Omega \times I, \mathcal{A} \hat{\otimes} J_\mu, P \otimes \mu))$. Soit $\mathcal{L}_F(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace vectoriel des classes d'applications scalairement P-intégrables de Ω dans F. Munissons $\mathcal{L}_F(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de la topologie faible $\sigma(\mathcal{L}_F(\Omega, \mathcal{A}, P), L_R^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P) \otimes F)$ et désignons par $\mathcal{X}$ l'ensemble des applications de $[0, T]$ dans $\mathcal{L}_F(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définies par

$$\mathcal{X} = \{Y : [0, T] \to \mathcal{L}_F(\Omega, \mathcal{A}, P) \mid Y(\omega, t) = y_0(\omega) + \int_{]0,\, t]} \dot{Y}(\omega, s)\,\mu(ds),\ \dot{Y} \in \mathcal{U}\}.$$

Munissons $\mathcal{X}$ de la topologie de la convergence simple sur I. En vertu de la compacité faible de $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$ est séquentiellement compact. En effet, soit $(\dot{Y}_n)$ une suite dans $\mathcal{U}$. D'après le théorème d'Eberlein-Smulian, on peut supposer que la suite $(\dot{Y}_n)$ converge vers $\dot{Y} \in \mathcal{U}$ dans l'espace compact $\mathcal{U}$. Par suite, pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $h \in L^\infty_R(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tout x dans F, on a:

$$\lim_{n \to \infty} \langle Y_n(.,t), h \otimes x \rangle = \langle y_0, h \otimes x \rangle + \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \Big[\int_{]0,t]} \langle \dot{Y}_n(\omega, s), h(\omega)x \rangle \mu(ds) \Big] \times P(d\omega)$$

$$= \langle y_0, h \otimes x \rangle + \int_\Omega \Big[\int_{]0,t]} \langle \dot{Y}(\omega, s), h(\omega)x \rangle \mu(ds) \Big] P(d\omega).$$

Soit

$$\lim_{n \to \infty} \langle Y_n(., t), h \otimes x \rangle = \langle Y(., t), h \otimes x \rangle$$

avec

$$Y(\omega, t) = y_0(\omega) + \int_{]0,t]} \dot{Y}(\omega, s) \mu(ds), \ (\omega, t) \in \times I.$$

Or par construction, la suite (X_n) demeure dans $\mathcal{X}$. Donc on peut supposer que la suite (X_n) converge vers un élément $X \in \mathcal{X}$. Donc pour tout (ω, t) dans $\Omega \times I$, on a

$$X(\omega, t) = y_0(\omega) + \int_{]0,t]} \dot{X}(\omega, s) \mu(ds), \ \dot{X} \in \mathcal{U}.$$

$\forall t \in [0, T], \ \forall x \in F, \ \forall h \in L^\infty_R(\Omega, \mathcal{A}, P),$

$$\lim_{n \to \infty} \langle X_n(., t), h \otimes x \rangle = \langle X(., t), h \otimes x \rangle.$$

Ceci étant, pour tout t dans $[0, T[$ désignons par $j_n(t)$ la valeur de i $(1 \leqslant i \leqslant 2^n)$ telle que $t \in [t^n_{j_n(t)-1}, t^n_{j_n(t)}[$. Posons, pour $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$,

$$\theta_n(t) = t^n_{j_n(t)} \text{ pour } t \in]0, T[, \ \theta_n(0) = 0, \ \theta_n(T) = T$$

(2)

$$X_n(\omega, \theta_n(t)) = y^n_{t^n_{j_n(t)}}(\omega), \ X_n(\omega, 0) = y_0(\omega), \ X_n(\omega, T) = y^n_{2^n}(\omega)$$

On voit que la suite $(\theta_n(t))$ tend vers t en décroissant. Et, d'après ce qui précède, on a, pour tout t dans $[0, T]$, tout x dans F et tout h dans $L^\infty_R(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$(3) \quad \lim_{n \to \infty} \langle X_n(., \theta_n(t)), h \oplus x \rangle = \langle X(., t), h \otimes x \rangle$$

Le reste de la démonstration consiste à prouver la propriété b) de l'énoncé. Soit t fixé dans $]0, T[$. Dans les cas où $t = 0$ et $t = T$, la propriété b) est trivialement vérifiée. On va montrer qu'il existe un ensemble P-négligeable $N(t)$ tel que

$$X(\omega, t) \in \Gamma(\omega, t), \ \forall \omega \notin N(t).$$

Comme $\Gamma(\omega, t)$ est convexe fermé *L. C. S. D.* pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$, il existe d'après ([2]) une suite (e_m) dans F telle que

$$\Gamma(\omega, t) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Gamma_m(\omega, t)$$

avec
$$\Gamma_m(\omega, t) = \{y \in F \mid \langle e_m, y\rangle \leqslant \delta^*(\omega, t, e_m)\}$$
$$\delta^*(\omega, t, e_m) = \sup_{y \in \Gamma(\omega, t)} \langle e_m, y\rangle < +\infty$$

Donc $X(\omega, t)$ appartient à $\Gamma(\omega, t)$ si et seulement si

$$\langle e_m, X(\omega, t)\rangle \leqslant \delta^*(\omega, t, e_m), \ \forall m.$$

Considérons l'ensemble A dans G défini par

$$A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) \notin \Gamma(\omega, t)\}$$

et supposons $P(A) > 0$. Il existe un élément e_m tel que l'ensemble $\mathcal{A}$-mesurable A_m,

$$A_m = \{\omega \in \Omega \mid \langle e_m, X(\omega, t)\rangle > \delta^*(\omega, t, e_m)\}$$

soit de mesure strictement positive. D'où

$$(4) \qquad \int_{A_m} \langle e_m, X(\omega, t)\rangle P(d\omega) > \int_{A_m} \delta^*(\omega, t, e_m) P(d\omega)$$

or on a d'après (2),

$$(5) \qquad \int_{A_m} \langle e_m, X_n(\omega, \theta_n(t))\rangle P(d\omega) \leqslant \int_{A_m} \delta^*(\omega, \theta_n(t), e_m) P(d\omega).$$

On déduit de (3),

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{A_m} \langle e_m, X_n(\omega, \theta_n(t))\rangle P(d\omega) = \int_{A_m} \langle e_m, X(\omega, t)\rangle P(d\omega).$$

D'après la condition (*ii*), on a

$$| \delta^*(\omega, \theta_n(t), e_m) - \delta^*(\omega, t, e_m) | \leqslant \| e_m \| (v(\theta_n(t)) - v(t))$$

d'où

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{A_m} \delta^*(\omega, \theta_n(t), e_m) P(d\ ) = \int_{A_m} \delta^*(\omega, t, e_m) P(d\omega).$$

Par suite, on déduit de (6) et de (7)

$$(8) \qquad \int_{A_m} \langle e_m, X(\omega, t)\rangle P(d\omega) \leqslant \int_{A_m} \delta^*(\omega, t, e_m) P(d\omega)$$

ce qui contredit l'inégalité(4).

Remarques. 1) Si Γ ne dépend pas de ω, le théorème 6 est valable sous des conditions plus faibles. En examinant la démonstration de ce théorème, on voit qu'il n'est pas nécessaire de supposer $\Gamma(t)$ L. C. S. D. et F séparable.

2) Bien entendu, il est plus simple d'utiliser la compacité de $\mathcal{U}$ pour la topologie faible $\sigma(L^2_F, L^2_F)$ parce que la compacité de $\mathcal{U}$ pour $\sigma(L^1_F, L^\infty_F)$

repose sur des résultats difficiles, à savoir: le dual de L^1_E est $L^\infty_{E'_s}$) si E est un Banach séparable ([7]) et, si E est un espace de Banach réflexif, le dual de L^1_E est $L^\infty_{E'_b}$ (E'_b étant le dual fort de E) ([7]) et, ainsi la compacité de $\mathcal{U}$ pour $\sigma(L^1_F, L^\infty_E)$ est triviale car $\mathcal{U}$ est compact pour $\sigma(L^\infty_F, L^1_F)$.

3) Comme la structure hilbertienne de l'espace F n'intervient pas dans la démonstration du théorème 6, on voit que ce théorème reste valable en remplaçant l'espace F par le dual faible G'_s d'un espace de Banach séparable G, Γ prend alors ses valeurs dans les convexes fermés $L.\ C.\ S.\ D.$ de ce dual faible sous réserve que $\mathcal{U}$ soit métrisable pour $\sigma(L^\infty_{G'_s}, L^1_G)$!

Le résultat suivant est bien connu. J'en donne ici la démonstration pour la commodité du lecteur, laquelle est par ailleurs une version simplifiée de celle déjà donnée dans la démonstration du théorème 6.

7. Lemme 7. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et f une application de $\Omega \times [0,1]$ dans R telle que pour tout t fixé dans $[0,1]$, $f(.,t)$ soit $\mathcal{A}$-mesurable sur Ω et pour tout ω fixé dans Ω, $f(\omega,.)$ soit continue à droite sur $[0,1]$. Alors f est $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mesurable; $\mathcal{B}$ étant la tribu borélienne de $[0, 1]$.

Démonstration. Pour tout entier $n > 0$, considérons l'application f_n de $\Omega \times [0,1]$ dans R,

$$f_n(\omega, t) = f\left(\omega, \frac{k}{n}\right) \text{ si } t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$$

avec $k = 1,2,\dots, n$ et

$$f_n(\omega, 1) = f(\omega, 1).$$

Chacune des f_n est $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mesurable et on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega, t) = f(\omega, t)\ ,\quad (\omega, t) \in \Omega \times [0, 1].$$

Donc f est $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mesurable.

Grâce au lemme 7, on peut énoncer maintenant le résultat suivant.

8. Théorème 8. Sous les hypothèses et notations du théorème 1, la multi-application $(\omega, t) \mapsto \Gamma(\omega, t)$ a son graphe dans $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}[0,T]\otimes\mathcal{B}(F))$ où $\mathcal{B}[0,T]$ est la tribu borélienne de $[0, T]$, $\mathcal{B}(F)$ la tribu borélienne de F. En outre, l'application X de $\Omega \times [0,T]$ dans F définie dans le théorème 1 vérifie $X(\omega, t) \in \Gamma(\omega, t)$ $P\otimes\mu$-presque partout.

Démonstration. En reprenant les notations de la fin de la démonstration du théorème 7, on a

$$\Gamma(\omega, t) = \{ y \in F \mid \langle e_m, y \rangle \leqslant \delta^*(\omega, t, e_m),\ \forall m \}.$$

Comme le domaine D de $x \mapsto \delta^*(\omega, t, x)$ est indépendant de (ω, t), il est clair que les fonctions $(\omega, t) \mapsto \delta^*(\omega, t, e_m)$ avec $e_m \in D$ sont séparément $\mathcal{A}$-mesurable sur Ω, séparément continues à droite sur I, de sorte que le graphe de Γ appartient à $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[0,T] \otimes \mathcal{B}(F)$. Reste à vérifier que $X(\omega, t) \in \Gamma(\omega, t)$, $P \otimes \mu$-presque partout.

Reprenons (encore!) la fin de la démonstration du théorème 1. On a

$$X(\omega, t) \in \Gamma(\omega, t)$$

si et seulement si

$$\langle e_m, X(\omega, t) \rangle \leqslant \delta^*(\omega, t, e_m) \ , \ \forall m \, .$$

Soit $Q = \{ (\omega, t) \in \Omega \times I \,|\, X(\omega, t) \notin \Gamma(\omega, t) \}$. Comme les fonctions $(\omega, t) \mapsto \delta^*(\omega, t, e_m)$ et $(\omega, t) \mapsto \langle e_m, X(\omega, t) \rangle$ sont $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[0,T]$ - mesurables, l'ensemble Q appartient à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[0,T]$ (remarquer que $\langle e_m, X(\omega,.)\rangle$ est continue à droite sur I et $\langle e_m, X(.,t)\rangle$ est $\mathcal{A}$ - mesurable). Supposons que Q soit de mesure strictement positive, c'est-à-dire, $P \otimes \mu(Q) > 0$. Il existe e_m tel que l'ensemble $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[0,T]$ - mesurable Q_m,

$$Q_m = \{ (\omega, t) \in \Omega \times I \,|\, \langle e_m, X(\omega, t) \rangle > \delta^*(\omega, t, e_m) \}$$

soit de mesure strictement positive, soit $P \otimes \mu(Q_m) > 0$, D'où

$$(1) \quad \int_{Q_m} \langle e_m, X(\omega, t) \rangle \, P(d\omega) \otimes \mu(dt) > \int_{Q_m} \delta^*(\omega, t, e_m) \, P(d\omega) \otimes \mu(dt) .$$

Comme on a, pour tout n, tout ω et tout t,

$$\langle e_m, X_n(\omega, \theta_n(t)) \rangle \leqslant \delta^*(\omega, \theta_n(t), e_m)$$

on en déduit, en intégrant sur Q_m,

$$(2) \quad \int_{Q_m} \langle e_m, X_n(\omega, \theta_n(t)) \, P(d\omega) \otimes \mu(dt) \leqslant \int_{Q_m} \delta^*(\omega, \theta_n(t), e_m) \, P(d\omega) \otimes \mu(dt) .$$

On a, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{Q_m(t)} \langle e_m, X_n(\omega, \theta\,(t)) \rangle \, P(d\omega = \int_{Q_m(t)} \langle e_m, X(\omega, t) \rangle \, P(d\omega)$$

où $Q_m(t)$ est la coupe de Q_m,

$$Q_m(t) = \{\omega \in \Omega \, (\omega, t) \in Q_m\} \in \mathcal{A}.$$

En intégrant cette égalité sur I, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_I \lim_{n \to \infty} \int_{Q_m(t)} \langle e_m, X_n(\omega, \theta_n(t)) \rangle \, P(d\omega)](dt) \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_I \Big[\int_{Q_m(t)} \langle e_m, X_n(\omega, \theta_n(t)) \rangle \, P(d\omega) \Big] \mu(dt) \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_{Q_m} \langle e_m, X_n(\omega, \theta_n(t)) \rangle \, P(d\omega) \otimes \mu(dt) \\ &= \int_I \Big[\int_{Q_m(t)} \langle e_m, X(\omega, t) \rangle \, P(d\omega) \Big] \mu(dt) \\ &= \int_{Q_m} \langle e_m, X(\omega, t) \rangle \, P(d\omega) \otimes \mu(dt). \end{aligned}$$

D'après la condition (*ii*), on a

$$|\delta^*(\omega, \theta_n(t), e_m) - \delta^*(\omega, t, e_m)| \leqslant \|e_m\| (v(\theta_n(t)) - v(t).$$

D'où, en intégrant sur Q_m et en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{Q_m} \delta^*(\omega, \theta_n(t), e_m) P(d\omega) \otimes \mu(dt) = \int_{Q_m} \delta^*(\omega, t, e_m) P(d\omega) \otimes \mu(dt).$$

Donc on a, en intégrant les inégalités (2) sur Q_m et en faisant tendre vers $+\infty$

(3) $$\int_{Q_m} \langle e_m, X(\omega, t) \rangle P(d\omega) \otimes \mu(dt) \leqslant \int_{Q_m} \delta^*(\omega, t, e_m) P(d\omega) \otimes \mu(dt)$$

ce qui contredit l'inégalité (1).

9. Lemme 9. Soit f une application de $I \times F$ à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ et soit μ une mesure de Radon positive sur I. On suppose que f vérifie la condition suivante: Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset I$ tel que $\mu(I \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et tel que $f|_{K_\varepsilon \times F_\sigma}$ soit semi-continue inférieurement. Soit v une application Lusin μ-mesurable de I dans F. Alors la fonction

$$t \mapsto f^*(t, v(t)) = \sup \{\langle x, v(t) - f(t, x) \rangle \mid x \in F\}$$

est μ-mesurable.

Démonstration. On se ramène aussitôt au cas où f est semi-continue inférieurement sur $I \times F_\sigma$ et v continue sur I. Soit λ un nombre réel. Alors l'ensemble

$$\{t \in I \mid f^*(t, v(t)) > \lambda\} = proj_I [\Delta \cap A_\lambda]$$

où
$$\Delta = \{(t, x, r) \in I \times F \times R \mid f(t, x) \leqslant r\}$$
$$A_\lambda = \{(t, x, r) \in I \times F \times R \mid \langle x, v(t) \rangle - r > \lambda\}$$

Si la boule unité B de F est munie de la topologie $\sigma(F, E)$, la fonction

$$(t, x, r) \mapsto \langle x, v(t) \rangle - r$$

est continue sur $I \times \rho B \times R$ pour tout $\rho > 0$, de sorte que l'ensemble

$$A_\lambda = \bigcup_{n \in N} \{(t, x, r) \in I \times nB \times R \mid \langle x, v(t) \rangle - r > \lambda\}$$

est une réunion dénombrable de compacts dans $I \times F_\sigma \times R$ et, comme Δ est fermé dans $I \times F_\sigma \times R$, on voit que $proj_I [\Delta \cap A_\lambda]$ est une réunion dénombrable de compacts dans I. Ceci prouve que $t \mapsto f^*(t, v(t))$ est μ-mesurable.

Application. Soit C une multi-application de I à valeurs dans les convexes fermés non vides de F. On suppose qu'il existe une fonction réelle à variation bornée, v, définie sur I telle que

$$h(C(t), C(\tau)) \leqslant |v(t) - v(\tau)|, \ (\tau, t) \in I^2.$$

Si u est une application Lusin μ-mesurable de I dans F, la fonction

$$t \mapsto \sup_{x \in C(t)} \langle u(t), x \rangle = \delta^*(u(t), C(t))$$

est μ-mesurable sur I.

Il suffit d'appliquer le lemme précédent en prenant

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C(t) \\ +\infty & \text{si } x \notin C(t) \end{cases}$$

$$f^*(t, y) = \delta^*(y, C(t)).$$

En effet, comme v est universellement mesurable, on se ramène aussitôt au cas où v est continue sur un compact K de I, de sorte que le graphe de C est fermé dans $K \times K_\sigma$ et donc f est semi-continue inférieurement sur $K \times F_\sigma$.

Grâce au lemme 9 et aux techniques utilisées dans ([2]), on peut énoncer le résultat suivant qui est directement utilisé dans la démonstration du théorème d'existence des solutions de l'équation

$$(E) \begin{cases} -\dot{X}(t) \in \partial\Phi^*(t, X(t)) \\ X(0) = a \in C(0) \end{cases}$$

dans le cas « déterministe », c'est-à-dire, le convexe C ne dépend pas de ω et est à variation continue à droite.

10. Théorème 10. Avec les notations et les hypothèses du lemme 9, supposons f_t convexe pour tout t dans I, on pose

$$I_f(u) = \begin{cases} \int_I f(t, u(t))\, \mu(dt) & \text{si } \int_I f(t, u(t))^+\, \mu(dt) < +\infty \\ +\infty & \text{si } \int_I f(t, u(t))^+ \mu(dt) = +\infty \end{cases}$$

pour tout $u \in L^p_F(I, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Soit f_t la duale de f_t. On pose, de façon analogue,

$$I_{f^*}(v) = \begin{cases} \int_I f^*(t, v(t))\, \mu(dt) & \text{si } \int_I f^*(t, v(t))^+\, \mu(dt) < +\infty \\ +\infty & \text{si } \int_I f^*(t, v(t))^+\, \mu(dt) = +\infty \end{cases}$$

pour tout $v \in L^p_F(I, \mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si les intégrales convexes I_f et I_{f^*} ne sont pas identiquement égales à $+\infty$, alors I_f et I_{f^*} sont duales l'une de l'autre.

11. *Théorème d'existence des solutions et de dépendance des conditions initiales de l'équation (E).*

Théorème 11. Avec les hypothèses et notations du théorème 1, supposons que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace compact métrisable muni d'une probabilité de Radon P, ou de façon plus générale, supposons que l'espace $L^1_F(\Omega \times I, \widehat{\mathcal{A} \otimes} J_\mu, P \otimes \mu)$ est séparable. Soit $\mathcal{U}$ la boule unité de $L^\infty_F(\Omega \times I, \mathcal{A} \widehat{\otimes} J_\mu, P \otimes \mu)$. Désignons par $\Phi(\omega, t, .)$ et $\Phi^*(\omega, t, .)$ les fonctions d'appui et indicatrice de $\Gamma(\omega, t)$,

$$\Phi(\omega, t, x) = sup\ \{\langle x, u\rangle \mid u \in \Gamma(\omega, t)\}$$

$$\Phi^*(\omega, t, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in \Gamma(\omega, t) \\ +\infty & \text{si } v \notin \Gamma(\omega, t) \end{cases}$$

et soit $\partial\Phi^*(\omega, t, v)$ le sous-différentiel de $\Phi^*(\omega, t, .)$ au point v,

$$\partial(\Phi^*(\omega, t, v) = \{z \in F \mid \Phi(\omega, t, z) + \Phi^*(\omega, t, v) \leqslant \langle z, v\rangle\}.$$

Supposons que l'ensemble convexe fermé M dans $L^1_F(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des sections P-intégrables de la multi-application $\Gamma(.,0)$ est non vide. Alors

a) Pour tout $\xi \in M$, il existe une solution X_ξ de l'équation (E) de la forme

$$X_\xi(\omega, t) = \xi(\omega) + \int_{]0,t]} \dot{X}_\xi(\omega, s)\,\mu(ds),\ (\omega, t) \in \Omega \times I, \dot{X}_\xi \in \mathcal{U}$$

telle que $-\dot{X}_\xi(\omega, t) \in \partial\Phi^*(\omega, t, X_\xi(\omega, t))$, $P \otimes \mu$-presque partout.

b) Désignons par $L^1_F(\Omega, \mathcal{A}, P)_\sigma$ l'espace vectoriel $L^1_F(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni de la topologie $\sigma(L^1_F(\Omega, \mathcal{A}, P), L^\infty_R(\Omega, \mathcal{A}, P) \otimes F)$ est par $\mathcal{X}_M$ l'ensemble

$$\mathcal{X}_M = \{Y : [0, T] \to L^1_F(\Omega, \mathcal{A}, P)_\sigma \mid Y(\omega, t) = \xi(\omega) + \int_{]0,t]} \dot{Y}(\omega, s)\,\mu(ds), \xi \in M, \dot{Y} \in \mathcal{U}\}$$

muni de la topologie de la convergence simple sur $[0, T]$. Pour $\xi \in M$, désignons par S_ξ l'ensemble des solutions X_ξ de l'équation (E).

$$S_\xi = \{X_\xi : [0, T] \to L^1_F(\Omega, \mathcal{A}, P)_\sigma \mid X_\xi(\omega, t) = \xi(\omega) + \int_{]0,t]} \dot{X}_\xi(\omega, s)\,\mu(ds),$$
$$-\dot{X}_\xi(\omega, t) \in B \cap \partial\Phi^*(\omega, t, X_\xi(\omega, t)).\ P \otimes \mu\text{-p.p.}\}.$$

Alors la multi-application $\xi \to S_\xi$ de M dans $\mathcal{X}_M$ a la propriété de fermeture suivante. Soit (ξ_n) une suite convergeant vers ξ dans le convexe fermé M et soit X_{ξ_n} appartenant à S_{ξ_n}; alors on peut extraire de (X_{ξ_n}) une sous-suite qui converge dans $\mathcal{X}_M$ vers un élément $X_\xi \in S_\xi$.

Démonstration. Avec les notations de la démonstration du théorème 6, il existe une suite (X_n) d'application de $\Omega \times [0,T]$ dans F et une suite décroissante de fonctions (θ_n) de $[0,T]$ dans $[0,T]$ telles que

$$\begin{cases} X_n(\omega, t) = \xi(\omega) + \int_{]0,t]} \dot{X}_n(\omega, s)\,\mu(ds),\ \dot{X}_n \in \mathcal{U} \\ -\dot{X}_n(\omega, t) \in \partial\Phi^*(\omega, \theta_n(t), X_n(\omega, \theta_n(t))) \\ \lim_{n\to\infty} \theta_n(t) = t \end{cases}$$

pout tout (ω, t) dans $\Omega \times [0,T]$. En effet, on a, pour $t \in [0,T]$

$$y^n_{j_n(t)}(\omega) = proj\,(y^n_{j_n(t)-1}(\omega) \mid \Gamma(\omega, \theta_n(t)))$$

par construction des y^n_i $(i = 0,\dots, 2^n)$ et, il résulte de la caractérisation bien connue de la projection sur un convexe,

$$-\frac{y^n_{j_n(t)} - y^n_{j_n(t)-1}(\omega)}{v(t^n_{j_n(t)}) - v(t^n_{j_n(t)-1})} \in \partial\Phi^*(\omega, \theta_n(t), X_n(\omega, \theta_n(t))) \text{ si } v(t^n_{j_n(t)}) - v(t^n_{j_n(t)-1}) > 0$$

où $j_n(t)$ est la valeur de $i\,(1 \leqslant i \leqslant 2^n)$ tel que $t \in [t^n_{j_n(t)-1}, t^n_{j_n(t)}[$ et où l'on a posé

$$\theta_n(t) = t^n_{j_n(t)} \text{ pour } t \in]0, T[,\ \theta_n(0) = 0,\ \theta_n(T) = T$$

$$X_n(\omega, \theta_n(t)) = y^n_{j_n(t)}(\omega) \in \Gamma(\omega, \theta_n(t)),\ X_n(\omega, T) = y^n_{2^n}(\omega) \in \Gamma(\omega, T).$$

Si $v(t^n_{j_n(t)}) - v(t^n_{j_n(t)-1}) = 0$, il est clair que la relation $-\dot{X}_n(\omega, t) \in \partial\Phi^*(\omega, \theta_n(t), X_n(\omega, \theta_n(t)))$ est triviale puisque $\dot{X}_n(\omega, t) = 0$.

D'après le théorème 8, le graphe de Γ appartient à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[0,T] \otimes \mathcal{B}(F)$, donc les fonctions Φ et Φ^* sont des intégrandes convexes normaux sur $\Omega \times [0, T] \times F$; en outre Γ possède au moins une section $\mathcal{A} \otimes J_\mu$-intégrable, Ceci implique que les intégrales convexes

$$I_{\Phi}(U) = \int_{\Omega \times I} \Phi(\omega, t, U(\omega, t))\, P(d\omega) \otimes \mu(dt)$$

$$I_{\Phi^*}(V) = \int_{\Omega \times I} \Phi^*(\omega, t, V(\omega, t))\, P(d\omega) \otimes \omega(dt)$$

définies sur $L^\infty_F(\Omega \times I, \mathcal{A} \widehat{\otimes} J_\mu, P \otimes \mu)$ et $L^1_F(\Omega \times I, \mathcal{A} \widehat{\otimes} J_\mu, P \otimes \mu)$ sont duales l'une de l'autre ([2], [6]). Considérons la fonction

$$q_\xi(U) = \int_\Omega \Big(\int_I \big[\langle U(\omega, t),\ \xi(\omega) + \int_{]0,t]} U(\omega, s)\, \mu(ds)\rangle\big]\, \mu(dt)\Big)\, P(d\omega)$$

définie sur la boule unité $\mathcal{U}$ de l'espace $L^\infty_F(\Omega \times I, \mathcal{A} \widehat{\otimes} J_\mu, P \otimes \mu)$. Il résulte d'un résultat du à Moreau (*) ([5]) que la fonction q est convexe sur $\mathcal{U}$. Il est facile de voir que q est continue sur $\mathcal{U}$ lorsqu'on munit $\mathcal{U}$ de la topologie d'espace de Banach $L^p_F(\Omega \times I, \mathcal{A} \widehat{\otimes} J_\mu, P \otimes \mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. Ceci étant, la relation

$$-\dot{X}_n(\omega, t) \in \partial\Phi^*(\omega, \theta_n(t), X_n(\omega, \theta_n(t)))$$

s'écrit

$$(1) \quad \begin{cases} X_n(\omega, \theta_n(t)) \in \Gamma(\omega, \theta_n(t)) \\ \Phi(-\dot{X}_n(\omega, t), \Gamma(\omega, \theta_n(t)) + \langle X_n(\omega, \theta_n(t)), \dot{X}_n(\omega, t)\rangle = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs on a, en utilisant le fait que $\Gamma(\omega,.)$ est à variation continue à droite,

$$(2)\ \Phi(-\dot{X}_n(\omega, t), \Gamma(\omega, t)) \leqslant \Phi(-\dot{X}_n(\omega, t), \Gamma(\omega, \theta_n(t)) + v(\theta_n(t)) - v(t).$$

Compte tenu de (1) et (2), on a

$$(3)\ \Phi(-\dot{X}_n(\omega, t), \Gamma(\omega, t) + \langle \dot{X}_n(\omega, t), X_n(\omega, \theta_n(t))\rangle \leqslant v(\theta_n(t)) - v(t).$$

Un calcul élémentaire donne

$$(4)\ \Big| \int_{\Omega \times I} \big[\langle \dot{X}_n(\omega, t), \int_{]t, \theta_n(t)]} \dot{X}_n(\omega, s)\, \mu(ds)\rangle\big]\, P(d\omega) \otimes \mu(dt) \Big|$$

$$\leqslant \int_I (v(\theta_n(t)) - v(t))\, \mu(dt)$$

(*) Je remercie vivement J.J. Moreau d'avoir bien voulu me communiquer ce résultat.

De l'inégalité (4), on tire

$$(5)\quad I_\Phi(-\dot X_n)+\langle \dot X_n, X_n\rangle \leqslant I_\Phi(-\dot X_n)+\int_{\Omega\times I}\langle \dot X_n(\omega, t), X_n(\omega, \theta_n(t))\rangle\, P(d\omega)\otimes$$
$$\otimes\, \mu(dt)+\int_I (v(\theta_n(t)-v(t))\, \mu(dt).$$

Compte tenu de l'inégalité (3), on a, en intégrant,

$$(6)\qquad I_\Phi(-\dot X_n)+\int_{\Omega\times I}\langle \dot X_n(\omega, t), X_n(\omega, \theta_n(t))\rangle\, P(d\omega)\otimes \mu(dt)$$
$$\leqslant \int_I (v(\theta_n(t))-v(t))\, \mu(dt).$$

D'où finalement,

$$(7)\qquad I_\Phi(-\dot X_n)+\langle \dot X_n, X_n\rangle \leqslant 2\int_I (v(\theta_n(t))-v(t))\, \mu(dt).$$

Vu l'hypothèse de séparabilité de $L^1_F(\Omega\times I, \mathcal{A}\widehat{\otimes} J_\mu, P\otimes\mu)$, $\mathcal{U}$ est compact métrisable pour la topologie faible $\sigma(L^\infty_F(\Omega\times I, \mathcal{A}\widehat{\otimes} J_\mu, P\otimes\mu), L^1_F(\Omega\times I, \mathcal{A}\widehat{\otimes} J_\mu, P\otimes\mu))$. Donc, on peut supposer que la suite $(\dot X_n)$ converge vers $\dot X$ dans l'espace compact métrisable $\mathcal{U}$. Or I_Φ est semi-continue inférieurement sur cet espace compact métrisable $\mathcal{U}$ en vertu du théorème de dualité cité, et la fonction convexe $q(\dot X)=\langle \dot X, X\rangle$ définie sur $\mathcal{U}$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{U}$ lorsque $\mathcal{U}$ est muni de la topologie $\sigma(L^1_F(\Omega\times I, \mathcal{A}\widehat{\otimes} J_\mu, P\otimes\mu), L^\infty_F(\Omega\times I, \mathcal{A}\widehat{\otimes} J_\mu, P\otimes\mu))$. Il résulte de l'inégalité (7) en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$(8)\qquad I_\Phi(-\dot X)+\langle \dot X, X\rangle \leqslant \liminf_{n\to\infty}[I_\Phi(-\dot X_n)+\langle \dot X_n, X_n\rangle]\leqslant 0$$

Or (8) équivaut à

$$(9)\quad -\dot X\in \partial I_{\Phi*}(X)\Leftrightarrow -\dot X(\omega, t)\in \partial\Phi^*(\omega, t, X(\omega, t))\ P\otimes\mu\text{-p.p.}$$

où $\partial I_{\Phi*}$ est le sous-différentiel de $I_{\Phi*}$.

La démonstration de b) est omise car cela résulte de la compacité faible de $\mathcal{U}$ et de la semi-continuité inférieure des fonctions convexes

$$I_\Phi \text{ et } \dot X\mapsto \int_{\Omega\times I}[\langle \dot X(\omega, t), \int_{]0, t]}\dot X(\omega, s)\, \mu(ds)\rangle]\, P\otimes\mu.$$

Remarques. 1) Bien que l'hypothèse de séparabilité sur $L^1_F(\Omega\times I, \mathcal{A}\widehat{\otimes} J_\mu, P\otimes\mu)$ soit réalisé dans le cas « concret » où Ω est un espace compact métrisable, le lecteur a pu s'apercevoir qu'il est possible de supprimer cette hypothèse si « l'état initial » y_0 appartient à $L^\infty_F(\Omega, \mathcal{A}, P)$ car il suffit alors d'appliquer le théorème de dualité cité en définissant I_Φ et $I_{\Phi*}$ sur $L^1_F(\Omega\times I, \mathcal{A}\widehat{\otimes} J_\mu, P\otimes\mu)$ et $L^\infty_F(\Omega\times I, \mathcal{A}\widehat{\otimes} J_\mu, P\otimes\mu)$ et en utilisant la compacité faible de $\mathcal{U}$ pour la topologie $\sigma(L^1_F(P\otimes\mu), L^\infty_F(P\otimes\mu))$.

2) Dans le cas déterministe, la situation est bien plus simple et, naturellement le théorème d'existence de l'équation (E) dans le cas considéré, est valable sous des conditions plus faibles. Tout d'abord, il n'est pas nécessaire de supposer que Γ prend ses valeurs dans les convexes fermés *L.C.S.D.* et, l'on peut se contenter d'appliquer les arguments utilisés dans la démonstration du théorème 11 dans le cas F séparable parce qu'alors le graphe de C,

$$G(C) = \{(t, x) \in I \times F \mid d(y, C(t)) = 0\}$$

est un borélien de $I \times F$ de sorte qu'il est possible d'utiliser le théorème de dualité cité pour le cas F séparable.

Cependant, si l'on désire obtenir le théorème d'existence dans le cas déterministe (avec F non nécessairement séparable), on peut faire appel au théorème de Dunford-Pettis-Phillips qui permet de démontrer que le dual fort de $L^1_F(I, \mu)$ est $L^\infty_F(I, \mu)$ car, c'est le résultat qui fournit la compacité de la boule.

Posons

$$q(U) = \int_I [\langle U(t), x_0 + \int_{]0, t]} U(s)\, \mu(ds)\rangle]\, \mu(dt), U \in \mathcal{U}$$

où $\mathcal{U}$ est la boule unité de $L^\infty_F(I, \mu)$. Alors on a les inégalités

$$I_\Phi(-\dot{X}_n) + \langle X_n, \dot{X}_n \rangle \leqslant 2 \int_I (v(\theta_n(t)) - v(t))\, \mu(dt)$$

où $(\dot{X}_n)$ demeure dans $\mathcal{U}$. En utilisant la compacité de $\mathcal{U}$ pour $\sigma(L^1_F(I, \mu), L^\infty_F(I, \mu))$ et la semi-continuité sur $\mathcal{U}$ des fonctions convexes I_Φ et q, on termine la démonstration comme dans celle du théorème 11.

Remarque. En utilisant le théorème 8, il n'est pas nécessaire d'utiliser la compacité de $\mathcal{U}$ pour $\sigma(L^1_F(I, \mu), L^\infty_F(I, \mu))$ parce que $\mathcal{U}$ est compact pour $\sigma(L^2_F(I, \mu), L^2_F(I, \mu))$ et il suffit d'appliquer le théorème 8 de dualité dans l'espace $L^2_F(I, \mu)$!

Commentaires. 1) J.J. Moreau a donné une démonstration ([5]) différente du théorème 12, qui n'utilise pas le théorème 8 de dualité des intégrales convexes.

2) Si l'on désire sortir du cadre hilbertien, c'est à dire, si F est un Banach réflexif, il est nécessaire de faire appel à la compacité de $\mathcal{U}$ pour $\sigma(L^1_F(I, \mu), L^\infty_{F'_b}(I, \mu))$!

REFERENCES

[1] ARSTEIN Z., Topological dynamics of an ordinary differential equation. Journal of Differential equation 23, 216—223 (1977).

[2] CASTAING CH. et VALADIER M., Convex analysis and measurable multi-functions. Springer-Verlag — Lectures Notes N° 580.

[3] CASTAING CH. et CLAUZURE P., Applications du théorème de décomposition de formes sous linéaires continues sur un espace vectoriel normé décomposable de fonctions vectorielles mesurables (à paraître dans le Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1977).

[4] LEVIN V.L., Fonctionnelles convexes et théorème du relèvement (1975) (en Russe) T. XXX, N. 2 (182) УСПЕХИ MATEMAT. NAUK.

[5] MOREAU J.J., Solutions du processus de rafle au sens des mesures différentielles, Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier 1976, Exposé N° 1.

[6] ROCKAFELLAR R.T., Convex integrals functionals and duality. Contributions to non linear functional analysis, Academic Press, 1971, p 215-236.

[7] TULCEA A. et TULCEA C., Topics in the theory of liftings, Springer-Verlag (1969).

[8] WAKEMAN D. R., An application of topological dynamics to obtain a new invariance property for non autonomous ordinary differential equations. Journal of differential equations 17 (1975), 259-295.

CHAPITRE IV

QUELQUES PROBLEMES NON RESOLUS D'ANALYSE CONVEXE ET D'OPTIMISATION

Dans le chapitre III, j'ai présenté des applications des résultats obtenus dans les chapitres I et II. Dans ce chapitre j'expose des problèmes non résolus qui sont liés aux résultats présentés dans le chapitre III.

Problème 1. Dans le théorème 3 du chapitre III, si E est un espace de Banach réflexif séparable et si le couple $(\mathcal{L}_E, \mathcal{L}_{E'})$ est $(L_E^\infty, L_{E'}^1)$, on peut démontrer que B est fermé pour la convergence en mesure et si I est une fonctionnelle $I: L_E^1 \to]-\infty, +\infty]$, semi-continue pour la convergence en mesure, I atteint son minimum sur B. Le problème naturel est le suivant: B étant comme dans le théorème 3, soit $I: \mathcal{L}_{E'} \to]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle (pas forcément intégrale comme I_{f*}). Trouver des conditions sur I et sur B assurant l'existence d'un élément de B réalisant le minimum de I sur B.

Problème 2. Ce problème est lié au problème *1*. J'ai indiqué la fermeture en mesure de l'ensemble B dans le problème *1*. Donner (si possible) une version multivoque de la fermeture en mesure, de façon précise, si A est un ensemble de formes sous linéaires absolument continues définies sur $\mathcal{L}_E$ et si B est l'ensemble des densités correspondant. Si l'adhérence de A, $\overline{A}$, pour la topologie de la convergence simple definie sur $\mathcal{L}_E$, est compacte et si l'on a

$$\overline{A} \subset A + \Lambda_s$$

où Λ_s est l'ensemble des formes sous linéaires continues additives singulières sur $\mathcal{L}_E$, B est-il fermé pour la convergence en mesure ?

c'est à dire, si (Γ_n) est une suite de densités dans B convergeant en mesure vers une multi-application scalairement mesurable Γ à valeurs convexes compactes non vides de E'_s au sens suivant, $\forall A$ mesurable de mesure finie

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} \mu\{\omega \in A \mid h(\Gamma_n(\omega)), \Gamma(\omega)) \geqslant \varepsilon\} = 0$$

où h désigne la distance de Hausdorff des convexes fermés dans E'_b, alors Γ appartient à B.

Problème 3. Peut-on généraliser le théorème 8 du chapitre 3 dans les conditions suivantes. Soit Γ une multi-application séparément mesurable sur Ω et séparément continue à droite sur $[0, T]$ (c'est à dire, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x \in F'$, $t \to \delta^*(x, \Gamma(\omega, t))$ est continue à droite). Existe-t'il une section séparément continue à droite et séparément mesurable de Γ ?

Dans le même ordre d'idées, soit (J_t) une famille de sous tribus de $\mathcal{A}$, et, on suppose que, pour tout $t \in [0, T]$, $\Gamma(.,t)$ est J_t-mesurable. La multi-application Γ possède-t'elle une section σ, séparément continue à droite et séparément J_t-mesurable. Bien entendu, dans le théorème 8 ci-dessus, $J_t = \mathcal{A}$, $\forall t \in [0, T]$.

Problème 4. Le théorème 11 donne l'existence d'une solution de l'équation

$$-\dot{X}(\omega, t) \in \partial f(\omega, t, X(\omega, t))$$

où $f(\omega, t,.)$ est la fonction indicatrice de $\Gamma(\omega, t)$

$$f(\omega, t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Gamma(\omega, t) \\ +\infty & \text{si } x \notin \Gamma(\omega, t) \end{cases}$$

Résoudre le théorème 11 dans le cas où $f: \Omega \times [0, T] \times F$ est un intégrande convexe semi-continue inférieurement sur F, et jouissant des conditions de régularité convenables par rapport aux paramètres ω de t.

Problème 5. Le théorème 11 est-il encore valable si l'on supprime l'hypothèse de convexité sur Γ. Dans le cas, il faut introduire une notion de cône normal à $\Gamma(\omega, t)$ qui coïncide avec celle donnée dans le cas convexe.

Problème 6. Dans le cas déterministe, c'est à dire, Γ ne dépend pas du paramètre ω, résoudre l'équation perturbée

$$-\dot{x}(t) \in \partial\Psi_{\Gamma(t)}(x(t)) + G(t, x(t))$$

où $\partial\Psi_{\Gamma(t)}$ est le sous différentiel de la fonction indicatrice

$$\Psi_{\Gamma(t)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Gamma(t) \\ +\infty & \text{si } x \notin \Gamma(t) \end{cases} \text{ de } \Gamma(t),$$

et G est une perturbation multivoque, mesurable sur $[0, T]$ et semi-continue supérieurement en $x \in F$. Bien entendu, si $G \equiv 0$, ce problème admet des solutions d'après le théorème 11 du chapitre III. Il s'agit de mettre des hypothèses de régularité convenables sur G pour assurer l'existence d'au moins une solution de cette équation. Par ailleurs, il est naturel de poser le même problème lorsque $\partial\Psi_{\Gamma(t)}$ est remplacé par le sous différentiel ∂f_t d'un intégrande convexe f_t semi-continue inférieurement et convexe sur F.